المحاضرة الثامنة عشر والتاسعة عشر

◄ دكتور المادة: شوقي الراشد

◄ عنوان المحاضرة: التموضع

نظري ☑
عملي ☐

نتيجة: إذا كانت $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\alpha} M'' \to 0$

متتالية تامة من التطبيقات R-linears

القضايا التالية متكافئة

1) المتتالية منشطرة $\exists \psi : M'' \to M : \psi \circ \alpha = id_{M}$

2) $\exists j : M \to M' : j \circ i = id_{M'}$

حيث $M \cong M' \oplus M''$

البرهان $(1) \Longrightarrow (2)$

لنعرف المخطط

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M' & \to & M' \oplus M'' & \to & M'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow id_{M'} & & \downarrow i \oplus \psi & & \downarrow id_{M''} & & \\
0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0
\end{array}$$

حيث $i \oplus \psi : M' \oplus M'' \to M$

$(m', m'') \to i(m') + \psi(m'')$

وحسب Special Snak's Lemma يكون $i \oplus \psi$ تقابل ومنه

$M \cong M' \oplus M''$

$j = Pr_{M'} \circ (i \oplus \psi)^{-1} : M \to M' \oplus M'' \to M'$

يحقق $j \circ i = id_{M'}$

لنفرض $1 \Rightarrow 2$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "id_{M'}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "j\oplus\alpha"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "id_{M''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M'\oplus M'' \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

حيث $j\oplus\alpha : M \to M'\oplus M''$

$m \to (j(m), \alpha(m))$

وحسب special-5-lemma فإن $j\oplus\alpha$ تقابل

$\exists \psi = (j\oplus\alpha)^{-1}|_{M''} : M'' \subset M'\oplus M'' \to M$

$\psi \circ \alpha = id_M$

ومنه تم المطلوب

الفصل الثاني: التوطين Localization

تعريف: لتكن R حلقة واحدية تبديلية $\phi \neq S \subseteq R$

- نقول S مغلقة ضربياً في R إذا:

$1 \in S,\ s_1, s_2 \in S : s_1 s_2 \in S$

- لتكن S مجموعة مغلقة ضربياً في R نعرف العلاقة ~ على $R \times S$ بالشكل

$(r,s),(r',s') \in R\times S : (r,s)\sim(r',s')$

$\Leftrightarrow \exists u \in S : u(rs'-r's)=0$

إن هذه العلاقة علاقة تكافؤ

$\exists 1 = u \in S : 1(rs-rs)=0 \Rightarrow (r,s)\sim(r,s)$

ومنه العلاقة انعكاسية

$(r,s)\sim(r',s') \Leftrightarrow \exists u\in S : u(rs'-r's)=0$

$\Leftrightarrow \exists u \in S : u(r's-rs')=0 \Leftrightarrow (r',s')\sim(r,s)$

ومنه العلاقة تناظرية

$(r,s)\sim(r',s') \Leftrightarrow \exists u\in S : u(rs'-r's)=0$

$(r',s')\sim(r'',s'') \Leftrightarrow \exists v \in S : v(r's''-r''s')=0$

$\Rightarrow uvs''(rs'-r's)+uvs(r's''-r''s')=0$

$\Rightarrow uvs''rs'-uvs''r's+uvsr's''-uvsr''s'=0$

$\Rightarrow \underbrace{uvs'}_{\in S}(rs''-r''s)=0 \Rightarrow (r,s)\sim(r'',s'')$

نرمز لصف التكافؤ (r,s) بالرمز $\frac{r}{s}$ ولمجموعة كل صفوف التكافؤ بالرمز $S^{-1}R$
نعرف قانوني تشكيل على $S^{-1}R$

$(+): S^{-1}R\times S^{-1}R \to S^{-1}R$

$\left(\frac{r}{s},\frac{r'}{s'}\right) \longrightarrow \frac{r}{s}+\frac{r'}{s'}=\frac{rs'+r's}{ss'}$

$(\cdot): S^{-1}R\times S^{-1}R \to S^{-1}R$

$\left(\frac{r}{s},\frac{r'}{s'}\right) \longrightarrow \frac{r}{s}\cdot\frac{r'}{s'}=\frac{rr'}{ss'}$

عندئذ تكون $(S^{-1}R,+,\cdot)$ حلقة تبديلية واحدية وواحدها $1=\frac{1}{1}=\frac{s}{s}$
تسمى حلقة التعويض للحلقة R عند S

ملاحظة ①: التمديد الطبيعي natural Extension

$\pi: R \to S^{-1}R$

$\forall r\in R: \pi(r)=\frac{r}{1}$

① - بين فيما إذا كان π متباين
- إذا كانت R لا تحوي قواسم الصفر فإن π متباين

② $I^e=\langle \pi(I)\rangle \trianglelefteq S^{-1}R,\ I\trianglelefteq R$

تمديد المثالي I في $S^{-1}R$

③ $S^{-1}I=S^{-1}R \Leftrightarrow I\cap S\neq\phi;\ I\trianglelefteq R$

برهان رقم ③: لنفرض أن $I\cap S \neq \emptyset$ ومنه

$\exists x \in I\cap S \Rightarrow x \in I \vee x \in S$

$\pi(x) = \frac{x}{1} \in S^{-1}I \ , \ \frac{1}{x} \in S^{-1}R$

$\Rightarrow \frac{x}{1} \in U(S^{-1}(R)) \Rightarrow S^{-1}I = S^{-1}R$

لنفرض أن $S^{-1}R = S^{-1}I \Leftarrow$

$\Rightarrow \exists \frac{r}{s} \in S^{-1}I : \frac{r}{s} = \frac{1}{1}$

$\Rightarrow \exists u \in S : u(r-s) = 0$

$\underset{\in I}{ui} = \underset{\in S}{us} \in I\cap S$

$\Rightarrow I\cap S \neq \emptyset$

أمثلة: 1) $R = \mathbb{Z}$ ، $S = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ فإن $Q = S^{-1}R$

2) R ID ، $S = R\setminus\{0\}$ فإن

$S^{-1}R = Qout(R) = \{\frac{a}{b} : a,b \in R, b \neq 0\}$

3) $0 \neq f \in R$

$S = \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$

$S^{-1}R = \{\frac{r}{f^n} : r \in R, n \in \mathbb{N}\} = R_f$

حلقة تموضع الحلقة R عند f.

