المحاضرة 16 + 17

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ عنوان المحاضرة: تمديد غالوا

21+22/11/2018

نظري ☑ عملي ☐

تعريف: لتكن L/K تمديد جبري عندها:

L/K قابل للفصل $\Leftrightarrow$ لأجل كل حقل M بحيث $K \subset M \subset L$ $\left\{ \begin{array}{l} M/K \text{ تمديد منتهي عندها } M/K \text{ قابل للفصل} \end{array} \right.$

مثال: $\overline{Q}/Q$ تمديد قابل للفصل

ملاحظة: 1- L/F قابل للفصل $\Leftrightarrow$ L/K و K/F قابل للفصل

حيث $F \subset K \subset L$

2- $[L:F]_s = [L:K]_s \cdot [K:F]_s$

3- • F_1/K قابل للفصل $\Leftarrow$ F_1F_2/F_2 قابل للفصل

• F_1F_2/K قابل للفصل $\Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1/K \text{ قابل للفصل} \\ F_2/K \text{ قابل للفصل} \end{array} \right.$

$$\begin{tikzcd} & F_1 \cdot F_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ F_2 \arrow[dr, dash] & & F_1 \arrow[dl, dash] \\ & K & \end{tikzcd}$$

مثال: عن تمديد غير قابل للفصل وهو للاطلاع فقط:

لتكن $K = \mathbb{F}_p(T)$ بحيث $T \in K$ و $\sqrt[p]{T} \notin K$ لنرى هل هو قابل للفصل أم لا. لنعد بـ $\sqrt[p]{T}$ ومنه:

$$\boxed{\begin{array}{c} K(\sqrt[p]{T}) \\ p \,| \\ K = \mathbb{F}_p(T) \end{array}} \Rightarrow$$

$X = \sqrt[p]{T} \Rightarrow X^p = T \Rightarrow irr(\sqrt[p]{T}, K) = X^p - T$

ومنه $f(x) = X^p - T$ غير مختزلة على K

$f(x) = (X - \sqrt[p]{T})^p$

إن جذور $f(x)$ هي $\sqrt[p]{T}$ مكرر p مرة

$1 = [K(\sqrt[p]{T}):K]_s < [K(\sqrt[p]{T}):K] = p$

$\Leftarrow$ $K(\sqrt[p]{T})/K$ تمديد غير قابل للفصل.

مثال ②: إن التمديد $\overbrace{\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})}^{K}/\mathbb{Q}$ قابل للفصل لأن:

طريقة ①: $4=[K:\mathbb{Q}]_s=[K:\mathbb{Q}]=4$

طريقة ②: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ قابل للفصل وذلك لأن

$irr(\sqrt{2},\mathbb{Q})=x^2-2$ قابلة للفصل لأنها غير مختزلة على حقل مميزه صفر وهو $\mathbb{Q}$ وأيضاً $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ قابل للفصل لأن

$irr(\sqrt{3},\mathbb{Q}(\sqrt{2}))=x^2-3$ قابلة للفصل لأنها غير مختزلة على حقل مميزه صفر وهو $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ $\Leftarrow$ $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ و $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ كلاهما قابل للفصل إذاً $K/\mathbb{Q}$ قابل للفصل.

مثال ③: التمديد $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ قابل للفصل لأن:

$irr(\sqrt[3]{2},\mathbb{Q})=x^3-2$ قابلة للفصل لأنها غير مختزلة على حقل مميزه صفر وهو $\mathbb{Q}$.

التمديد الناظمي

تعريف: ليكن L/K تمديد جبري عندها

L/K ناظمي $\Longleftrightarrow$ مهما تكن $\alpha\in L$ فإن $irr(\alpha,K)$ تتحلل بشكل تام في L (أي جميع أصفارها في L)

مبرهنة بدون برهان: ليكن L/K تمديد جبري عندها الشروط التالية متكافئة:

(1) L/K ناظمي

(2) L حقل تفريق لأسرة من الحدوديات في $K[x]$.

(3) إن أي حدودية $p(x)\in K[x]$ وتملك صفر في L فإن $p(x)$ تتحلل بشكل تام في L

((تستخدم لإثبات عدم الناظمية))

(4) كل K-تشاكل من L إلى $\bar{K}$ تماثل.

أمثلة ①: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ تمديد ناظمي لأن:

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ حقل تفريق لـ $x^2-2\in\mathbb{Q}[x]$ وبالتالي كل $\mathbb{Q}$-تشاكل من $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ إلى $\bar{\mathbb{Q}}$ هو تماثل.

