نظري

◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄ المحاضرة : الخامسة عشر ◄ عنوان المحاضرة: الجداء المرافق

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١ـمبرهنة عن الجداء

٢ـ الجداء المرافق + مبرهنات .

٣ـالمجموع المباشر الخارجي

مبرهنة : إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R فإن $\left(\prod_{i\in I} M_i\,,(P_{r_i})_{i\in I}\right)$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

الإثبات :

ليكن Mمودولا على الحلاقة Rولتكن $(g_i: M \to M_i)$ أسرة تشاكلات مودولية

وليكن التطبيق $h: M \to \prod_{i\in I} M_i$ المعرف بالعلاقة $h(m) = \left(g_i(m)\right)_{i\in I}$ ولنبرهن أن h تشاكل مودولي :

$$\forall m, m' \in M \Rightarrow h(m+m') = \left(g_i(m+m')\right)_{i\in i}$$

$$= \left(g_i(m)\right)_{i\in I} + \left(g_i(m')\right)_{i\in I} = h(m) + h(m')$$

وكذلك $\alpha \in R$, $\forall m \in M$ فإن

$$h(\alpha.m) = \left(g_i(\alpha.m)\right)_{i\in I} = \left(\alpha.g_i(m)\right)_{i\in I}$$

$$= \alpha.h(m)$$

أي ان h تشاكل مودولي

من جهة ثانية .. من أجل كل $i \in I$

$$(\mathrm{P}_{r_i} o h)(m) = P_{r_i}(h(m))$$

$$= P_{r_i}\big(g_i(m)\big)_{i\in I} = g_i(m)$$

أي أن h يجعل المخطط تبديلي :

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g_i"] \\
\prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "P_{r_i}"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

وإن h وحيد لأنه وجد تشاكل آخر $k: M \to \prod_{i\in I} M_i$

$$P_{r_i} o k = g_i$$

فإن $\big(k(m)\big)_i = g_i(m) = \big(h(m)\big)_i$

أي أن $k = h$ إذا h وحيد $\Rightarrow \big(\prod M_i, P_{r_i}\big)_{i\in I}$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

الجداء المرافق : لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R يعرف الجداء المرافق لهذا والأسرة على أنه الزوج $(C,(f_i)_{i\in I})$ حيث C مودول على الحلقة R و $f_i: M_i \to C$ والأسرة تشاكلات

$$g_i: M_i \to M$$

يوجد تشاكل مودولي وحيد

$h: C \to M$ يجعل المخطط التالي تبديليا :

أي أن $h o f_i = g_i$

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i"'] & M \\
C \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

مبرهنة : إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R وكان $(C,(f_i)_{i\in I})$ جداء مرافق لهذه الأسرة فإن : f_i متباين لكل $i\in I$ (تترك للطالب)

مبرهنة : إذا كان $(C,(f_i)_{i\in I})$ جداء مرافقا للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإن القضايا الآتية متكافئة :

١- $(C',(f_i')_{i\in I})$ جداء مرافق لهذه الأسرة

٢- يوجد تماثل مودولي $h: C\to C'$ بحيث $hof_i = f_i'$ لكل $i\in \mathrm{I}$

الإثبات :

$(1)\Rightarrow(2)$ بما أن $(C,(f_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من أجل المودول C' والأسرة $(f_i')_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد : $h: C\to C'$ يجعل المخطط التالي تبديلي :

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i'"] \arrow[d, "f_i"'] & C' \\ C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

وبما أن $(C',(f_i')_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنة من اجل المودول C والأسرة $(f_i)_{i\in I}$يوجد تشاكل مودولي وحيد $k: C'\to C$ ويجعل المخطط التالي تبديلي :

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "f_i'"'] & C \\ C' \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

أي:

$kof_i' = f_i$ أي أنه من اجل كل $i\in I$: $hof_i = f_i'$ و $kof_i' = f_i$

نعوض : $ko(hof_i) = f_i$

$(koh)of_i$ أي أن $koh = I_c$

وبطريقة مشابهة نجد :

$hok = I_c$ أي أن h تماثل ..

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "f_i'"'] & C \\ C' \arrow[ur, "koh"'] & \end{tikzcd}$$

$(1) \Leftarrow (2)$ لدينا $hof_i = f_i'$ لكل $i \in I$ علما بأن h تماثل $\Leftarrow$ يوجد h^{-1} ومنه

$$h^{-1}\text{o}(hof_i) = h^{-1}of_i' \Rightarrow h^{-1}of_i' = f_i$$

وبما أن $(C, (f_i)_{i\in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من أجل أي مودول ل M وأي أسرة تشاكلان مودولية

$v: C \to \text{M}$ يجعل المخطط التالي تبديليا

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i"'] & M \\ C \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

لنأخذ المخطط :

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i'"'] & M \\ C' \arrow[ur, "voh^{-1}"] \arrow[d, "h^{-1}"'] & \\ C \arrow[uur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

إذا يوجد تشاكل مودولي وحيد $h' = voh^{-1}$

بحيث $h': C' \to M$ يصبح المخطط المجاور تبديلي :

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i'"'] & M \\ C' \arrow[ur, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

وذلك لأن :

$$h'of_i' = (voh^{-1})of_i' = vo(h^{-1}of_i')$$

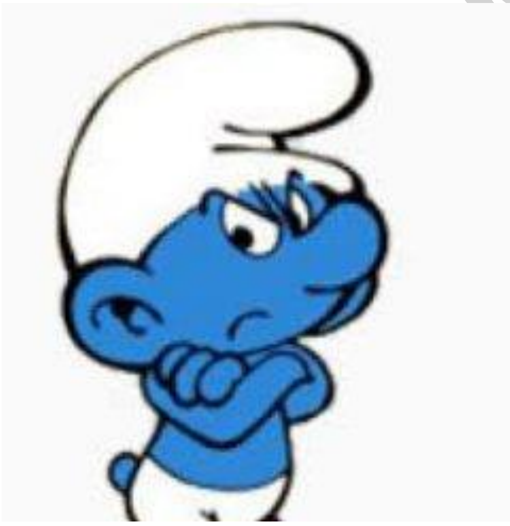
$$vof_i = g_i$$

وهذا يعني أن $(C', (f_i')_{i \in I})$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i \in I}$

المجموع المباشر الخارجي : لتكن $(M_i)_{i \in I}$ اسرة مودولات على حلقة R ولتكن S مجموعة جزئية من المودول $\prod_{i \in I} M_i$ مؤلف من العنصر $(m_i)_{i \in I}$ بحيث $m_i = 0$ من أجل جميع $i \in I$ باستثناء عدد منته منها

يمكن التحقق من أن S مودول جزئي من $\prod_{i \in I} M_i$ ويسمى المجموع المباشر الخارجي للأسرة $(M_i)_{i \in I}$

ويرمز له $\bigoplus_{i \in I} M_i$



انتهت المحاضرة

إعداد: هلا همج – رغد جوده – بكر مشرف