مثال $\mathbb{Z}_2 = \{\frac{r}{2^n} : n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}\}$

4) $S = R\setminus P$ ، $P \in Spec(R)$

$S^{-1}R = \{\frac{r}{s} : r \in R, s \in S'\} = R_p$

مثال: $R = \mathbb{Z}$ ، $P = \langle 3 \rangle$ ⟸ $\mathbb{Z}_{\langle 3\rangle} = \{\frac{r}{s} : r \in R ; 3 \nmid s\}$

تمرينات:

1) $Z_{(p)} \cap Z_p = Z$

2) $S = R/P$ منغلقة ضربياً $\Leftrightarrow$ $P \in Spec(R)$

3) $S^{-1}R = \{0\} \Leftrightarrow 0 \in S$

برهان ③

حسب $I \cap S = \phi \Leftrightarrow S^{-1}I = S^{-1}R$

من أجل $\Leftarrow$ نعوض I و $0 \in S \Rightarrow I \cap S \neq \phi$ ومنه

$S^{-1}R = S^{-1}I = \{0\}$

مبرهنة: لتكن R حلقة واحدية وتبديلية: $P \in Spec(R)$ فإن (R_p, η) حلقة محلية حيث $\eta = P \cdot R_p$

$= \{\frac{a}{b} : a \in P , b \notin P\}$

البرهان: نريد إثبات أن $\eta = R_p \setminus U(R_p)$

لدينا $P \cap (R \setminus P) = \phi$

$\eta = S^{-1}P = P R_p \neq R_p$

$\Rightarrow \eta \subseteq R_p \setminus U(R_p)$

ليكن $\frac{a}{b} \in R_p \setminus U(R_p)$: $a \in R, b \notin P$

$\Rightarrow \frac{a}{b} \in \eta \Rightarrow R_p \setminus U(R_p) \subset \eta$

ومنه المساواة محققة

حيث لو فرضنا جدلاً أن $a \notin P$: $\frac{b}{a} \in R_p$

$\Rightarrow \frac{a}{b} \in U(R)$

وهذا يناقض الفرض لأن $\frac{a}{b} \notin U(R)$

مثال: $R=\mathbb{Z}$, $P=\langle 3\rangle \trianglelefteq R$

الحلقة $(\mathbb{Z}_{\langle 3\rangle}, \eta)$ محلية

$$\eta=\{\frac{a}{b} : 3 \mid a \,,\, 3 \nmid b\}$$

المحاضرة التاسعة عشر

التوطين عند المودولات:

تعريف: لتكن R حلقة واحدية تبديلية و $S \subseteq R$ مغلقة ضربياً في R و M هو R-modul نعرف علاقة التكافؤ $\sim$ على $M \times S$ بالشكل

$$(m_1,s_1),(m_2,s_2)\in M\times S$$

$$(m_1,s_1)\sim(m_2,s_2) \Leftrightarrow \exists u\in S : u(m_1 s_2 - m_2 s_1)=0$$

نرمز لمجموعة كل صفوف التكافؤ بالرمز $S^{-1}M$ نعرف قانوني تشكيل

$$(+) : S^{-1}M \times S^{-1}M \Rightarrow S^{-1}M$$

$$\left(\frac{m_1}{s_1}, \frac{m_2}{s_2}\right) \longmapsto \frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} = \frac{m_1 s_2 + s_1 m_2}{s_1 \cdot s_2}$$

$$(\cdot) : S^{-1}R \times S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}M$$

$$\left(\frac{r}{s}, \frac{m}{t}\right) \longmapsto \frac{r}{s}\cdot\frac{m}{t} = \frac{r\cdot m}{s\cdot t}$$

عندئذ: $(S^{-1}M,+,\cdot)$ هو $S^{-1}R$-modul

تعريف: اذا كان $\alpha \in Hom(M,N)$ هو R-linear فإن:

$$S^{-1}\alpha : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$$

$$\forall \frac{m}{s} \in S^{-1}M : S^{-1}\alpha\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{\alpha(m)}{s}$$

$S^{-1}\alpha$ هو $S^{-1}R$-linear

★ من أجل $\alpha : M \to N$, $\varphi : N \to P$ R-linear

$$S^{-1}(\varphi \circ \alpha) = S^{-1}\varphi \circ S^{-1}\alpha$$

نتيجة: إذا كانت المتتالية $M \xrightarrow{\psi} N \xrightarrow{\alpha} P$ في R-linear تامة

و $S \subseteq R$ مغلقة ضربياً فإن $S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}\alpha} S^{-1}P$ تامة

الإثبات: لنثبت أن $Im\, S^{-1}\psi = \ker S^{-1}\alpha$

$$S^{-1}\alpha \circ S^{-1}\psi = S^{-1}(\alpha \circ \psi) = S^{-1}(0) = 0$$

$$\Rightarrow Im\, S^{-1}\psi \subseteq \ker S^{-1}\alpha$$

$$\forall \frac{n}{s} \in \ker S^{-1}\alpha : \quad 0 = S^{-1}\alpha\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{\alpha(n)}{s}$$

$$\Rightarrow \exists u \in S : \quad u\alpha(n) = 0 \Rightarrow \alpha(un) = 0$$

$$\Rightarrow un \in \ker\alpha = Im\,\psi \Rightarrow \exists m \in M : \psi(m) = un$$

$$\frac{n}{s} = \frac{un}{us} = \frac{\psi(m)}{us} = S^{-1}\psi\left(\frac{m}{us}\right) \in Im\, S^{-1}\psi$$

$$\Rightarrow \ker S^{-1}\alpha \subseteq Im\, S^{-1}\psi$$

$$\Rightarrow \ker S^{-1}\alpha = Im\, S^{-1}\psi$$

مبرهنة: لتكن R حلقة واحدية تبديلية و $S \subseteq R$ مغلقة ضربياً و M, M' R-modul

و $N, N' \leq M$; $\alpha \in Hom(M, M')$ فإن القضايا التالية صحيحة:

1) $S^{-1}(N+N') = S^{-1}N + S^{-1}N$

2) $S^{-1}(N \cap N') = S^{-1}N \cap S^{-1}N'$

3) $S^{-1}\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{S^{-1}M}{S^{-1}N}$

4)
- $S^{-1}\ker\alpha = \ker S^{-1}\alpha$
- $S^{-1}coker\,\alpha = coker\, S^{-1}\alpha$

البرهان:

11) $\forall \frac{m}{s} \in S^{-1}(N+N') : m \in N+N' , s \in S^{-1}$

$\exists n \in N , n' \in N' : m = n + n'$

$\frac{m}{s} = \frac{n+n'}{s} = \frac{n}{s} + \frac{n'}{s} \in S^{-1}N + S^{-1}N'$

$\Rightarrow S^{-1}(N+N') \subseteq S^{-1}N + S^{-1}N$

$\forall \frac{m}{s} \in S^{-1}N + S^{-1}N' \Rightarrow \exists \frac{n}{t} \in S^{-1}N , \frac{n'}{t'} \in S^{-1}N' \wedge$

