نظري

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄ المحاضرة: الرابعة عشر   عنوان المحاضرة: الفضاءات المنظمة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ الفضاءات المنظمة التامة
٢ـ المتسلسلات في الفضاء المنظم

مثال على فضاء منظم وغير تام :

ليكن لدينا الفضاء $c[a,b]$ فضاء الدوال المستمرة على المجال المغلق $[a,b]$ ولنزوده بالدالة التالية :

$$||.||: c[a,b] \to R$$

$$x \to ||x|| = \left(\int_a^b x(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ولنثبت أن $||.||$ هي دالة نظيم .

الحل : لنتحقق من الشروط الأربعة التالية :

$$\forall x,y \in c[a,b] \quad ; \forall a \in R$$

$$1 - ||x|| = \left(\int_a^b x(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$2 - ||x|| = 0 \Leftrightarrow \left(\int_a^b x(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow |x(t)| = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(t) = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

دالة تصور جميع النقط بالصفر (الدالة الصفرية) محقق .

$$3-||\alpha x||=\left(\int_a^b(\alpha x(t))^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_a^b(\alpha)^2(x(t))^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{a^2}\left(\int_a^b x(t)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=|\alpha|\left(\int_a^b x(t)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=|\alpha|\;||x||$$

$$4-||x+y||=\left(\int_a^b(x+y)(t)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_a^b(x(t)+y(t))^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ولدينا حسب متراجحة فيكوفسكي من أجل $p=2$ نجد :

$$\left(\int_a^b(x(t)+y(t))^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\int_a^b x(t)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b y(t)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow ||x+y||=||x||+||y||$$

إذن تحقق الشروط الأربعة ومنه فإن $||.||$ هي دالة نظيم على الفضاء المتجهي $c[a,b]$.

وبالتالي فإن $(c[a,b]\,,||.||)$ هو فضاء منظم ولكنه غير تام لأنه غير تام بخصوص المترك المولد من هذا النظيم .

$$d(x,y)=||x-y||=\left(\int_a^b(x(t)-y(t))^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ولإثبات أنه غير تام يمكن اتباع خطوات البرهان الوارد في المحاضرة١٢ حيث يستعاض من المترك السابق بالمترك الحالي وأيضاً باستبدال المجال $[0,1]$ بالحالة العامة $[a,b]$ بنفس الخطوات نستطيع إيجاد كوشية غير متقاربة ضمن هذا المجال ونهاية هذه المتتالة الكوشية هي دالة قابلو للمكاملة ولكنها غير مستمرة إذاً هذه الكوشية غير متقاربة ضمن هذا الفضاء .

وبالتالي الفضاء غير تام بخصوص المترك المعرف عليه .

تعريف الفضاء الجزئي المنظم : ليكن لدينا $(X\,,||.||)$ فضاء منظم وليكن $\emptyset\neq Y\subseteq X$ عندئذ فإن Y سوف يكون فضاء متجهي فإذا زودنا Y بمقصور النظيم المعرف على X نحصل على فضاء منظم جديد

نسميه فضاء جزئي منظم وفي حال كانت المجموعة Y مغلقة في X عندها نقول أنه فضاء جزئي منظم مغلق .

فضاء باناخ : هو كل فضاء منظم و تام .

ملاحظة : إن كل فضاء منظم هو فضاء متري ((أي أن كل نظيم يولد مترك))

مبرهنة الفضاء الجزئي من فضاء باناخ :

الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء جزئي Y من فضاء باناخ X تاماً هو أن تكون المجموعة Y مغلقة في X .

الإثبات :

بما أن، كل فضاء منظم هو فضاء متري وحسب الملاحظة ((كل نظيم يولد مترك)) وحسب مبرهنة سابقة في الفضاءات المترية ((إذا كان الفضاء الكلي تاماً الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الجزئي تام هو أن تكون الجزئية مغلقة))

ومنه Y تام $\Leftrightarrow$ Y مغلقة . ويتم المطلوب .

تعريف تقارب متتالية في الفضاءات المنظمة :

تكون المتتالية $\{x_n\}_{n\epsilon N^*}$ في فضاء منظم $X = (X, ||.||)$ متقاربة إذا وجد عنصر x من X بحيث أن

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$$

ونكتب عندئذ $x_n \to x$ كما نسمي x نهاية المتتالية $\{x_n\}$.

ملاحظة :

إن تعريف التقارب في الفضاءات المنظمة يجب أن لا يتعارض مع تعريف التقارب في الفضاءات المترية والسبب في ذلك هو أن كل فضاء منظم هو فضاء متري .

يمكننا اعتبار أن الفضاءات المنظمة هي حالة خاصة من الفضاءات المترية .

- تعاملنا مع المتتاليات في الفضاءات المترية ولم نتعامل مع المتسلسلات لأنه ليس بالضرورة أ، يكون مفهوم الجمع معرف في الفضاءات المترية بينما الفضاءات المنظمة معرفة على الفضاءات المتجهية مزودة ببنية جبرية .

