◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة الحادية و العشرون و الثانية و العشرون (الأخيرة)

عنوان المحاضرة : الصفات العددية للمتغيرات والأشعة العشوائية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ معامل الارتباط وخصائصه.
٢ـ الدوال المولدة للعزوم
٣ـ دوال مميزة

معامل الارتباط وخصائصه

تعريف ليكن X, Y متغيرين عشوائيين لهما عزوم من المرتبة الثانية :

$$(E|Y|^2 < v \,, E|X|^2 < v)$$

نعرف معامل الارتباط بين المتغيرين X, Y بالعلاقة :

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}.\sqrt{V(Y)}} = \frac{\sigma_{X.Y}}{\sigma_X.\sigma_Y}$$

♥ **نتيجة** إذا كان X و Y مستقلان عشوائياً فإنَّ : $\rho(X,Y) = 0$

لأنَّ : $cov(X,Y) = 0$

خواص معامل الارتباط

١) $\rho(X,X) = 1$ ، لأنَّ : $\rho(X,X) = \frac{cov(X,X)}{\sqrt{V(X)}.\sqrt{V(X)}} = \frac{V(X)}{V(X)} = 1$

٢) $-1 \le \rho(X,Y) \le +1$

البرهان باستخدام متراجحة شوارتز : $\left(E(X.Y)\right)^2 \le E(X^2).E(Y^2)$

باستبدال X بـ $X-E(X)$ ، و Y بـ $Y-E(Y)$ في المتراجحة نجد أنَّ :

$$\left(E\left(X-E(X).\left(Y-E(Y)\right)\right)\right)^2 \le E\left(X-E(X)\right)^2.E\left(Y-E(Y)\right)^2$$

$$\Rightarrow [cov(X,Y)]^2 \le V(X).V(Y) \Rightarrow \frac{[cov(X,Y)]^2}{V(X).V(Y)} \le 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}.\sqrt{V(Y)}}\right]^2 \le 1 \Rightarrow \left(\rho(X,Y)\right)^2 \le 1$$

$$\Rightarrow |\rho(X,Y)| \le 1 \Rightarrow -1 \le \rho(X,Y) \le +1$$

$$\rho(a.X+b\,,c.Y+d) = \begin{cases} \rho(X,Y) & ; a.c>0 \\ -\rho(X,Y) & ; a.c<0 \end{cases}$$

البرهان بالتعريف لدينا : $\rho(a.X+b\,,c.Y+d) = \frac{cov(aX+b\ \ ,\ \ c.Y+d)}{\sqrt{V(a.X+b)}.\sqrt{V(c.Y+d)}}$

ومنه حسب خواص cov و ρ $= \frac{a.c.cov(X,Y)}{|a|.\sqrt{V(X)}.|c|\sqrt{V(Y)}}$

$$= \frac{a.c}{|a|.|c|}.\rho(X,Y) = \begin{cases} \rho(X,Y) & ; a.c>0 \\ -\rho(X,Y) & ; a.c<0 \end{cases}$$

نتيجة بدون برهان : الشرط الازم والكافي ليكون X و Y مرتبطين خطياً هو أنَّ يكون $\rho^2(X,Y)=1$

تمرين : ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة :

$Y \quad / \quad X$	-1	0	1
-2	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{0}{10}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

١- استنتج جدولا الكثافة الهامشية لـ X,Y

٢- عين $\rho(x,y)$ و هل X,Y مستقلان عشوائياً

الحل:

١-

$$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x,y)$$

X	-1	0	1	$\sum$
$f_X(x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

و كذلك :

$$f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x,y)$$

Y	-2	0	2	$\sum$
$f_Y(x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

٢- لحساب ρ نحتاج للمقادير : $cov(XY), EY^2, EY, EX^2, EX, V(Y), V(X), EXY$

$$EX = \sum_x x f_X(x) = (-1)\left(\frac{4}{10}\right) + (0)\left(\frac{3}{10}\right) + 1\left(\frac{3}{10}\right) = -\frac{1}{10}$$

$$EY = \sum_y y f_Y(y) = (-2)\left(\frac{4}{10}\right) + (0)\left(\frac{2}{10}\right) + (2)\left(\frac{4}{10}\right) = 0$$

$$EX^2 = \sum_x x^2 f_X(x) = (-1)^2\left(\frac{4}{10}\right) + (0)^2\left(\frac{3}{10}\right) + 1^2\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{7}{10}$$