$\frac{m}{s} = \frac{n}{t} + \frac{n'}{t'} = \frac{nt' + tn'}{tt'} \in S^{-1}(N+N')$

$\Rightarrow$ بما أنه تم الاحتواءين فإن المساواة صحيحة

12) $\forall \frac{m}{s} \in S^{-1}(N \cap N') ; m \in N \cap N' , s \in S$

$\forall \frac{m}{s} \in S^{-1}N , \frac{m}{s} \in S^{-1}N' \Rightarrow \frac{m}{s} \in S^{-1}N \cap S^{-1}N'$

$\Rightarrow S^{-1}(N \cap N') \subseteq S^{-1}N \cap S^{-1}N$

$\forall \frac{m}{s} \in S^{-1}N \cap S^{-1}N' \Rightarrow \frac{m}{s} \in S^{-1}N , \frac{m}{s} \in S^{-1}N' \wedge$

$m \in N , m \in N' \Rightarrow m \in N \cap N' \Rightarrow \frac{m}{s} \in S^{-1}(N \cap N')$

$\Rightarrow S^{-1}N \cap S^{-1}N \subseteq S^{-1}(N \cap N')$

ومنه تم المطلوب

3) لدينا من المتتالية التامة $0 \to N \to M \to M/N \to 0$

ومنه نشكل الآتي

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S^{-1}N \arrow[r] \arrow[d] & S^{-1}M \arrow[r] \arrow[d] & S^{-1}\left(\frac{M}{N}\right) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S^{-1}N \arrow[r] & S^{-1}M \arrow[r] & \frac{S^{-1}M}{S^{-1}N} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ينتج حسب Special snake's Lemma بأن $S^{-1}\left(\frac{M}{N}\right) \cong \frac{S^{-1}M}{S^{-1}N}$ ومنه تم المطلوب

4) لنأخذ المتتالية التامة $0 \to \ker\alpha \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\alpha} M' \xrightarrow{j} \operatorname{coker}\alpha \to 0$

$$0 \to S^{-1}\ker\alpha \xrightarrow{S^{-1}i} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\alpha} S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}j} S^{-1}\operatorname{coker}\alpha \to 0$$

تامة حسب نتيجة سابقة

$$\star \quad S^{-1}\ker\alpha = S^{-1}\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}S^{-1}\alpha = \ker S^{-1}\alpha$$

$$\star \quad \operatorname{coker}S^{-1}\alpha = \frac{S^{-1}M'}{\operatorname{Im}S^{-1}\alpha} = \frac{S^{-1}M'}{\ker S^{-1}j} = S^{-1}\left(\frac{M'}{\operatorname{Im}\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{S^{-1}M'}{S^{-1}\ker j} = S^{-1}\left(\frac{M'}{\ker j}\right)$$

$$\Rightarrow S^{-1}\left(\frac{M'}{\operatorname{Im}\alpha}\right) = S^{-1}(\operatorname{coker}\alpha)$$

تمرين: $S^{-1}(N \cap N') = S^{-1}N \cap S^{-1}N'$

بين فيما إذا كان التوضيع توزيعي بالنسبة لتقاطع المودولات، وذلك من أجل التقاطع المنتهي (أما إذا كان غير منتهي فإنه غير صحيح بالعموم)

تعريف: نقول عن خاصة (صفة) للمودول M (R-module M) إنها محلية إذا:

$\forall P \in Spec(R),\ M_P$ تحقق هذه الصفة

نتيجة: ليكن M مودولاً على R القضايا التالية متكافئة

1) $M = \{0\}$

2) $\forall P \in Spec(R):\ M_P = \{0\}$

3) $\forall \mathfrak{m} \in M\text{-}Spec(R):\ M_\mathfrak{m} = \{0\}$

البرهان: $1 \Rightarrow 2$: $\forall P \in Spec(R):\ S = R/P$

$$\Rightarrow S^{-1}M = M_P$$

$$= \{0\} = M = S^{-1}0 = M_P$$

$2 \Rightarrow 3$ واضح لأن في الحلقة المحلية الواحدة كل أعظمي هو أولي فإذن يتم المطلوب

3 ⇐ 1: لنفرض جدلاً أن المودول M ليس صفري ومنه يوجد $0 \neq m \in M$

وبالتالي $Ann(M) \subsetneq R$ ومنه $\exists \eta \triangleleft R, Ann(M) \subseteq \eta$

وبالتالي $R \setminus \eta \subseteq R \setminus Ann(M)$

وبالتالي $\forall u \in R \setminus \eta \subseteq R \setminus Ann(M)$

$\Rightarrow u.m \neq 0 \Rightarrow 0 \neq \frac{m}{1} \in M_\eta$

وهذا يناقض كون $\forall \eta \in \eta\text{-}Spec(R)$ أن: $M_\eta = \{0\}$ ومنه الفرض الجدلي خاطئ و $M = \{0\}$

هـ

نتيجة: ليكن $\alpha \in Hom(M, N)$ هو R-linear العبارات التالية متكافئة

1) α متباين (غامر)

2) α_p متباين (غامر) $\forall p \in Spec(R)$

3) α_η " " $\forall \eta \in \eta\text{-}Spec(R)$

البرهان: 1 ⇐ 2 ، 3: α_p, α_η متباين $\Leftrightarrow \ker S^{-1}\alpha = \ker \alpha_p = \{0\}$

α متباين $\Leftrightarrow \ker \alpha = \{0\} \Leftrightarrow S^{-1}\ker\alpha = \{0\}$

البرهان 3 الشرط [illegible] "[illegible]"

α_p, α_η غامر $\Leftrightarrow coker\,\alpha_\eta = coker\,\alpha_p = \{0\}$

$coker\, S^{-1}\alpha = \{0\} \Leftrightarrow S^{-1} coker\,\alpha = \{0\}$

α غامر $\Leftrightarrow coker\,\alpha = \{0\} \Leftrightarrow$

انتهت المحاضرة

اعداد وتقديم

Ahmad Abo Al zot

المحاضرة 20+21+22 والأخيرة

دكتور المادة: شوقي الراشد

عنوان المحاضرة: السلاسل

نظري ☐ عملي ☐

تعريف: لتكن R ، M و R-module

1) M يحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_i \subseteq \dots$

$\exists n \in \mathbb{N} : \forall i \geq n : M_i = M_n$

2) M هو نوثري إذا حقق الشرط انقطاع السلاسل المتزايدة.

3) M تحقق الشرط انقطاع السلاسل المتناقصة $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_i \supseteq \dots$

$\exists n \in \mathbb{N} : \forall i \geq n : M_i = M_n$

4) M هو ارتيني إذا حقق الشرط انقطاع السلاسل المتناقصة

مبرهنة: ليكن M هو R-module القضايا التالية متكافئة:

1) M نوثري

2) أي موديل جزئي في M منتهي التوليد على R

الاثبات وظيفة

مبرهنة: لتكن $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ متتالية تامة من R-linears

1) M نوثري $\Longleftrightarrow$ M' و M'' نوثريات.