$\boxed{2}$ $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)/\mathbb{Q}$ تمديد ناظمي لأن:

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$ حقل تفريق الحدودية $x^3-2 \in \mathbb{Q}[x]$ وبالتالي

كل $\mathbb{Q}$-تشاكل من $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$ إلى $\bar{\mathbb{Q}}$ هو تماثل.

$\boxed{3}$ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ ناظمي لأن:

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ حقل تفريق لـ $\{x^2-2 , x^2-3\}$

$\boxed{4}$ هل $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ ناظمي ؟؟

نلاحظ أن $x^3-2 \in \mathbb{Q}[x]$ تملك صفر $\sqrt[3]{2}$ في $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ولكنها لا تتحلل بشكل تام فيه حيث $\sqrt[3]{2}\, j \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ $\Leftarrow$ التمديد ليس ناظمي.

«باستخدام رقم (3) من المبرهنة السابقة»

$\boxed{5}$ أي تمديد من الدرجة الثانية هو ناظمي.

$\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ تمديد ناظمي لأنه درجة ثانية.

$\boxed{6}$ $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ ليس ناظمي لكن $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$ ناظمي.

$\boxed{7}$ $L \,|\, K \,|\, F$: L/K ناظمي ، K/F ناظمي $\Rightarrow$ ليس ناظمي

مثال: $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \,|\, \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \,|\, \mathbb{Q}$: ناظمي ، ناظمي ، ليس ناظمي

أما $L \,|\, K \,|\, F$ ناظمي فإن L/K ناظمي

$\boxed{8}$ $K(\sqrt[p]{T})/K$ حيث $K = \mathbb{F}_p(T)$ تمديد ناظمي لأن:

$(x-\sqrt[p]{T})^p = x^p - T \in K[x]$

$\Leftarrow$ $K(\sqrt[p]{T})$ حقل تفريق لـ $(x-\sqrt[p]{T})^p$

تمديد غالوا

تعريف: ليكن L/K تمديد جبري عندها L/K تمديد غالوا إذا كان ناظمي وقابل للفصل في آن واحد.

في هذه الحالة الزمرة $Aut_K(L)$ تسمى زمرة غالوا

لتحديد L/K نوجد $Gal(L/K)$.

تمارين [1] هل $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ تمديد غالوا؟
وأوجد $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q})$.

الحل • التمديد المعطى ناظمي لأنه من الدرجة الثانية.
• التمديد المعطى قابل للفصل لأن: $irr(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = X^2 - 2$ غير خزولة على حقل مميزه صفر.

$\Leftarrow$ $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ تمديد غالوا

وأيضاً $\varphi_1 : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}$ ، $\varphi_2 : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$

$$\Rightarrow Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}) = \{\varphi_1, \varphi_2\} = \langle \varphi_2 \rangle$$

مولدة ب φ_2 لأن: $\varphi_2^1 \neq id : \varphi_2(\sqrt{2}) \neq \sqrt{2}$

$\varphi_2^2 = \varphi_2 \circ \varphi_2 = id$

وذلك لأن: $\varphi_2 \circ \varphi_2(\sqrt{2}) = \varphi_2(-\sqrt{2}) = -\varphi_2(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

[2] هل $\mathbb{Q}(\xi_5)/\mathbb{Q}$ تمديد غالوا؟ $\boxed{\xi_5 = e^{\frac{2\pi}{5}i}}$

الحل
$$f(x) = irr(\xi_5, \mathbb{Q}) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

بما أن $[\mathbb{Q}(\xi_5) : \mathbb{Q}] = 4 \Leftarrow \mathbb{Q}(\xi_5)/\mathbb{Q}$ تمديد منتهي

أصفار $f(x)$ هي $\{\xi_5, \xi_5^2, \xi_5^3, \xi_5^4\}$

• $\mathbb{Q}(\xi_5)/\mathbb{Q}$ قابل للفصل لأن $f(x)$ غير خزولة على حقل مميزه صفر وهو $(\mathbb{Q})$ حيث $p=5$ عدد أولي

• $\mathbb{Q}(\xi_5)/\mathbb{Q}$ تمديد ناظمي لأنه حقل تفريق $f(x)$

$\Leftarrow$ $\mathbb{Q}(\xi_5)/\mathbb{Q}$ تمديد غالوا.

