نظري

◄ دكتور المادة: علي قبوي

◄ المحاضرة: السابعة ◄ عنوان المحاضرة: تمارين

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ حل تمارين.

تمارين

التمرين (1)

خضع ربيع لاختبار و كان عليه أن يجيب عن عشرة من ثلاثة عشر سؤال

المطلوب:

١- بكم طريقة تكون عدد الاختبارات الممكنة.

٢- بكم طريقة يمكن الاختيار إذا كان لابدّ أن يجيب عن أول سؤالين.

٣- كم عدد الاختبارات إذا كان من الضروري أن يجيب عن السؤال الأول أو السؤال الثاني، لا الاثنين معاً.

٤- بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا أُلزِمَ بالإجابة عن ثلاث أسئلة من بين الأسئلة الخمسة الأولى.

٥- بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا أُلزِمَ بالإجابة عن ثلاث أسئلة على الأقل من بين الأسئلة الخمسة الأولى.

الحل :

1) $C_{10}^{13} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{13!}{10!13!} = \frac{13\times12\times11}{3\times2\times1} = 286$ اختيار

2) $C_{3}^{11} = \frac{11!}{8!3!} = \frac{11\times10\times9}{3\times2\times1} = 165$ اختيار

في المرحلة الأولى: اختيار سؤال من بين سؤالين الاول و الثاني

$C_1^2 = 2$ توافيق

في المرحلة الثانية: اختيار 9 أسئلة من بين 11 سؤال

$3)\ C_9^{11} = \frac{11!}{(9!2!)} = \frac{11\times10}{9!2!} = \frac{11\times10}{2\times1} = 55$ اختيار

فيكون عدد الاختيارات الممكنة $2 \times 55 = 110$

4)

المرحلة الأولى: اختيار ثلاثة أسئلة من بين الأسئلة الخمسة الأولى

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\times4}{2} = 10$$

المرحلة الثانية: اختيار سبعة أسئلة من بين 8 أسئلة

$$C_7^8 = 8$$

و بالتالي عدد الاختيارات الكلية حسب المبدأ الأساسي في العد

$10 \times 8 = 80$ اختيار

المرحلة الأولى × المرحلة الثانية

5)

و فيها ثلاث طرق:

$\longleftarrow$ اختيار 3 من 5

$\longleftarrow$ اختيار 4 من 5

$\longleftarrow$ اختيار 5 من 5

الطريقة الأولى: اختيار 3 أسئلة من 5 أسئلة الأولى و 7 أسئلة من 8 أي

$C_7^5 \times C_7^8 = 80$ اختيار

أو الطريقة الثانية:

اختيار 4 أسئلة من الأسئلة الخمسة الأولى و 6 من 8 أي:

$$C_4^5 \times C_6^8 = 5 \times \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 5 \times 28 = 140$$ طريقة

أو الطريقة الثالثة:

اختيار 5 أسئلة من الأسئلة الخمس الأولى و 5 من 8 :

$$C_5^5 \times C_5^8 = 1 \times \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$ طريقة

فيكون عدد الاختيارات الكلية هو:

$$80 + 140 + 56 = 276$$

التمرين (2)

سحبت ورقتان بطريقة عشوائية من 10 ورقات مرقمة من $10 \to 1$ أوجد احتمال أن يكون مجموعها فردياً اذا تم السحب :

١) ورقتين معاً .
٢) ورقة بعد أخرى بدون إعادة .
٣) ورقة بعد أخرى مع إعادة .