2) M آرتيني $\Longleftrightarrow$ M' و M'' آرتينيات.

نبرهن 2 فقط

⇐ لتكن

$M' \supseteq M'_1 \supseteq M'_2 \supseteq \dots$

سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية في M' ومنه

$\alpha(M') \supseteq \alpha(M'_1) \supseteq \dots$

سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية في M وكون M آرتيني

فانه يوجد $n \in N$ بحيث $\forall i \geq n$ بحيث $\alpha(M'_i) = \alpha(M'_n)$

نأخذ الصورة العكسية ومنه (α متباين)

$\exists n_1 \in N : \forall i \geq n : M'_i = M'_n$

ومنه M' آرتيني

لتكن

$M'' \supseteq M''_1 \supseteq \dots$

كون β غامر فانه

$\beta^{-1}(M'') \supseteq \beta^{-1}(M''_1) \supseteq \dots$

سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية في M و M ارتيني

$\exists n_2 \in N : \forall i \geq n_2 : \beta^{-1}(M''_{n_2}) = \beta^{-1}(M''_i)$

بأخذ β للطرفين

$\exists n_2 \in N : \forall i \geq n_2 : M''_{n_2} = M''_i$

⇐ M'' آرتيني

⇒ لتكن

$M \supseteq M_1 \supseteq M_2$

سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية في M

$\alpha^{-1}(M) \supseteq \alpha^{-1}(M_1) \supseteq \dots$

وهي سلسلة متناقصة في M' وبما أن M' ارتينية فإن السلسلة تتقطع

$\exists n' \in N : \forall i \geq n' : \alpha^{-1}(M_i) = \alpha^{-1}(M_{n'})$

باستخدام الغمر β

$$\beta(M) \supseteq \beta(M_1) \supseteq \dots$$

وهي سلسلة متناقصة من M'' وبما أن M'' آرتينية فإن السلسلة تنقطع

$$\exists n'' \in \mathbb{N} ; \forall i \geq n'' ; \beta(M_i) = \beta(M_{n''})$$

بأخذ $\max(n', n'') = n$

يكون: $\beta(M_i) = \beta(M_n)$

$\alpha^{-1}(M_i) = \alpha^{-1}(M_n)$

إن $M_i \subseteq M_n$ وذلك لأن $i \geq n$

لنثبت الاحتواء المعاكس

$$\forall m \in M_n ; \beta(m) \in \beta(M_n) = \beta(M_i)$$

$$\Rightarrow \exists \hat{m} \in M_i ; \beta(m) = \beta(\hat{m})$$

$$\Rightarrow m - \hat{m} \in \ker\beta = \operatorname{Im}\alpha$$

$$\Rightarrow \exists m' \in M' ; \alpha(m') = m - \hat{m} \in M_i \cap \operatorname{Im}\alpha$$

وأن $m' \in \alpha^{-1}(M_n) = \alpha^{-1}(M_i)$

ومنه $m = \alpha(m') + \hat{m} \in M_i$

$\qquad \in M_i \qquad \in M_i$

$$\Rightarrow M_n \subseteq M_i \Rightarrow M_i = M_n$$

ومنه M آرتيني

نتيجة: R حلقة واحدية وتبديلية و $M_1, M_2, \dots, M_n$

1) إذا $M_1, \dots, M_n$ نوثرية فإن $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ نوثري

2) إذا كانت R نوثرية و M هو مودول منتهي التوليد فإن M نوثري.

الإثبات: يتم بالاستقراء الرياضي على n لأجل $n=1$ $\oplus M_1 = M_1$

ومنه M نوثري حسب الفرض

لنفرض صحتها لأجل $n-1$ ولنثبت صحتها لأجل n

لتكن المتتالية التامة

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to M_n \to 0$$

وبما أن M_n نوثري وبما أنه حسب مبرهنة سابقة والفرض الاستقرائي

$\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ نوثري فإن $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ نوثري

2) كون M منتهي التوليد وكون R نوثرية فإن $R^n \cong \bigoplus^n R$

ومنه $\exists m_1, \dots, m_n \in M ; M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$

ولنأخذ المتتالية التامة

$$0 \to \ker\alpha \to R^n \to M \to 0$$

$$e_i \to m_i$$

وحسب مبرهنة سابقة M نوثرية.

ليكن: $I \trianglelefteq R$:

1) R نوثرية (آرتينية) ⇐ I و R/I نوثرية (آرتينية)

لأن نعتبر $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ (تامة)

2) إذا كانت $S \subset R$ حلقة جزئية فإن R و R نوثرية (آرتينية)

⇐ $_S R$ نوثرية (آرتينية)

والعكس غير صحيح (وظيفة)

مبرهنة: Krull's Itersection

إذا كانت R نوثرية و M هو R-module منتهي التوليد و $I \subseteq J(R)$, $I \trianglelefteq R$ فإن

$$\bigcap_{k\geq 0} I^k M = \{0\}$$

البرهان: M هو موديول منتهي التوليد و R نوثرية ومن النتيجة السابقة

نجد M نوثري ولكن $\forall k\geq 0 : I^k M \leq M$

$\Leftarrow \quad N = \bigcap I^k M \leq M$

ومن مبرهنة سابقة نجد أن N هو موديول منتهي التوليد

وليتم المطلوب يكفي برهان

$\cancel{I \subseteq J(R)} : IN = N \Rightarrow N = \{0\}$

وذلك حسب مبرهنة Nak الأساسية

من الواضح $IN \subseteq N$ لنثبت الاحتواء المعاكس لنعرف المجموعة

$X = \{L \leq M : L \cap N = IN\}$

$\Rightarrow IN \in X \Rightarrow X \neq \emptyset$

و M نوثري ويوجد عنصر أعظمي في X وليكن L

$\forall a \in I : L : \langle a \rangle \subseteq L : \langle a^2 \rangle \subseteq \cdots$

وهي سلسلة متزايدة من الموديولات الجزئية من M ولكن M نوثري

$\exists k \in N : \forall i \geq k : L : \langle a^i \rangle = L : \langle a^k \rangle$

نريد إثبات أن

$L + a^k M \in X$

$\forall m \in (L + a^k M) \cap N \Rightarrow m \in N , m \in L + a^k M$

$\exists x \in L , y \in M : m = x + a^k y$

$\Rightarrow \underbrace{am}_{\in IN = L\cap N \subseteq L} = \underbrace{ax}_{\in L} + \underbrace{a^{k+1} y}_{\in L} \in L$

