

نظري

◀ دكتور المادة: علي القوي

◀ المحاضرة الثالثة عشرة عنوان المحاضرة: دراسة المتغيرات العشوائية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

- ١- تعريف المتغير العشوائي .
- ٢- دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل .
- ٣- بعض الملاحظات والأمثلة .

الفصل الثالث : دراسة المتغيرات العشوائية

تعريف المتغير العشوائي :

ليكن (Ω, F, P) فضاء احتمالياً ، إنَّ الدالة $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ تدعى متغيراً عشوائياً إذا حققت الشرط :

$$\forall B \subseteq \mathbb{R} : X^{-1}(B) \in F$$

أي أن الصورة العكسية لأي مجموعة جزئية من \mathbb{R} وفق X هي حدث من F في Ω .

لكل متغير عشوائي مجموعة من القيم نرمز لها بـ \mathbb{R}_X .

ملاحظات

(١) إذا كان فضاء العينة Ω منتهياً أو غير منتهٍ لكنه قابل للعد فنقول عن هذا الفضاء إنه فضاء منقطعاً (منفصلاً) والمتغير العشوائي المولد من هذا الفضاء يدعى متغيراً منقطعاً . ((حجر النرد))

$$\mathbb{R}_X = \{1,2,3,4,5,6\}, \mathbb{R}_X = \{1,2,3, \dots\}$$

(٢) إذا كان فضاء العينة غير منتهٍ وغير قابل للعد فدعوه فضاءً مستمراً (متصل) والمتغير العشوائي المولد من هذا الفضاء يدعى متغيراً عشوائياً مستمراً (متصلاً)

إذا كان X يدل على الرقم الظاهر على حجر النرد فإن $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ (X منقطع)

إذا كان X يدل على عدد مرات رمي الحجر حتى ظهور رقم 6 فإن $X = \{1,2,3, \dots\}$ (X منقطع)

إذا كان يدل X على عمر مصباح فإن [ساعة 0,2000 $X = [0,2000$ (مستمر X)

تذكير ببعض خواص الصورة العكسية

إذا كان $X: E \rightarrow F$ تطبيقاً وكانت المجموعة $B \subseteq F$ فإن :

$$X^{-1}(B) = \{x: x \in E, X(x) \in B\}$$

تدعى الصورة العكسية لـ B وفق X ونرمز لها بـ $[x \in B]$ ، ويكون : $X^{-1}(x) = [x = X]$

مثلاً :

X	-1	1
Ω	H	T

$$[X = -1] = \{w \in \Omega : X(w) = -1\} = H, \quad [X = 0] = \phi$$

$$P[X = -1] \Leftrightarrow P(H) \quad \text{أي أن :}$$

أهم خواص هذه الصورة العكسية :

$$[X \in \cup_i B_i] = \cup_i [X \in B_i] \quad ١)$$

$$[X \in \cap_i B_i] = \cap_i [X \in B_i] \quad ٢)$$

$$[X \in B/A] = [X \in B]/[X \in A] \quad ٣)$$

$$[X \in B'] = [X \in B]' \quad ٤)$$

$$B \subseteq A \Rightarrow [X \in B] \subseteq [X \in A] \quad ٥)$$

$$B \cap \mathbb{R}_X = \emptyset \Rightarrow [X \in B] = \emptyset \quad ٦)$$

دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منفصل

١) دالة الكثافة الاحتمالية : ليكن X متغير عشوائي منفصل مجموعة قيمه $\mathbb{R}_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

إن مجموعة كل الأحداث الابتدائية (الأولية) w من Ω والتي من أجلها يأخذ المتغير العشوائي X القيمة x_i

تشكل حدثاً نرمز له $[X = x_i]$ ونرمز لاحتمال الحدث بـ $P[X = x_i]$ حيث :

$$[X = x_i] = \{w; w \in \Omega, X(w) = x_i\}$$

عندئذ الدالة : $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ والتي من أجلها يكون : $f_X(x_i) = P[X = x_i]$ حيث :
 $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ تدعى الدالة الاحتمالية لـ x ، أو دالة الكثافة الاحتمالية لـ x وهي تحقق شرطين :

$$1 - \forall x_i \in \mathbb{R}_X : f_X(x_i) \geq 0 ; i = 1, 2, 3, \dots$$

$$2 - \sum_{i \geq 1} f_X(x_i) = \sum_{x_0 \in \mathbb{R}_X} f_X(x_0) = 1$$

وتوصف الدالة بالجدول :

X	x_1	x_2	...	x_n	...	المجموع
$f_X(x_i)$	$f_X(x_1)$	$f_X(x_2)$...	$f_X(x_n)$...	1

مثال في تجربة إلقاء ثلاث قطع نقدية ، وليكن X المتغير الدال على عدد الصور الحاصلة ، عين Ω ومجموعة قيم X ودالة الكثافة الاحتمالية لـ x ؟

الحل

فضاء العينة لهذه التجربة هو :

$$\Omega = \{TTT, TTH, HTT, THT, THH, HTH, HHT, HHH\}$$

حيث نلاحظ أن : $|\Omega| = 2^3 = 8$ ، ومجموعة قيم X هي : $\mathbb{R}_X = \{0, 1, 2, 3\}$

وتكون دالة الكثافة لـ X توصف بالجدول :

X	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$	المجموع
$f_X(x_i) = P[X = x_i]$	$P[X = 0]$ $= f_X(0) = \frac{1}{8}$	$P[X = 1]$ $= f_X(1) = \frac{3}{8}$	$P[X = 2]$ $= f_X(2) = \frac{3}{8}$	$P[X = 3]$ $= f_X(3) = \frac{1}{8}$	$\frac{8}{8} = 1$

