المحاضرة ((23))

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: تمارين وأسئلة دورات

نظري
عملي

---

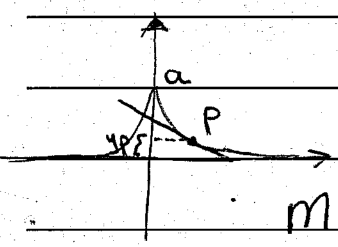
*1) أثبت أن $\vec{r}(t) = (a(\cos t + \ln tg\frac{t}{2}), a\sin t, a)$ تمثيل وسيطي للسبي حيث $0 < t < \pi$

2) أوجد المستقيم المماس عند النقطة الموافقة لـ $t = \frac{\pi}{2}$

3) هل هناك تماس بين السبي والمحور oy عند $(a,0,0)$ علل إجابتك؟

$$y_p = a\sin(\pi - t)$$

$$y_p = a\sin t$$



$$m = tg(t) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\cos t}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a\cos t}{tg\, t} = \frac{a\cos t}{\frac{\sin t}{\cos t}} = \frac{a\cos^2 t}{\sin t}$$

$$= a\frac{1-\sin^2 t}{\sin t} = a\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right)$$

$$dx = a\int\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right)dt = a\int\frac{dt}{\sin t} =$$

$$= a\int\frac{\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = a\int\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\right]dt$$

$$= a\ln\sin\frac{t}{2} - \ln\cos\frac{t}{2} = a\ln\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} = a\ln tg\frac{t}{2}$$

$$\Longrightarrow x = a\left[\ln\left(tg\left(\frac{t}{2}\right)\right) + \cos t\right]$$

$\boxed{2}$

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, a, 0)$$

$$\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{0}$$

المشتق الأول معدوم وهي نقطة شاذة اساسية فمشتق الثاني غير معدوم

$$\vec{r}\,''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -a, 0)$$

$$\underset{\boxed{1}}{\frac{X-0}{0}} = \underset{\boxed{2}}{\frac{Y-a}{-a}} = \underset{\boxed{3}}{\frac{Z-0}{0}} = u$$

من $\boxed{1}$ و 3

$$X = 0 \qquad Z = 0, \qquad y = -au + a$$

المستقيم المماس هو oy

$\boxed{3}$ بما ان oy هو مستقيم مماس للمنحني عند نقطة $(0, a, 0)$
فيوجد تلامس من المرتبة الأولى على الأقل

$\frac{16}{126}$ أثبت ان المتجهات المماسة على طول المنحني $r(t) = \left(\frac{2}{3}t, t^2, t^3\right)$
تصنع زاوية ثابتة مع المتجه $\vec{u} = (1, 0, 1)$

الحل:

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

$$\vec{r}\,'(t) = \left(\frac{2}{3}, 2t, 3t^2\right)$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{\frac{4}{9} + 4t^2 + 9t^4} = \sqrt{9\left(\frac{4}{81} + \frac{4}{9}t^2 + t^4\right)}$$

$$= 3\left(t^2 + \frac{2}{9}\right)$$

نوجد T

$$T = \left(\frac{\frac{2}{3}, 2t, 3t^2}{3\left(t^2 + \frac{2}{9}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow t = \left(\frac{2}{9(t^2+\frac{2}{9})} , \frac{2t}{3(t^2+\frac{2}{9})} , \frac{3t^2}{3(t^2+\frac{2}{9})} \right)$$

لتكن θ زاوية بين $\vec{t}$ و $\vec{u}$:

$$\cos = \frac{\vec{t}.\vec{u}}{\|t\|.\|u\|}$$

$$\vec{t}.\vec{u} = \frac{2}{9(t^2+\frac{2}{9})} + \frac{t^2}{t^2+\frac{2}{9}} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{1.\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

وبما أنه لا تتعلق بـ t فإنها ثابتة.

17 / 128 أوجد معادلة المستوي الملاصق لكل من المنحنيات التالية، وذلك في النقطة الموافقة للقيمة الوسيط $t = 1$

$$X = \frac{1}{2}z^2 \qquad X = y$$

تعطى معادلة المستوي الملاصق

$$[\vec{R}-\vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)] = 0$$

* الحل :