$y \in L : \langle a^{k+1} \rangle = L : \langle a^k \rangle$

$IN = L \cap N \subseteq (L + a^k M) \cap N \subseteq IN$

$(L + a^k M) \cap N = IN$

$L \subseteq L + a^k M$

ولكن L عنصر أعظمي أي

$L + a^k M = L \Rightarrow a^k M \subseteq L$

$\Rightarrow I^k M \subseteq L$

$N = \cap I^k M \subseteq I^k M \subseteq L \Rightarrow N = N \cap (I^k M) \subseteq I^k M \cap N \subseteq L \cap N$

$= I.N$

$\Rightarrow N = I N \Rightarrow N = \{0\}$

نتيجة : (R, M) حلقة محلية ونوثرية لأن $\bigcap_{k \geq 0} \eta^k = \{0\}$

لنأخذ $M = R$, $J(R) = \eta$

إن R منتهية التوليد مولدة بـ (1) وحسب مبرهنة ماد :

$\bigcap_{k \geq 0} \eta^k = \bigcap_{k \geq 0} \eta^k R = \bigcap_{k \geq 0} \eta^k M = \{0\}$

مثال : إن ذاتانة $R = (\mathbb{Z}, +, .)$ من مبرهنة سابقة حيث $P = \langle 3 \rangle$

$R_{\langle 3 \rangle} = \{\frac{a}{b} : a, b \in R , 3 \nmid b\}$

$\eta = P R_P = \{\frac{x}{y} : 3 \mid x , 3 \nmid y\}$

(R_P, η) حلقة محلية نوثرية عندئذ $\bigcap_{k \geq 0} \eta^k = \{0\}$

تعريف : لتكن R حلقة واحدية تبديلية و $I \Delta R$ قابل للعدم (nilepotent)
إذا تحقق $\exists n \in \mathbb{N}$ بحيث $I^n = \{0\}$.

نتيجة: R نوثرية بان $N(R)$ مثالي العدم.

البرهان: $R \trianglelefteq N(R) \Leftarrow$ ومنه $N(R)$ منتهي التوليد على R

$\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in R : N(R) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

لكن

$$\sqrt{0} = \bigcap_{P \in Spec(R)} P$$

ومن جهة أخرى تقاطع كل المثاليات هو $N(R) \Leftarrow \bigcap_{P \in Spec(R)} P = N(R)$

$$\Rightarrow \sqrt{0} = N(R)$$

$\forall i \in \{1, \dots, m\} : a_i \in N(R)$ نكون

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} : a_i \in N(R) = \sqrt{0}$$

$$\Rightarrow \exists n_i \in N : a_i^{n_i} = 0$$

$$\Rightarrow n = \max(n_1, \dots, n_k)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} : a_i^n = 0$$

$$\Rightarrow N^n(R) = \{0\}$$

المحاضرة 2 :

تعريف: R حلقة واحدية وتبديلية نعول عن العدد

$$\dim(R) = \sup\{n ; P_0 \subsetneq P_1 \dots \subsetneq P_n ; P_i \in Spec(R)\}$$

حيث n عدد صحيح بالبعد.

أمثلة:

1) إذا كانت R حقل بان $\dim(R) = 0$

2) // // R و IP وليست حقل بان $\dim(R) = 1$

مبرهنة: إذا كانت R ارتينية بان $\dim(R) = 0$

الإثبات: ليكن $P \in Spec(R)$ بان R/P ارتينية و ID

$\forall\, 0 \neq \bar{a} \in R/P$

$\langle \bar{a} \rangle \supseteq \langle \bar{a}^2 \rangle \supseteq \dots$

وهي سلسلة متناقصة من المثاليات في R

ومنه $\exists k \in N : \forall i \geq k : \langle \bar{a}^k \rangle = \langle \bar{a}^i \rangle$

$\bar{a}^k \in \langle \bar{a}^k \rangle = \langle \bar{a}^{k+1} \rangle$

$\Rightarrow \exists \bar{b} \in R/P : \bar{a}^k = \bar{b}\, \bar{a}^{k+1}$

$\Rightarrow \bar{1} = \bar{b}.\bar{a} \Rightarrow \bar{a} \in U(R/P)$

ومنه R/P حقل و P أعظمي ومنه $\dim(P) = 0$

نتيجة: R ارتينية فإن $N(R) = J(R)$

مبرهنة: إذا كانت R ارتينية فإن $|\eta\text{-}Spec(R)| < \infty$

البرهان: نعرف المجموعة $X = \{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k : \eta_i \in \eta\text{-}Spec(R)\}$

إذا كانت $R = (0)$ فإن $X = \phi$ ومنه تم المطلوب

... $R \neq (0)$ فإن $X \neq \phi$ وبما أن R ارتينية ومنه يوجد عنصر أصغري في X

وليكن $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k \in X$

$\forall \eta \in \eta\text{-}Spec(R) : \eta_1 . \eta_2 \dots \eta \subseteq \eta \eta_1 \dots \eta_k$

$\subseteq \eta_1 \eta_2 \dots \eta_k \Rightarrow \eta . \eta_1 \dots \eta_k = \eta_1 \dots \eta_k$

$\Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, k\} : \eta_i \subset \eta_k$

$\Rightarrow \eta_i = \eta_k$

$\Rightarrow |\eta\text{-}Spec(R)| \leq k < \infty$

مبرهنة: إذا كانت R آرتينية فإن $N(R)$ متلاشي

البرهان: $N(R) \supseteq N(R)^2 \supseteq \dots$

R ارتينية ومنه $\exists n \in \mathbb{N} : \forall i \geq n :$

$I = N^n(R) = N(R)^i$

لنفرض جدلاً أن $I \neq \{0\}$ نعرف المجموعة

$I \in X = \{J \trianglelefteq R : I.J \neq \{0\}\} \neq \phi$

ومنه يوجد عنصر أصغري وليكن $J_0 \in X$ فإن $I \neq \{0\}$ ومنه

$\exists a \neq 0 \in J_0 : \langle a \rangle . J \neq \{0\} \Rightarrow \langle a \rangle \in X$

$\Rightarrow J_0 \subseteq \langle a \rangle$

ومن جهة أخرى $\langle a \rangle \subseteq J_0$ لأن $\langle a \rangle$ أصغر مثالي يحوي a

$\Rightarrow \langle a \rangle = J_0$

$\Rightarrow J_0 \subseteq aI \subseteq \langle a \rangle I \subseteq \langle a \rangle = J_0$

$\Rightarrow \langle a \rangle = J_0 = aI \Rightarrow a \in \langle a \rangle = J_0 = aI$