الحل :

١) لنحصل على مجموع فردي يجب الحصول على عدد فردي وعدد زوجي ، وليكن A حدثاً يدل على الحصول على مجموع فردي فيكون :

$$|\Omega| = C_2^{10} = \frac{10\times9}{2\times1} = 45$$

$$|A| = C_1^5 \times C_1^5 = 5 \times 5 = 25$$

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{25}{45} = 0.56}$$

٢) **السحب بدون إعادة ....**

$$|\Omega| = C_1^{10} \times C_1^9 = 90$$

$$|B| = \underbrace{C_1^5}_{\text{فردي}} \times \underbrace{C_1^5}_{\text{زوجي}} + \underbrace{C_1^5}_{\text{زوجي}} \times \underbrace{C_1^5}_{\text{فردي}} = 5 \times 5 + 5 \times 5 = 50$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{50}{90} = 0.56$$

٣) سحب ورقتان مع إعادة...

$$|\Omega| = C_1^{10} \times C_1^{10} = 10 \times 10 = 100$$

$$|C| = \underbrace{C_1^5}_{\text{فردي}} \times \underbrace{C_1^5}_{\text{زوجي}} + \underbrace{C_1^5}_{\text{زوجي}} \times \underbrace{C_1^5}_{\text{فردي}} = 5 \times 5 + 5 \times 5 = 50$$

$$\boxed{P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{50}{100} = 0.5}$$

التمرين (3)

بدأنا بالصعود في مصعد بناء مؤلف من عشر طوابق فإذا بدأنا بالصعود وبه 7 اشخاص وافترضنا انه يتوقف عند كل طابق ، عين احتمال نزول كل من هؤلاء في طابق ((كل شخص منهم نزل في طابق))

الحل :

بفرض أن A حدث مطلوب عندئذٍ :

لكل شخص 10فرص لنزول وعدد الاشخاص 7 وبالتالي فضاء العتبة

$$|\Omega| = (10)^7 = 10000000$$

ويجب ترتيب الـ 7 اشخاص في كل طابق لذلك نأخذ :

$$|A| = P_7^{10} = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!} = 604800$$

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{604800}{10000000} \approx 0.06}$$

التمرين(4)

سحبنا عينة عشوائية حجمها r من مجموعة عدتها n ، عين احتمال وجود عنصر معين في العينة إذا كان السحب :

١) يجري مع إعادة .
٢) يجري دون إعادة .
٣) إذا تم السحب مع إعادة ، عين احتمال ظهور كل عنصر مرة واحدة على الأكثر .

الحل :

١) ليكن A الحدث المطلوب ، فيكون A' حادثة عدم ظهور معين من العينة :

إن احتمال اختيار اي عنصر هو n مع إعادة يبقى n وعدد مرات تكرار r ومنه عدة $|\Omega|$:

$$|\Omega| = n^r$$

بعد اختيارنا عنصر معين من عينة يبقى لدينا $(n-1)$ عنصر وعدد تكرار r ومنه :

$$|A'| = (n-1)^r \Rightarrow P(A') = \frac{(n-1)^r}{n^r}$$

$$\boxed{P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{(n-1)^r}{n^r} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r}$$

٢) ليكن B الحدث المطلوب ، فيكون B' حادثة عدم ظهور عنصر معين من العينة بحيث إن حادثة اختيار عنصر من عينة عدتها n وبدون إعادة مع تكرار r مرة "

$$|\Omega| = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

وبعد اختيار عنصر من مجموعة عدتها n فيبقى لدينا $(n-1)$ عنصر منه :

$$|B'| = P_r^{n-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!} \Rightarrow P(B') = \frac{|B'|}{|\Omega|} = \frac{\frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}}{\frac{n!}{(n-r)!}} = \frac{n-r}{n}$$

$$\boxed{\Rightarrow P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{n-r}{n} = 1 - 1 + \frac{r}{n} = \frac{r}{n}}$$

٣) ليكن C الحدث المطلوب ، ولان السحب مع إعادة فيكون :

$$|\Omega| = n^r$$

$$|C| = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{n^r} = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{n\times n\ldots\ldots\times n}$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{(n-1)}{n} \times \ldots\ldots \times \frac{n-r+1}{n}$$

$$\Rightarrow P(C) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \dots . \left(1 - \frac{r-1}{n}\right)$$

وهكذا نكون قد انهينا البحث الأول ^_^

إنّ النّفس لجوهرة ثمينة، من صانها رفعها ومن ابتذلها وضعها

انتهت المحاضرة

إعداد: خديجة الرفاعي – ولاء المبخر – لمى حبشية