لنأخذ $z = t \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}t^2$

$$\vec{r}(t) = (\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t^2, t)$$

$$\vec{r}(1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$$

$$\vec{r}'(t_0) = (t, t, 1) , \vec{r}(1) = (1,1,1)$$

$$\vec{r}''(t) = (1,1,0) , \vec{r}''(1) = (1,1,0)$$

$$\begin{vmatrix} X-\frac{1}{2} & Y-\frac{1}{2} & Z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-\tfrac{1}{2})(-1)-(y-\tfrac{1}{2})(-1)+(z-1)(0)=0$$

$$-x+\frac{1}{2}+y-\frac{1}{2}=0$$

$$-x+y=0$$

$$x=t^2 \ , y=1-t^2 \ , z=2t$$

$$\vec{r}'(t)=(2t,-2t,2)$$

$$\vec{r}''(t)=(2,-2,0)$$

$$\vec{r}'(1)=(2,-2,0)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)4-y(-4)+(z-2)(0)=0$$

$$4x-4+4y=0$$

$$\Longrightarrow 4x+4y-4=0$$

$$x=t \ , y=t^2 \ , z=t^3$$

$$x'(t)=1 \ , y'(t)=2t \ , z'(t)=3t^2$$

$$x''(t)=0 \ , y''(t)=2 \ , z''(t)=6t$$

$$[R-\vec{r}(1), \vec{r}'(1), \vec{r}''(1)]=0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)6-(y-1)6+(z-1)2=0$$

$$\Longleftrightarrow 6x-6-6y+6+2z-2=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 6X-6y+2Z-2=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3X-3Y+Z-1=6$$

32 / 129 أوجد تقوس و التفاف كل من المنحنيات

$$x=t \quad , y=t^2 \quad , z=t^3$$

$$\underset{\text{تقوس}}{K}=\frac{\|\vec{r}'\wedge\vec{r}''\|}{\|\vec{r}\|^3} \quad , \quad \underset{\text{التفاف}}{\tau}=\frac{[\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''']}{\|r'\wedge r''\|^2}$$

* الحل :

$$\vec{r}(t)=(t,t^2,t^3)$$

$$\vec{r}'(t)=(1,2t,3t^2)$$

$$\vec{r}''(t)=(0,2,6t)$$

$$\vec{r}'''(t)=(0,6,6)$$

$$\vec{r}'\wedge\vec{r}''=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2t & 3t\\ 0 & 2 & 6t\end{vmatrix}=(12t^2-6t,-6t,2)$$

$$\|\vec{r}'\wedge\vec{r}''\|=\sqrt{(12t^2-6t^2)+36t^2+4}=2\sqrt{9t^4+9t^2+1}$$

$$\|\vec{r}'(t)\|=\sqrt{1+4t^2+9t^4}$$

$$[\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''']=\begin{vmatrix}1 & 2t & 6t\\ 0 & 2 & 6t\\ 0 & 0 & 6\end{vmatrix}=12$$

$$K=\frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{(1+4t^2+9t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\tau = \frac{12}{4(9t^4+9t^2+1)} = \frac{3}{9t^4+9t^2+1}$$

((سؤال دورة)) :

لتكن ℓ منحنياً معرفاً وسيطياً بـ $t \mapsto (t, t, t^2)$ والمطلوب :

1. أثبت أن جميع نقاط المنحني ℓ نظامية في التمثيل $\vec{r}$ هل ℓ منحني نظامي من صف C^∞ ؟

2. عين النقطة الموافقة لـ $t=0$ ثلاثية فرينيه والتقوس والمستوي الملاصق

* الحل :

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \quad , \quad \vec{b} = \frac{\vec{r}' \wedge \vec{r}''}{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|} \quad , \quad \vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$$

شعاع واحدة مماسي — شعاع واحدي ثاني ناظم — شعاع واحدي الناظم الاساسي

1. $\vec{r}$ من صف C^∞ على مجال R لأن جميع مركباته من الصف C^∞ على $]-\infty, +\infty[$

وبالتالي النقاط الشاذة هي النقاط الموافقة لحلول معادلة :

$$\vec{r}'(t) = \vec{0}$$

$$(1, 1, 2t) \neq \vec{0} \quad \forall t \in R$$

$$1 \neq 0 \quad \text{لأن}$$

ℓ منحني نظامي من الصف C^∞ لوجود تمثيل $\vec{r}$ معرف على مجال مفتوح من الصف C^∞ ونظامي

$$\vec{r}(t) = (t, t, t^2) \quad , \quad \vec{r}(1) = (0, 0, 0)$$

$$\vec{r}'(t) = (1, 1, 2t) \quad , \quad \vec{r}'(1) = (1, 1, 0)$$

$$\vec{r}''(t) = (0, 0, 2) \quad , \quad \vec{r}''(1) = (0, 0, 2)$$

$$\|\vec{r}'(0)\| = \sqrt{2}$$

$$\vec{r}'(0) \wedge \vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\| \vec{r}'(0) \wedge \vec{r}''(0) \| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$t = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{r}'(0) \wedge \vec{r}''(0)}{\| r'(0) \wedge r''(0) \|} = \frac{(2,-2,0)}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 1\vec{k}$$

$$K = \frac{\| \vec{r}' \wedge \vec{r}'' \|}{\| r' \|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} = 1$$

المستوي الملاصق : ليكن $R(x,y,z)$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$x + y = 0$$

★★★ انتهت المحاضرة ★★★