$\Rightarrow \exists b \in I : a = a.b = (a.b).b = a.b^2$

$= \dots = a.b^k ; \forall k \geq 0$

$b \in J_0 = \langle a \rangle = aI \subseteq I = N(R)^n \subseteq \sqrt{0}$

$\Rightarrow m \in \mathbb{N} : b^m = 0$

من أجل $k = m$ (لأن يتحقق $\forall k \geq 0$)

$a = a.b^m = 0$

وهذا يناقض كون $a \neq 0$ ومنه الفرض الجدلي خاطئ أي

$\exists n \in \mathbb{N} : I = N^n(R) = \{0\}$

وبالتالي $N(R)$ متلاشي

نتيجة: R ارتينية $J(R) = N(R)$ متلاشي (حسب المبرهنة السابقة)

تمهيدية: لتكن R حلقة واحدية وتبديلية، إذا وجد عدد منتهي من المثاليات الأعظمية $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ تحقق $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k = \{0\}$

فإن R آرتينية $\Leftarrow$ R نوثرية

«كل فضاء شعاعي منتهي البعد هو نوثري وآرتيني»

البرهان: لدينا $R \supseteq \eta_1 \supseteq \eta_1 \eta_2 \supseteq \dots \supseteq \eta_1 \dots \eta_k = \{0\}$

$I_0 = R \supseteq I_1 = \eta_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_k = \{0\}$

نلاحظ أن $\frac{I_{j-1}}{I_j}$ هو فضاء شعاعي على $\frac{R}{\eta_j}$ حيث $j \in \{1, \dots, k\}$

(لأن $\frac{R}{\eta_1}$ حقل لأن η_1 أعظمي) بالاستقراء الرياضي

$I_0 \equiv R$ نوثرية $\Leftarrow$ I_1 ، $\frac{I_0}{I_1}$ نوثرية ...... $\Leftarrow$

$\frac{I_{j-1}}{I_j}$ نوثرية $j \in \{1, \dots, k\}$ $\Leftarrow$ $\frac{I_{j-1}}{I_j}$ هو منتهي التوليد على $\frac{R}{\eta_j}$

فضاء شعاعي منتهي التوليد $\Leftarrow$ $\frac{I_{j-1}}{I_j}$ حيث k الطول آرتيني

$\Leftarrow$ R آرتينية

ملاحظة: $R = K[x]$ حيث K حقل

- $\langle x-a \rangle$ أعظمي، ليس عدد منتهي إذا كان K مغلق جبرياً فإن $\langle x-a \rangle$ وحيد.

مثال: $R = \frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 \rangle}$: $\langle \bar{x} \rangle \in \eta\text{-Spec}(R)$ و

$\langle \bar{x} \rangle \langle \bar{x} \rangle = \langle \bar{x}^2 \rangle = \bar{0}$

R نوثرية حسب Hilbert's basis، R تحقق (ن ذ ي) $\Leftarrow$ $\frac{\mathbb{R}[x]}{\langle x^2 \rangle}$ نوثرية $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ R آرتينية.

مبرهنة (Hopkin's Theorem) لتكن R حلقة واحدية وتبديلية

R آرتينية $\Leftrightarrow$ R نوترية و $\dim(R)=0$

البرهان: $\Leftarrow$ R آرتينية $\Leftarrow$ $\dim(R)=0$ $\Leftarrow$ $\eta\text{-}Spec(R)<\infty$

ولتكن $\eta\text{-}Spec(R)=\{\eta_1,\dots,\eta_k\}$

R آرتينية $\Leftarrow$ $N(R)=J(R)$ عديم القوى ومنه $\exists n\in\mathbb{N}: \{0\}=(N(R))^n=(J(R))^n$

$$=\left(\bigcap_{i=1}^{k}\eta_i\right)^n \supseteq \eta_1^n\cdots\eta_k^n$$

$$\Rightarrow \eta_1^n\cdots\eta_k^n=\{0\}$$

وحسب مبرهنة سابقة R نوترية

برهان الاتجاه الآخر يترك للفصل الرابع

ملاحظة: $\dim(R)=0 \not\Rightarrow R$ نوترية (مثال على ذلك)

$I=\langle x_1, x_2^2, \dots\rangle$ ؛ $Q[x_i : i\in\mathbb{Z}]$

$$R=\frac{Q[x_i : i\in\mathbb{Z}]}{I}$$

$p_i=\langle \bar{x}_i\rangle \in Spec(R)$ ؛ $p_i=\dfrac{\langle x_i\rangle}{I}$

لكن $P\in Spec(R)$: $\bar{0}=\bar{x}_i^{\,i}\in P$

$\Rightarrow \forall i\geq 1 : \bar{x}_i\in P \Rightarrow \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2,\dots\rangle\subseteq P$

$\Rightarrow P=\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2,\dots\rangle \in \eta\text{-}Spec(R)$

ومنه كل اولي اعظمي $\Rightarrow \dim(R)=0$

~~ومنه~~ و R ليست نوترية لأن السلسلة

$\langle \bar{x}_1\rangle \subsetneq \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2\rangle \subsetneq \dots$

لا تنقطع.

ملاحظة: R نوثرية $\not\Rightarrow$ $\dim R < \infty$ (مثالاً على ذلك)

$$A = k[x_i : i \in \mathbb{Z}^+]$$

$$m_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P_n = \langle x_{m_n+1}, \dots, x_{m_{n+1}} \rangle \in \operatorname{Spec}(A)$$

$$S = A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \subseteq A$$

$R = S^{-1}A$ نوثرية $\dim(R) = \infty$

المحاضرة 22 والأخيرة.

- هل كل مثالي يكتب على شكل تقاطع منته لمثاليات أولية؟
في الحالة العامة لا

Primary ideal

تعريف: لتكن R، $Q \trianglelefteq R$، I، نقول Q مثالي ابتدائي في R إذا تحقق احدى الشروط التالية

1) $Q \neq R,\ a,b \in R : a.b \in Q \Rightarrow a \in Q \vee b \in \sqrt{Q}$

2) $Q \neq R,\ a,b \in R : ab \in Q \Rightarrow a \in Q \vee [\exists n \in \mathbb{N}\ b^n \in Q]$

3) $R/Q \neq \bar{0},\ \bar{b} \in R/Q$, zero divizor $\Rightarrow \bar{b} \in N(R/Q) = \frac{\sqrt{Q}}{Q}$
قاسم صفري

- إذا كان Q هو مثالي ابتدائي في R فإن Q P-primary حيث $P = \sqrt{Q}$

- نقول عن المجموعة المنتهية $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_r\}$ من المثاليات الابتدائية في R انها تحليل ابتدائي للمثالي I في R اذا تحقق $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$

- إذا كان $\{Q_1, \dots, Q_r\}$ تحليلاً ابتدائياً لـ I فإنه يسمى أصغري (مختزل) إذا تحقق $\bigcap_{j \neq i} Q_j \nsubseteq Q_i$, $\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j} ; i \neq j$