المتسلسلات في الفضاءات المنظمة :

نعلم أن المتسلسلة هي المجموع الجبري لعناصر المتتالية

ليكن لدينا المتتالية :(∗) $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n, \ldots$

فإن المتسلسلة الناتجة عن هذه المتتالية هي : $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

حيث x_nهي عناصر الفضاء المتجهي X .

فإذا كان المجموع منته نستطيع إيجاده بسهولةوتكون عندها المتسلسلة متقاربة ، أما في حال كان المجموع غير منته أو (غير موجود) هنا سنواجه مشكلة ولحلها نستخدم مفهوم تقارب المتسلسلة .

ولدراسة تقارب المتسلسلة أولاً : نبني متتالية جديدة حدها العام مؤلف من مجموع أول n حداً من حدود المتتالية .

تدعى متتالية المجاميع الجزئية ونرمز لها $\{s_n\}_{n\epsilon N^*}$ حدودها كالتالي :

$$s_1 = x_1$$

$$s_2 = x_1 + x_2$$

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots .. + x_n$$

عندئذ تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها $\{s_n\}_{n\epsilon N^*}$ متقاربة أي تحقق :

$$\|s_n - s\| \to 0 \quad ; \quad n \to \infty$$

في هذه الحالة تكون نهاية $\{s_n\}$ موجودة ومحدودة ونرمز لها ب $\{s\}$وتدعى مجموع هذهالمتسلسلة ويتحقق لدينا : $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s$

بعض خواص المتسلسلات :

١- مجموع متسلسلتين متقاربتين هو متسلسلة متقاربة .

٢- مجموع متسلسلتين متباعدتين ليس بالضرورة أن يكون متسلسلة متباعدة .
٣- حذف عدد منته من عناصر المتسلسلة لا يؤثر على تقاربها أو تباعدها .
٤- ضرب متسلسلة بعدد حقيقي إيضاً لا يؤثر على تباعدها أو تقاربها .

التقارب بالإطلاق : لتكن لدينا المتسلسلة $(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ فإذا استبدلنا كل حد من حدود المتسلسلة بالنظيم لهذا الحد وكانت المتسلسلة الناتجة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| = ||x_1|| + ||x_2|| + \cdots .. + ||x_n|| + .. \quad (2)$$

متقاربة ندعو المتسلسلة (١) متقاربة بالإطلاق .

أما إذا كانت المتسلسلة (١) متقاربة و (٢) ليست متقاربة فإننا نسمي هذا التقارب بالتقارب الشرطي .

مبرهنة هامة : الشرط اللازم والكافي لتكون المتسلسلة متقاربة بالإطلاق في فضاء منظم X هو أن يكون X تاماً .

قاعدة شاودر :

في الفضاءات المنظمة نتعامل مع فضاءات شعاعية معرف عليها دالة النظيم أي مزودة ببنية جبرية فإننا نستطيع توظيف هذا والاستفادة من التقارب كبنية طبولوجية بتعريف شاودر .

كالتالي :

إذا حوى فضاء منظم X متتالية (e_n) حيث أنه يوجد لكل عنصر $x\epsilon X$ متتالية وحيدةمن الأعداد (a_n) حيث أن ((هذه المتتالية تنتمي للحقل المعرف عليه الفضاء المتجهي)) حيث تحقق :

$$x - \sum_{n=1}^{n} a_n e_n = ||x - (a_1 e_1 + \cdots .... + a_n e_n)|| \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

فإن (e_n) تدعى قاعدة شاودر للفضاء X وتدعى عندئذ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{n} a_n e_n$ التي مجموعها x بمنشور x بالنسبة ل (e_n) ونكتب : $x = \sum_{n=1}^{n} a_n e_n$

الأمثلة :

١ – في الفضاء R^2 القاعدة القانونية $\{(0,1),(1,0)\}$ تمثل قاعدة شاودرحيث $\forall x=(\alpha,\beta)\epsilon R^2$ فإن x تحقق :

$$||x-(\alpha_1 e_1+\cdots\ldots.+\alpha_n e_n)||\to 0$$

٢ – الفضاء ℓ^p يمتلك قاعدة لشاودر هي (e_n) أي أن المتتالية التي حدها ذو الترتيب n يساوي (١) وكل حدودها الأخرى أصفاراً كالتالي :

$$e_1=(1,0,0,0,\ldots)$$

$$e_2=(0,1,0,0,\ldots.)$$

$$e_3=(0,0,1,0,..)$$

حيث(e_n) هي عناصر من ℓ^p

مبرهنة : ليكن $X=(X,||.||)$ فضاءاً منظماً عندئذ هناك فضاء لباناخ $X^\wedge$ وتطبيق ايزومتري A من X على فضاء جزئي W من $X^\wedge$ كثيف في $X^\wedge$

إن الفضاء $X^\wedge$ وحيد إذا غضضنا النظر عن الفضاءات الإيزومترية معه (بمعنى أنه إذا كان $X^\sim$ أي فضاء لباناخ يحوي فضاء كثيفاً w إيزومترياً مع x فإن الفضاءين $X^\wedge$ و $X^\sim$ ايزومتريان)

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله ، تقى إسماعيل ، رشا القرصة