لنحسب عناصر $Gal(\mathbb{Q}(\xi_5)/\mathbb{Q})$

بما أن $f(x)$ تملك 4 أصفار مختلفة في $\mathbb{C}$ يوجد 4 $\mathbb{Q}$-تشاكل من $\mathbb{Q}(\xi_5)$ إلى $\bar{\mathbb{Q}}$ وكون التمديد ناظمي فإن تلك $\mathbb{Q}$-تشاكلات تماثلات إذاً عناصر $Gal(\mathbb{Q}(\xi_5)/\mathbb{Q})$ هي

$\varphi_1 : \mathbb{Q}(\xi_5) \to \mathbb{Q}(\xi_5)$, $\xi_5 \mapsto \xi_5$ ، $\varphi_2 : \mathbb{Q}(\xi_5) \to \mathbb{Q}(\xi_5)$, $\xi_5 \mapsto \xi_5^2$

$\varphi_3 : \mathbb{Q}(\xi_5) \longrightarrow \mathbb{Q}(\xi_5)$, $\varphi_4 : \mathbb{Q}(\xi_5) \longrightarrow \mathbb{Q}(\xi_5)$

$\xi_5 \mapsto \xi_5^3$ $\qquad$ $\xi_5 \mapsto \xi_5^4$

$\Rightarrow Gal(\mathbb{Q}(\xi_5)/\mathbb{Q}) = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$

$\boxed{3}$ هل $\mathbb{Q}(\sqrt{4+2\sqrt2})/\mathbb{Q}$ تمديد غالوا؟؟

وأوجد عناصر $G = Gal(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$

الحل: $X = \sqrt{4+2\sqrt2} \Rightarrow X^2 = 4+2\sqrt2 \Rightarrow (X^2-4)^2 = 8$

$\Rightarrow irr(\sqrt{4+2\sqrt2}, \mathbb{Q}) = X^4 - 8X^2 + 8$

$\Rightarrow$ $\alpha = \sqrt{4+2\sqrt2}$ حيث $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 4$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ تمديد منتهي

• لندرس قابلية الفصل للتمديد $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$:

إن $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ تمديد قابل للفصل لأن $irr(\alpha, \mathbb{Q}) = X^4 - 8X^2 + 8$

غير مختزلة على حقل مميزه صفر (وهو $\mathbb{Q}$)

• إيجاد حقل التفريق:

$f(x) = X^4 - 8X^2 + 8 = \left((X^2-4) - 2\sqrt2\right)\cdot\left((X^2-4) + 2\sqrt2\right)$

$\Rightarrow f(x) = (X - \sqrt{4-2\sqrt2})(X + \sqrt{4+2\sqrt2})(X - \sqrt{4-2\sqrt2})(X + \sqrt{4+2\sqrt2})$

إذاً أصفار $f(X)$ هي $\mp\alpha$ و $\mp\beta$ حيث

$\beta = \sqrt{4-2\sqrt2}$, $\alpha = \sqrt{4+2\sqrt2}$

لنحسب $\alpha.\beta$ لإيجاد حقل التفريق

$\alpha.\beta = \sqrt{(4+2\sqrt2)(4-2\sqrt2)} = \sqrt{16-8} = 2\sqrt2$

لكن $\sqrt2$ ينتج من $\dfrac{\alpha^2-4}{2} = \dfrac{(4+2\sqrt2)-4}{2} = \sqrt2$

عنصر ينتمي لـ $\mathbb{Q}(\alpha)$ ومنه حقل تفريق $f(X)$ هو $\mathbb{Q}(\alpha)$

$\Leftarrow$ $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ ناظمي $\Leftarrow$ $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ تمديد غالوا.

لنوجد عناصر G : يوجد 4 $\mathbb{Q}$-تماثل في G وهم

$\psi_i : \mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{Q}(\alpha)$; $i = 1,2,3,4$

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
α	α	$-\alpha$	β	$-\beta$

٤) هل $\mathbb{Q}(\xi_6)/\mathbb{Q}$ تمديد غالوا ؟

الحل:
$$\xi_6 = e^{\frac{2\pi}{6}i} = e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
«6 ليس عدد أولي»

نلاحظ أن $\boxed{\mathbb{Q}(\xi_6) = \mathbb{Q}(i\sqrt{3})}$ لأن:
6 ليس عدد أولي لذلك نقوم بفك ξ_6 وكون $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ فيكفي إضافة $i\sqrt{3}$.

$$Irr(\sqrt{3}i, \mathbb{Q}) = X^2 + 3 \Rightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)/\mathbb{Q}] = 2$$
$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)/\mathbb{Q}$ تمديد منتهي

أصفار X^2+3 هي $\mp\sqrt{3}i$

وكذلك $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)/\mathbb{Q}$ قابل للفصل لأن X^2+3 غير مختزلة على $\mathbb{Q}$ الذي مميزه صفر.