امثلة: 1) اي مثالي أولي في R هو مثالي ابتدائي لكن العكس ليس صحيحاً بالضرورة
ومثال على ذلك $P = \langle 2^4 \rangle = 4$
$4 = 2 \cdot 2 \in P \Rightarrow 2 \notin P \Rightarrow P$ ليس اولي

2) إذا كان Q مثالي $Q \subsetneq R$ في PR , UFD و Q ابتدائي بحيث
$Q = \langle q \rangle \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : q = q^n$
او P ; اولي في R

الاثبات $\Leftarrow$: ليكن $Q = \langle q \rangle$ ابتدائي كون R في UFD فإن
$q = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$
$\alpha_i \in \mathbb{N} : p_i$ عناصر اولية $, i \in \{1, \ldots, r\}$
لنفرض جدلاً أن $r > 1$ $a = p_1^{\alpha_1} , b = p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$

$q = a \cdot b \Rightarrow a \mid q \Rightarrow a \in \langle q \rangle = Q$
ولدينا $a \notin Q$
$\Rightarrow \langle a \rangle = \langle q \rangle$
وهذا تناقض مع الفرض الجدلي خاطئ ومنه $r = 1$ وبالتالي
$q = p_1^{\alpha_1}$ وهو المطلوب

$\Rightarrow$ $Q = \langle q \rangle = \langle p^\alpha \rangle$
$x, y \in R , \ x \cdot y \in Q \Rightarrow p \mid p^\alpha \mid x \cdot y$
$\Rightarrow p \mid x \vee p \mid y \Rightarrow x \in \sqrt{Q}$ تم المطلوب

مثال: اذا كانت $R = \mathbb{Z}$, $Q \subsetneq R$ ابتدائي لتكن
$Q = \langle p^n \rangle , \exists n \in \mathbb{N}$ عدد اولي P

مثال: $I = \langle 60 \rangle$ ، $R = \mathbb{Z}$

$60 = 2^2 . 3 . 5$

$I = \langle 2^2 \rangle \cap \langle 3 \rangle \cap \langle 5 \rangle$

إذاً $\{\langle 2^2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 5 \rangle\}$ تحليل ابتدائي لـ I

مبرهنة: لتكن R حلقة واحدية وتبديلية، $Q \trianglelefteq R$ ابتدائي، $\sqrt{Q}$ أصغر مثالي أولي يحوي Q.

البرهان: لنثبت أن $\sqrt{Q}$ أولي كون Q ابتدائي فإن

$Q \underset{\neq}{\trianglelefteq} R \Rightarrow \sqrt{Q} \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$

$x.y \in \sqrt{Q}$; $x,y \in \sqrt{Q}$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x^n . y^n \in Q$

$\Rightarrow x^n \in Q \vee (\exists m \in \mathbb{N} : (y^n)^m \in Q)$

$\Rightarrow x \in \sqrt{Q} \vee y \in \sqrt{Q}$

$\Rightarrow \sqrt{Q} \in Spec(R)$

وحسب مبرهنة سابقة $\sqrt{Q} = \bigcap_{Q \subseteq P \in Spec(R)} P$ ومنه $\sqrt{Q}$ أصغر مثالي أولي يحوي Q.

مبرهنة: $S \subseteq R$ مغلقة ضربياً في R، $Q \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$

1) إذا كان $\sqrt{Q} \trianglelefteq . R$ فإن Q هو P-Primary.

2) إذا كان $n \in \mathbb{N}$ و $M \trianglelefteq . R$ فإن M^n هو M-Primary

3) Q هو P-Primary و $a \in R \setminus Q$ فإن $(Q : a)$ هو P-Primary.

4) إذا كان Q هو P-Primary فإنه:

- إذا كان $P \cap S \neq \phi$ فإن $S^{-1}Q = S^{-1}R$
- إذا كان $P \cap S = \phi$ فإن $S^{-1}Q \cap R = Q$ و $S^{-1}Q$ هو $S^{-1}P$-Primary.

البرهان 1) : نعتمد على التعريف الثالث

$R/Q = ((R/Q)\setminus N(R/Q)) \cup (N(R/Q))$

$= U(R/Q) \cup \frac{\sqrt{Q}}{Q}$

لأن $\frac{R}{Q}$ و $\frac{\sqrt{Q}}{Q}$ و $\sqrt{Q}$ أصغر مثالي أولي يحوي Q

أي $(R/Q , \frac{\sqrt{Q}}{Q})$ حلقة محلية

$R/Q \neq \bar{0} , \bar{b} \in R/Q$ zero divizor

$\Rightarrow \bar{b} \notin U(R/Q) \Rightarrow \bar{b} \in N(R/Q)$

$\Rightarrow$ Q ابتدائي في R

2) أي Q هو P-Primary ، $Q = M^n$ بيانه $\sqrt{Q} = \sqrt{M} = M$

$\Leftarrow \exists n \in \mathbb{N}$; هو مثالي ابتدائي M^n هو M-primary

3) لنثبت أن $P = \sqrt{Q} = \sqrt{Q:a}$

من الواضح $\sqrt{Q} \subseteq \sqrt{Q:a}$

لنثبت الاحتواء المعاكس

$\forall x \in \sqrt{Q:a} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in Q:a$

$\Rightarrow a x^n \in Q \Rightarrow x^n \in Q \Rightarrow x \in \sqrt{Q}$

$\Rightarrow \sqrt{Q:a} \subseteq \sqrt{Q} \Rightarrow \sqrt{Q:a} = \sqrt{Q}$

$Q \neq R , a \in Q \Rightarrow Q:a \neq R$

ليكن $x,y \in R : x.y \in Q:a$

$\Rightarrow a.xy \in Q \Rightarrow ax \in Q \vee a \in \sqrt{Q} = \sqrt{Q:a}$

$\Rightarrow x \in Q:a \vee a \in \sqrt{Q:a} \Rightarrow$ ومنه $Q:a$ ابتدائي

وبالتالي $Q:a$ هو P-Primary .

