◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة العشرون　　　عنوان المحاضرة: التوقع والانحراف والتباين

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-التوقع الرياضي للأشعة العشوائية.

٢-التباين والانحراف المعياري وخواصهما.

٣- التغاير وخواصه .

التوقع الرياضي للأشعة العشوائية:

ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً ، كثافته الاحتمالية $f_{X,Y}(x, y)$ عندئذٍ نعرف ما يلي :

أ)توقع X:

١) في الحالة الانقطاع :

$$\mu_X = E(X) = \sum_x \sum_y x f_{X,Y}(x, y) = \sum_x x f_X(x)$$

٢) في حالة الاستمرار:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y)\, dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

(ب) توقع Y :

١) في حالة الانقطاع :

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_x \sum_y y f_{X,Y}(x, y) = \sum_y y f_X(x)$$

٢) في حالة الاستمرار:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\,dy$$

(ج) توقع X,Y :

١) في حالة الانقطاع : $\sum_x \sum_y x.yf(x,y) = \sum_y yf_X(x)$

((هنا لن نستطيع حساب دالة الكثافة الهامشية لأنه متعلق ب Y,X))

٢) في حالة الاستمرار :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.yf(x,y)\,dxdy$$

(د) توقع $g(x,y)$ ((دالة بمتغير)):

$$\mu\big(g(x,y)\big) = E\big(g(x,y)\big) =$$

١) في حالة الانقطاع :

$$\sum_x \sum_y g(x,y) f_{X,Y}(x,y)$$

٢) في حالة الاستمرار :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y).yf(x,y)\,dxdy$$

مبرهنة : سؤال دورة :

ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً ، عندئذٍ إذا كان Y,X مستقلين عشوائياً فإن :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{E}(X).\mathrm{E}(\mathrm{Y})$$

الإثبات :

سنكتفي بحالة الاستمرار :

إذا كانت (X,Y) شعاعاً عشوائياً مستمراً كثافته الاحتمالية المشتركة $f(x,y)$ فإن :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X.Y}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.y.f(x,y)\,dxdy$$

وبما أن X,Y متغيرين عشوائيين مستقلين :

$$f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X.Y}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x.yf_X(x).f_Y(y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)\,dx \,.\, \int_{-\infty}^{+\infty} y.f_Y(y)\,dy$$

التباين والانحراف المعياري وخواصهما

تعريف ليكن Y متغيراً عشوائياً له عزماً من المرتبة الثانية (أي أنَّ : $E|Y|^2 < +\infty$)

فإننا نعرف تباين المتغير العشوائي Y بـ :

$$\sigma_{\mathrm{Y}}^2 = Var(Y) = V(Y) = E\big(Y - E(Y)\big)^2$$

ومن أجل $E(Y) = \mu$ ، فإنّه : $V(Y) = E(Y-\mu)^2$

و هو العزم المركزي من المرتبة حول µ و هو يمثل متوسط مربعات انحراف القياسات عن متوسطها .

تعريف نعرف الانحراف المعياري لـ Y بأنَّه الجذر الموجب لتباين Y :

$$\sigma_{\mathrm{Y}} := \sqrt{V(Y)}$$

الصيغة المختزلة للتباين $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = E(Y^2) - \mu^2$

◀ **البرهان** من التعريف نكتب :

$$V(Y) = E(Y-\mu)^2 = E(Y^2 - 2\mu.Y + \mu^2) = E(Y^2) - 2\mu.E(Y) + \mu^2$$

$$\Rightarrow V(Y) = E(Y^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \Rightarrow V(Y) = E(Y^2) - \mu^2$$

μ^2 لا نأخذ له توقع لأنه ثابت .

◀ **ملاحظة** التوقع والتباين والانحراف المعياري بمتغير عشوائي أو لدالة فيه هي مقادير ثابتة

$E(X) =$ ثابت ; $E(g(X)) =$ ثابت ، التباين والانحراف المعياري مقادير موجبة .

خواص التباين

١) $\boldsymbol{V(C) = 0 \; ; \; \forall C \in \mathbb{R}}$

الإثبات $V(C) = E(C^2) - \left(E(C)\right)^2 = C^2 - C^2 = 0$

٢) $V(C.Y) = E(C.Y)^2 - \left(E(C.Y)\right)^2 = C^2.E(Y)^2 - \left(C.E(Y)\right)^2$

$$C^2\left[E(Y)^2 - \left(E(Y)\right)^2\right] = C^2.V(Y)$$

نتيجة $\sigma_{C.Y} = \sqrt{V(C.Y}\ = \sqrt{C^2.V(Y)} = |C|.\sqrt{V(Y)} = |C|\sigma_Y$

٣) $\boldsymbol{V(aY+b) = a^2.V(Y) \; ; \; \forall a,b \in \mathbb{R}}$

الإثبات $V(aY+b) = E(aY+b)^2 - \left(E(aY+b)\right)^2$

$$V(aY+b) = E(a^2Y^2 + 2abY + b^2) - \left(a^2\left(E(Y)\right)^2 + 2abE(Y) + b^2\right)$$

$$= a^2E(Y^2) + 2abE(Y) + b^2 - a^2\left(E(Y)\right)^2 - 2abE(Y) - b^2$$

$$\Rightarrow V(aY+b) = a^2E(Y^2) - a^2\left(E(Y)\right)^2 = a^2\left[E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2\right] = a^2V(Y)$$