$\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)/\mathbb{Q}$ ناظمي لأنه من الدرجة ثانية $\Leftarrow$ $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)/\mathbb{Q}$ تمديد غالوا

حيث $Gal(\mathbb{Q}(i\sqrt{3})/\mathbb{Q}) = \{\psi_1, \psi_2\}$

$$\psi_j : \mathbb{Q}(i\sqrt{3}) \longrightarrow \mathbb{Q}(i\sqrt{3}) \quad ; j = 1, 2$$

	ψ_1	ψ_2
$i\sqrt{3}$	$i\sqrt{3}$	$-i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow Gal(\mathbb{Q}(i\sqrt{3})/\mathbb{Q}) = \langle \psi_2 \rangle \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$
(لكون 2 عدد أولي)

٥) هل $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ تمديد غالوا ؟

$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4 \Rightarrow$ $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ تمديد منتهي

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ قابل للفصل لأن:

$$\left.\begin{array}{c} \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \\ \Big| \;\text{قابل للفصل} \\ \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ \Big| \;\text{قابل للفصل} \\ \mathbb{Q} \end{array}\right] \text{قابل للفصل}$$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q}$ ناظمي لأنه حقل تفريق

$\{X^2-2,\ X^2-3\} \Leftarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q}$ تمديد غالوا.

عناصر $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q})$ هي

$\varphi_i : \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) \quad ; i=1,2,3,4$

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

وظيفة: أوجد Gal

① $\mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt{3}+1})/\mathbb{Q}$ ② $\mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt{5}-1})/\mathbb{Q}$

③ $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$

تعريف: مرافقات عنصر جبري:

ليكن α عنصر جبري على K عندها توجد $f(x)=irr(\alpha,K)$

نعرف مرافقات α بأنها أصفار $f(X)$

~ مبرهنات أساسية في نظرية غالوا ~

مبرهنة (1) تسمى مبرهنة آرتين:

ليكن L حقل و G زمرة منتهية بحيث $G < Aut(L)$

(يقصد به G زمرة جزئية من $Aut(L)$)

عندها $\{x \in L \ : \ \sigma(x)=x,\ \forall \sigma \in G\} = L^G$

يمثل حقل ويدعى الحقل الجزئي من L المثبت وفق عناصر G و

L/L^G تمديد منتهي و L/L^G تمديد غالوا بزمرة غالوا

$Gal(L/L^G) = Aut_{L^G}(L) = G$

مبرهنة (2) ليكن M/K تمديد غالوا منتهي زمرته $G=Gal(M/K)$

لنأخذ الحقل L بحيث $K \subset L \subset M$ فإن M/L تمديد غالوا

زمرته $Gal(M/L)=H$ زمرة جزئية في G

أضف لذلك, إذا كانت $H < G$ عندها M/M^H تمديد غالوا

حيث $K \subset M^H \subset M$ و $Gal(M/M^H) = H$

إذاً يوجد التقابل

$\{$زمرة جزئية H من $G\}$ $\xrightarrow{\text{تقابل}}$ $\{$التمديدات L ، $K \subset L \subset M\}$

$$L \longmapsto Gal(M/L) < G$$

$$M^H \longleftarrow H < G$$

أضف إلى ذلك: ① عندما $H_1 < H_2 < G$

M^{H_1}/M^{H_2} تمديد منتهٍ و $|(H_2 : H_1)| = \frac{|H_2|}{|H_1|}$

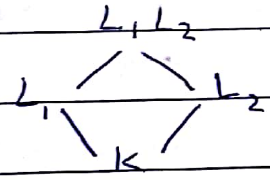
② $\sigma(M^H) = M^{\sigma H \sigma^{-1}}$ وذلك أياً كانت $\sigma \in G$

ويكون M^H/K غالوا $\Leftrightarrow$ $H \triangleleft G$ (الزمرة الجزئية H ناظمية في G)

وفي هذه الحالة $Gal(M^H/K) \cong G/H$

مبرهنة 3: ليكن L_1/K و L_2/K تمديدات منتهية عندها.

① L_2/K غالوا $\Leftarrow$ $L_1 L_2/L_1$ غالوا



(عكس ليس بالضرورة) وفي هذه الحالة يوجد التشاكل المتباين التالي:

$$Gal(L_1 L_2/L_1) \longrightarrow Gal(L_2/K)$$

$$\sigma \longmapsto \sigma|_{L_2}$$

ويكون التشاكل $Gal(L_1 L_2/L_1) \cong Gal(L_2/K)$ إذا كان $L_1 \cap L_2 = K$

② ليكن $\begin{cases} L_1/K \text{ غالوا} \\ L_2/K \text{ غالوا} \end{cases}$ $\Leftarrow$ $L_1 L_2/K$ غالوا

إضافة لذلك إذا كان $L_1 \cap L_2 = K$ عندها

$$Gal(L_1 L_2/K) \cong Gal(L_1/K) \times Gal(L_2/K)$$

انتهت المحاضرة.

إعداد: رشيد الحايك البوشي