المحاضرة
المحاضرتين الأوليتين

◄ دكتور المادة: ايلي قدسيا

◄ عنوان المحاضرة: الطيوف الأولية لجبور BCK التبادلية و الضمنية.

نظري ☑
عملي ☐

قام الدكتور بإعطاء هاتين المحاضرتين إضافة لنوطة الجبور.

مفاهيم أولية في التبولوجيا:

الفضاء التبولوجي: لتكن $X\neq\emptyset$ ولتكن τ جماعة من المجموعات الجزئية من X نقول عن τ أنها تشكل تبولوجيا على X إذا حققت الموضوعات التالية

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) اجتماع أي جماعة من عناصر τ هو عنصر من τ

3) تقاطع أي جماعة منتهية من عناصر τ هو عنصر من τ.

إن الثنائية (X,τ) تشكل فضاء تبولوجي.

ونسمي كل عنصر من τ مجموعة مفتوحة، كما تسمى متممة المجموعة المفتوحة بالمجموعة المغلقة. وبذلك نكون قد قمنا ببناء تبولوجيا على X استناداً إلى مجموعات مفتوحة ومن الجدير بالذكر أنه نستطيع بناء تبولوجيا على X استناداً إلى مجموعات مغلقة كما يلي:

لتكن $X\neq\emptyset$ ولتكن τ جماعة من المجموعات الجزئية في X نقول عن τ أنها تشكل تبولوجيا على X إذا حققت الموضوعات التالية:

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) اجتماع أي جماعة منتهية من عناصر τ هو عنصر من τ.

3) تقاطع أي جماعة من عناصر τ هو عنصر من τ.

تعريف: يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) أنه فضاء T_2 أو هاوسدورف إذا حقق الشرط التالي:

من أجل أي عنصرين x, y من X هنالك جوار W_x لـ x وجوار W_y لـ y بحيث $W_x \cap W_y = \emptyset$

الطيوف الأولية لجبور BCK التبادلية و الضمنية:

لتكن A جبر BCK تبادلي وضمني وسوف نرمز بـ $spec(A)=X_A$ لمجموعة كل المثاليات الأولية في A لنفرض الآن كل مثالي J في A المجموعة

$$V(J)=\{p\in spec(A): J\subset p\}$$
$$D(J)=\{p\in spec(A): J\not\subset p\}$$

مبرهنة: لتكن A جبر BCK تبادلي وضمني عندئذ

(1) $V(A)=\emptyset$, (2) $V(\{0\})=spec(X)$

(3) $V(\bigcup_{i\in I}J_i)=\bigcap_{i\in I}V(J_i)$

وذلك أياً كانت $(J_i)_{i\in I}$ جماعة من المثاليات في X.

(4) $V(I.J)=V(I)\cup V(J)$

البرهان: [1] من الواضح أن

$$V(A)=\{p\in spec(A): A\subset p\}=\emptyset$$

[2] $V(\{0\})=\{p\in spec(A): \{0\}\subset p\}=spec(A)$

مع الإشارة أن المثالي الصفري محتوى في أي مثالي

[3] $V(\bigcup_{i\in I}J_i)=\{p\in spec(A): \bigcup_{i\in I}J_i\subset p\}$

$=\{p\in spec(A): \forall i\in I, J_i\subset p\}$

$=\bigcap_{i\in I}\{p\in spec(A): J_i\subset p\}=\bigcap_{i\in I}V(J_i)$

[4] $V(I.J)=\{p\in spec(A): I.J\subset p\}$

$=\{p\in spec(A): I\subset p \text{ or } J\subset p\}$

وذلك لأن p مثالي أولي واعتماداً على مبرهنة شهيرة بذا ن

$V(I.J)=\{p\in spec(A), I\subset p\}\cup\{p\in spec(A), J\subset p\}$

$=V(I)\cup V(J)$

* نلاحظ أننا تمكنا من بناء تبولوجيا على X_A عناصرها مجموعات مغلقة حيث $\tau=(V(J))_{J\in Id(A)}$ تبولوجيا على $X_A=spec(A)$

إن (X_A , τ) تشكل فضاء تبولوجي، سوف ندعوه من الآن فصاعداً بالطيف الأولي لجبر BCK التبادلي والمحدود A

إن المجموعات المفتوحة في هذا الفضاء التبولوجي هي

$$D(J) = \{P \in X_A : J \not\subset P\}$$

والمجموعات المغلقة $V(J) = \{P \in X_A : J \subset P\}$

وذلك أياً كان J مثالياً في A.