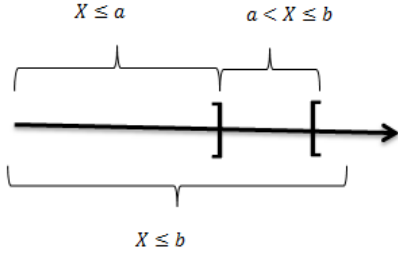
$$P[X = 0] = P(\{TTT\}) = \frac{1}{8} , P[X = 1] = P(\{TTH, HTT, THT\}) = \frac{3}{8}$$

$$P[X = 2] = P(\{THH, HTH, HHT\}) = \frac{3}{8} , P[X = 3] = P(\{HHH\}) = \frac{1}{8}$$

٢) دالة التوزيع الاحتمالي : ليكن X متغيراً منقطعاً معرفاً على (Ω, F, P) ، إن الدالة المعرفة بالشكل :

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} , \quad \forall x \in \mathbb{R} : F_X(x) = P(X \leq x)$$

تسمى بدالة التوزيع الاحتمالي F_X ، للمتغير العشوائي X ، وتكن فائدة دالة التوزيع الاحتمالي في إمكانية حساب الاحتمالات لـ X التي لها الشكل :



$$P(a < X \leq b) = P([X \leq b] / [X \leq a])$$

حيث : أعداد حقيقية a, b

$$[X \leq a] \subseteq [X \leq b]$$

$$\Rightarrow P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية لـ X فإنّ ، دالة التوزيع الاحتمالي لـ X تحسب من العلاقة :

حالة X منقطع

$$\forall x \in \mathbb{R} ; F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i)$$

وبالتالي من أجل $\mathbb{R}_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ فإنّ :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < x_1 \\ f(x_1) & ; x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & ; x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) & ; x_{n-1} \leq x < x_n \\ \sum_{i=1}^n f(x_i) = 1 & ; x_n \leq x \end{cases}$$

في المثال السابق نجد أنّ :

مثال

$$= \begin{cases} 0 & ; x < x_1 = 0 \\ f(x_1) = f(0) = \frac{1}{8} & ; 0 \leq x < x_2 = 1 \\ f(x_1) + f(x_2) = f(0) + f(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} & ; 1 \leq x < x_3 = 2 \\ f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} & ; 2 \leq x < x_4 = 3 \\ \text{مجموع الكل} = 1 & ; 3 \leq x \end{cases}$$

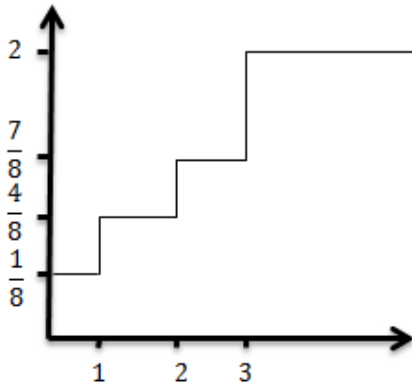
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{1}{8} & ; 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & ; 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & ; 2 \leq x < 3 \\ 1 & ; 3 \leq x \end{cases}$$

ويكون مثلاً :

$$F(2,5) = P(X \leq 2,5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

ويكون لهذه الدالة F_X الشكل الدرجي التالي :



مثال ليكن X متغيراً عشوائياً منقطعاً (منفصلاً) دالة كثافته

الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{8}{15} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x & ; x = 0, 1, 2, 3 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

والمطلوب ، عيّن جدول الكثافة الاحتمالية لـ X ، ودالة التوزيع الاحتمالي $F_X(x)$ واحسب $F(2,5)$.

الحل

إنّ جدول الكثافة لـ X له الشكل :

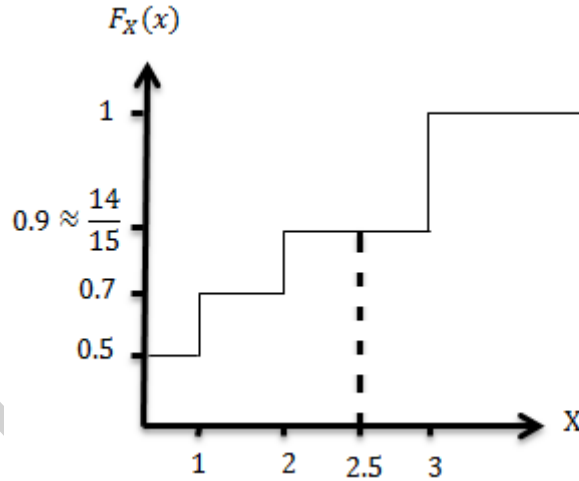
X	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$	المجموع
$F_X(x)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

نلاحظ أنّ : $\sum_{i=1}^4 f_X(x_i) = 1$ فتكون دالة التوزيع الاحتمالي لـ X لها الشكل :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ f(x_1) = f(0) = \frac{8}{15} & ; 0 \leq x < 1 \\ f(0) + f(1) = \frac{8}{15} + \frac{4}{15} = \frac{12}{15} & ; 1 \leq x < 2 \\ f(0) + f(1) + f(2) = \frac{14}{15} & ; 2 \leq x < 3 \\ f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 & ; 3 \leq x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(2.5) &= P(X \leq 2.5) = \frac{14}{15} = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{8}{15} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{14}{15} \end{aligned}$$

بهذه الدالة الشكل البياني الدرجي التالي :



انتهت المحاضرة

إعداد: خديجة الرفاعي - ولاء المبخ - هي حبيبة
١٠٢٥ - ١٠٢٥

لن تحصل على غد أفضل ما
دمت تفكر بالأمس ...