14- $P=\sqrt{Q} , P\cap S \neq \phi$

$\Rightarrow \sqrt{Q}\cap S \neq \phi$

$\Rightarrow Q\cap S \neq \phi$

وحسب تمرين سابق نجد $S^{-1}Q = S^{-1}R$

- $Q \subseteq S^{-1}Q , Q \subseteq R$

$\Rightarrow Q \subseteq S^{-1}Q \cap R$

لنثبت الاحتواء المعاكس

$\forall \frac{a}{s} \in S^{-1}Q \cap R \Rightarrow \frac{a}{s} \in S^{-1}Q$

$\Rightarrow \exists \frac{q}{t} \in S^{-1}Q : \frac{a}{s} = \frac{q}{t}$

$\frac{a}{s} \in R \Rightarrow \exists r \in R : \frac{a}{s} = \frac{r}{1}$

$\Rightarrow \exists u_1 \in S : u_1 . t . a = u_1 . s . q$

$\exists u_2 \in S : \underbrace{u_2 . a}_{\in Q} = u_2 . s . r \in Q$

كون $P\cap S = \phi$ ومنه $\sqrt{Q}\cap S = \phi$ أي $u_2 . s \notin Q$

وأن Q هو أولي ابتدائي فإن

$\Rightarrow r \in Q \Rightarrow \frac{a}{s} = \frac{r}{1} \in Q$

$\Rightarrow S^{-1}Q \cap R \subseteq Q$

$\Rightarrow S^{-1}Q \cap R = Q$

لنثبت المطلوب نثبت الاتجاه $S^{-1}\sqrt{Q} = \sqrt{S^{-1}Q}$

$\forall \frac{a}{s} \in S^{-1}\sqrt{Q} \Rightarrow s \in S , a \in \sqrt{Q}$

$\Rightarrow s \in S , \exists n \in \mathbb{N} , a^n \in Q$

$\Rightarrow (\frac{a}{s})^n \in S^{-1}Q \Rightarrow \frac{a}{s} \in \sqrt{S^{-1}Q}$

لنثبت الاحتواء المعاكس $\forall \frac{a}{s} \in \sqrt{S^{-1}Q}$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{a^n}{s^n} \in S^{-1}Q$

$\Rightarrow s^n \in S , a^n \in Q \Rightarrow$

$s^n \in S , a^n \in Q , a \in \sqrt{Q}$

$\Rightarrow \frac{a}{s} = \frac{s^{n-1}}{1} \cdot \frac{a}{s^n} \in S^{-1}\sqrt{Q}$

$\frac{a}{s} , \frac{b}{t} \in S^{-1}R : \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \in S^{-1}Q$

$R \ni \frac{a.b}{1} = \frac{s.t}{1} \cdot \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{s} \in S^{-1}Q$

$\Rightarrow a.b \in Q \Rightarrow a \in Q \vee b \in \sqrt{Q}$

$\Rightarrow \frac{a}{s} \in S^{-1}Q \vee \frac{b}{s} \in S^{-1}Q = \sqrt{S^{-1}Q}$

ومنه $S^{-1}Q$ هو $S^{-1}P$-primary

مثال 1) $M \triangleleft R \Rightarrow$ هو M^n M-primary $\exists n \in \mathbb{N}$:

2) إذا كان $P \in Spec(R) \not\Rightarrow$ (ليس بالضرورة) هو P^n P-primary $\exists n \in \mathbb{N}$

مثال معاكس: لنأخذ $R = \frac{Q[x,y]}{\langle x.y - z^2 \rangle}$

$\bar{P} = \langle \bar{x} , \bar{y} \rangle \in Spec(R)$

$\bar{P}^2 = \langle \bar{x}^2 , \bar{x}\bar{y} , \bar{y}^2 \rangle , 0 \in \bar{P}^2$

$\bar{z}^2 = \bar{x}\bar{y} \in \bar{P}^2 \Rightarrow \bar{z} \notin \bar{P}^2 , \bar{z} \notin \bar{P}$

أي $\bar{P}^2$ ليس ابتدائي

* في الحلقة النوثرية أي مثالي له تحليل ابتدائي.

مثال: إذا كانت R حلقة واحدية وتبديلية و $I \trianglelefteq R$ ، $a \in R$ يحقق $(I:a) = (I:a^2)$ بيّن أن:

$$I = (I:a) \cap (I + \langle a \rangle)$$

الحل:

$$I \subseteq (I:a)$$

$$I \subseteq (I + \langle a \rangle)$$

$$\Rightarrow I \subseteq (I:a) \cap (I + \langle a \rangle)$$

الاحتواء المعاكس

$$\forall x \in (I:a) \cap (I + \langle a \rangle)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (I:a) \Rightarrow ax \in I \\ x \in I + \langle a \rangle \Rightarrow \exists i \in I ; r \in R ; x = i + ar \end{cases}$$

نضرب بـ a

$$\underbrace{ax}_{\in I} = \underbrace{ai}_{\in I} + \underbrace{a^2 r}_{\in I}$$

$$\Rightarrow \exists r \in I : a^2 = (I:a)$$

$$\Rightarrow ar \in I$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{i}_{\in I} + \underbrace{ar}_{\in I} \in I$$

ومنه الاحتواءين محققين وتم المطلوب

مبرهنة الوجود: في الحلقة النوثرية R أي مثالي $I \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$ يقبل تحليل ابتدائي في R.

البرهان: لنأخذ $X = \{ I \underset{\neq}{\trianglelefteq} R :$ I لا يقبل تحليل ابتدائي في R

لنفرض جدلاً أن $X \neq \emptyset$ وحسب مبرهنة سابقة

$$\exists I \in X \Rightarrow \exists a, b \in R : a \cdot b \in I$$

$$a \notin I, \forall m \in \mathbb{N} : b^m \notin I$$

لأن I لا يملك تحليلاً ابتدائياً

نلاحظ $(I:b) \subseteq (I:b^2) \subseteq \cdots$

سلسلة متزايدة من المثاليات في R وكون R نوثرية بانها تتقطع

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall i \geq n : (I:b^n) = (I:b^i)$$

وحسب تمرين سابق

$$(I:b^n) = (I:(b^n)^2) \Rightarrow I = (I:b^n) \cap (I + \langle b^n \rangle)$$

$$a \notin I, a \in (I:b^n) \Rightarrow I \subsetneq (I:b^n)$$

$$\Rightarrow (I:b^n) \notin X$$

$$\Rightarrow \exists Q_1, \dots, Q_s : (I:b^n) = \bigcap_{i=1}^{s} Q_i$$

$$b^n \in (I + \langle b^n \rangle), b^n \notin I$$

$$\Rightarrow I \subsetneq I + \langle b^n \rangle \Rightarrow I + \langle b^n \rangle \notin X$$

$$\Rightarrow \exists Q_{s+1}, \dots, Q_r : I + \langle b^n \rangle = \bigcap_{i=s+1}^{r} Q_i$$

$$\Rightarrow I = \left(\bigcap_{i=1}^{s} Q_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=s+1}^{r} Q_i\right) = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$$

وهذا يناقض كون $I \in X$ ومنه $X = \emptyset$ وهو المطلوب

انتهت المحاضرة (9 المقرر)

كل عام و أنتم بخير

ملاحظة: جميع المحاضرات مطلوبة للامتحان

Ahmad Abo Altot