* التبولوجيا المذكورة أعلاه ندعوها زاريسكي (Zariski).

تعريف القاعدة في الفضاء التبولوجي: لتكن (X, τ) فضاء تبولوجي، ولتكن β جماعة من المجموعات الجزئية من X نقول عن β إنها قاعدة لتبولوجيا τ إذا كانت β مجموعة جزئية من τ، وإذا كان كل عنصر من τ اتحاداً لعناصر من β.

ملاحظة: إن الفضاء التبولوجي الذي عرفناه قبل قليل يتمتع بصفات تبولوجية متعددة حيث في الواقع هو فضاء هاوسدورف.

حيث $\tau = \{D(J) : J \in Id(A)\}$

$$\tau_f = \{V(J) : J \in Id(A)\}$$

ملاحظة واصطلاح ومسألة خاصة: لتكن A جبر BCK تبادلي وضمني، $x \in A$ عندئذٍ $)x(= \{a \in A : a * x = 0\}$ هي مثالي في A.

لتكن (X_A , τ) الطيف الأولي لـ A إن المجموعة

$$D()x() = D(x) = \{P \in X_A :)x(\not\subset P\}$$
$$= \{P \in X_A : x \notin P\}$$

ولنعرف المجموعة

$$V()x() = V(x) = \{P \in X_A : x \in P\}$$

* لنرمز بـ $D_{Spec(A)}$ لمجموعة كل المجموعات المفتوحة من النمط $D(x)$ حيث $x \in A$ و

$$D_{Spec(A)} = \{D(x) : x \in A\}$$

ومن الملاحظ أن $D_{spec(A)} \subseteq \mathcal{T}$ ويمكن أن نبرهن بسهولة أن $D_{spec(A)}$ تشكل قاعدة في الطبولوجيا التبولوجي $(X_A, \mathcal{T})$.

نتيجة:
(1) $D(x) = spec(A) - V(x)$
(2) $D(0) = \{p \in spec(A) : 0 \notin p\} = \phi$
(3) $D(1) = \{p \in spec(A) : 1 \notin p\} = spec(A)$
$1 \notin I \Leftrightarrow A \neq I$ اعتمداً على ذلك

بأن $D(x)$ هي مجموعة مفتوحة ومغلقة في آن واحد.

مبرهنة: لتكن A جبر Bck محيي وتبادلي ومحدود عندئذٍ القضايا التالية صحيحة:
(1) $D(x \wedge y) = D(x) \cap D(y)$
(2) $D(x \vee y) = D(x) \cup D(y)$
(3) $D(e(x)) = spec(A) - D(x) = V(x)$

البرهان: (1) لدينا $D(x \wedge y) = \{p \in spec(A) : x \wedge y \notin p\}$
$= \{p \in spec(A) : x \notin p \wedge y \notin p\} = D(x) \cap D(y)$
وذلك استناداً لمفهوم المثالي الأولي

(2) $D(x \vee y) = \{p \in spec(A) : x \vee y \notin p\}$
$= \{p \in spec(A) : x \notin p \vee y \notin p\} = D(x) \cup D(y)$

(3) $D(x) \cap D(e(x)) = D(x \wedge e(x)) = D(0) = \phi$
وذلك حسب (1) ومن جهة أخرى:
$D(x) \cup D(e(x)) = D(x \vee e(x)) = D(1) = spec(A)$
وكون تقاطع $D(x), D(e(x))$ هو ϕ واجتماعهم $spec(A)$
فإن $D(e(x)) = spec(A) - D(x) = V(x)$

ملاحظة: $D(x)$ مجموعة مفتوحة وذلك لأنها عنصر من $\mathcal{T}$
ومن جهة أخرى $D(x)$ مجموعة مغلقة لأن متممتها $D(e(x))$ مفتوحة.

نقبل ما يلي بدون برهان (فقط للمعرفة)

1] برهنة: إن $D_{spec(A)}$ تشكل قاعدة للتبولوجيا ح على $Spec(A)$ كما أن عناصرها مجموعات مفتوحة مغلقة.

2] برهنة: إن الطيف الأولي $Spec(A)$ فضاء هاوسدورف

3] برهنة: إن الطيف الأولي $Spec(A)$ فضاء متراص.

وقد أشار الدكتور إلى ملاحظة هامة جداً جداً أن المقرر يُدرس مما أُعطيا من محاضرات هذا الفصل ^^

انتهت المحاضرة وبالتوفيق للجميع

إعداد: شهد الكايد البوشي ^^

Syria math