٤) $\boldsymbol{V(Y) \le E(Y-a)^2 \; ; \; \forall a \in \mathbb{R}}$

الإثبات $(Y-a)^2 = \left(\left(Y - E(Y)\right) + E(Y) - a\right)^2$

$$= \left(Y - E(Y)\right)^2 + (E(Y) - a)^2 + 2\left(Y - E(Y)\right)\left(E(Y) - a\right)$$

$$\Rightarrow E(Y - a)^2 = E(Y - E)^2 + E(E(Y) - a)^2 + E(2(Y - E(Y).E(Y) - a)$$

حيث أنَّ :

$$E(2(Y - E(Y).(E(Y) - a) = 2(E(Y) - a).\left(E\left(Y - E(Y)\right)\right)$$

$$= 2(E(Y) - a).\left(E(Y) - E\left(E(Y)\right)\right) = \text{ثابت}.\left(E(Y) - E(Y)\right) = 0$$

$$\Rightarrow E(Y - a)^2 = V(Y) + E(E(Y) - a)^2 \Rightarrow E(Y - a)^2 \geq V(Y)$$

تعريف المتغير العشوائي المعياري

ليكن X متغيراً عشوائياً توقعه μ ، وتباينه $V(X) = \sigma^2$ ، عندئذٍ نسمّي المتغير التالي :

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

متغيراً عشوائياً معيارياً ، ويكون توقعه صفراً $E(Z) = 0$ ، وتباينه واحد $V(Z) = 1$

◄ **البرهان** $E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}.E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma}.(\mu - \mu) = 0$

$$V(Z) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}.V(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2}.[V(X) - V(\mu)] = \frac{1}{\sigma^2}.[\sigma^2 - 0] = 1$$

التغاير وخواصه

تعريف ليكن X و Y متغيرين عشوائيين لكل منهما توقع منتهٍ ، وللجداء $(X.Y)$ توقع منتهٍ ، عندئذٍ :

نعرف التغاير بين X و Y بـ :

$$cov(X,Y) = E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right] = \sigma_{X.Y}$$

الصيغة المختزلة لحساب التغاير

$$cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

◀ **البرهان** من التعريف لدينا : $cov(X,Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big]$

$$= E[X.Y + E(X)E(Y) - Y.E(X) - X.E(Y)]$$

وحيث إنَّ التوقع الرياضي للمتغير مقدار ثابت

$$\Rightarrow cov(X,Y) = E(X.Y) + E(X).E(Y) - E(X).E(Y) - E(X).E(Y)$$

$$\Rightarrow cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

حيث $E(X.Y)$ ، يعطى (تعريفاً) بـ :

$$E(X.Y) = \begin{cases} \sum_x \sum_y x.y.f(x,y) \ ; \text{منقطع } (X,Y) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x.y.f(x,y).dx.dy \ ; \text{مستمر } (X,Y) \end{cases}$$

◀ **نتيجة** إذا كان X و Y مستقلين عشوائياً فإنَّ : $cov(X,Y) = 0$

لأنَّ : $cov(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$

وبسبب الاستقلال $\Leftarrow$ $cov(X,Y) = E(X).E(Y) - E(X).E(Y) = 0$

♥ **ملاحظة** ورد إثبات هذه النتيجة في دورة سابقة ولكن مع إثبات استقلال X,Y ، أي في حال ورد كسؤال امتحاني نثبت أولاً استقلال X,Y ، ثمّ نثبت $cov(X,Y) = 0$.

مبرهنة

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2cov(X,Y)$$

الإثبات حسب العلاقة المختزلة لحساب التباين :

$$V(X \pm Y) = E(X \pm Y)^2 - \big(E(X \pm Y)\big)^2$$

$$= E[X^2 + Y^2 \pm 2XY] - [(EX)^2 + (EY)^2 \pm 2EX.EY]$$

$$= EX^2 + EY^2 \pm 2EXY - (EX)^2 - (EY)^2 \pm 2EX.EY$$

$$= EX^2 - (EX)^2 + EY^2 - (EY)^2 \pm 2(E(X.Y) - EX.EY)$$

$$= V(X) + V(Y) \pm 2cov(X,Y)$$

◄ **نتيجة هامة** إذا كان X,Y مستقلين عشوائياً فإنَّ :

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

البرهان

بما أنَّ X,Y مستقلين عشوائياً فإنَّ $cov(X,Y) = 0$ وحسب المبرهنة السابقة فإنَّ :

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

◄ **ملاحظة** $cov(X,X) = V(X)$

$$cov(X,X) = E(X.X) - E(X).E(X) = E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$$

♥ **نتيجة** $cov(a.X + b\,, c.Y + d) = a.c.cov(X,Y)$

البرهان (هام)

$$cov(a.X + b\,, c.Y + d) = E[(a.X + b)(c.Y + d)] - E(a.X + b).E(c.Y + d)$$

$$= E[ac.XY + cb.Y + ad.X + bd] - [a.c.E(X).E(Y) + ad.E(X) + bc.E(Y) + bd]$$

$$= ac.E(X.Y) + c.b.E(Y) + a.d.E(X) + bd - ac.E(X).E(Y) - ad.E(X) - bcE(Y) - bd$$

$$= ac.[E(X.Y) - E(X).E(Y)] = ac.cov(X,Y)$$

$$\Rightarrow cov(a.X + b\,, c.Y + d) = a.c.cov(X,Y)$$

انتهت المحاضرة

إعداد: خديجة الرفاعي – ولاء المبخر – نهى حبشية