و بشكل مشابه $EY^2 = \frac{32}{10}$

و أيضاً $V(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{69}{100}$

$$V(Y) = \frac{32}{10}$$

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyf_{XY}(x,y)$$

$$= (-1)(-2)\left(\frac{2}{10}\right) + (0)(-2)\left(\frac{1}{10}\right) + 1(-2)\left(\frac{1}{10}\right) + (-1)(0)\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$+ (0)(0)(0) + 1(0)\left(\frac{1}{10}\right) + (-1)(2)\left(\frac{1}{10}\right) + 0(2)\left(\frac{2}{10}\right) + 1(2)\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$\Rightarrow EXY = \frac{2}{10}$$

$$cov(X,Y) = EXY - EX\,EY = \frac{2}{10}$$

$$then\ \rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\frac{2}{10}}{\sqrt{\frac{69}{10}}\sqrt{\frac{32}{10}}} = 0{,}135 \neq 0$$

و بالتالي هما غير مستقلان احتمالياً

تمرين : ليكن X, Y متغيرين عشوائيين كثافتهما المشتركة :

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 6xy(2-x-y) & : 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $\rho(X,Y)$ ، و هل X, Y مستقلان احتمالياً

الحل : أولاً نوجد الكثافة الهامشية لكل من المتحولين :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_0^1 6xy(2-x-y)dy = x(4-3x) \quad : 0 \leq x \leq 1$$

و بالمثل نجد أن :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_0^1 6xy(2-x-y)dx = y(4-3y) \quad : 0 \leq y \leq 1$$

ثانياً : نوجد المقادير اللازمة لحساب معامل الارتباط:

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx=\int_{0}^{1} x.x(4-3x)dx=\frac{7}{12}$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2f_X(x)dx=\int_{0}^{1} x^2.x(4-3x)dx=\frac{2}{5}$$

$$V(X)=EX^2-(EX)^2=\frac{2}{5}-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{43}{720}$$

بالمثل نجد أن :

$$EY=\frac{7}{12} \quad , \quad V(Y)=\frac{43}{720}$$

و من ثم :

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{XY}(x,y)dx\,dy=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} xy.6xy(2-x-y)dx\,dy=\frac{1}{3}$$

و عليه :

$$cov(X,Y)=E(XY)-EX\,EY=\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\frac{7}{12}=-\frac{1}{144}$$

و أخيراً يكون :

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{43}{720}}\sqrt{\frac{43}{720}}}=-\frac{5}{43}$$

و بما أن $\rho(X,Y)\neq 0$ فهما غير مستقلين احتمالياً

الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي وخواصها

تعريف ليكن Y متغيراً عشوائياً كثافته $f_Y(y)$ ، نعرف الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي Y :

$$M_Y(t) := E(e^{t.y}) := \begin{cases} \sum_{y\in\mathbb{R}_Y} e^{t.y}.f_Y(y) & ; \text{منقطع } Y \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t.y}.f_Y(y).dy & ; \text{مستمر } Y \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

خواص الدالة المولدة للعزوم

$$1)\ M_{aY+b}(t) = e^{tb}.M_Y(at) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,;\ \forall\, a,b \in \mathbb{R}$$

◀ **البرهان**

$$M_{aY+b}(t) := E(e^{t.(aY+b)}) = E(e^{at.y}.e^{t.b}) = e^{t.b}.E[e^{at.Y}] = e^{tb}.M_Y(at)$$

$$2)\ m_r := E(Y^r) = \frac{d^r M_Y(t)}{dt^r}\bigg|_{t=0}$$

الاشتقاق أولاً من المرتبة r بالنسبة لـ t ، وثم التعويض بـ $t = 0$ وبالتالي :

$$E(Y) = M'_Y(t)|_{t=0}$$

$$E(Y^2) = M''_Y(t)|_{t=0}$$

3) إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإنَّ :

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t).M_Y(t)$$

4) إذا كانت $X_1, \dots, X_n$ مجموعة متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس توزيع المتغير العشوائي X (متطابقة التوزيع) عندئذٍ :

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n \big(M_X(t)\big) = \big(M_X(t)\big)^n$$

بسبب تطابق توزيعهم مع توزيع X .

5) هناك توزيع احتمالي وحيد له الدالة المولدة للعزم (t) .

6) إذا كانت X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإنَّ :

$$M_{(X+Y)}(t) = M_X(t).M_Y(t)$$

الإثبات $M_{X+Y}(t) = E\left[e^{t(X+Y)}\right] = E[e^{tx}.e^{ty}]$

وفي حالة الاستمرار :

$$E[e^{tX}.e^{tY}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}.e^{ty}.f(x,y).dx.dy$$

وبما أنَّ X و Y مستقلين فإنَّ : $f(x,y)=f_X(x).f_Y(y)$

$$M_{X+Y}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}.e^{ty}.f_X(x).f_Y(y).dx.dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f_X(x).dx+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ty}.f_Y(y).dy$$

$$=M_X(t).M_Y(t)$$

مثال ليكن X متغيراً عشوائياً دالته الاحتمالية :

$$f_X(x)=\begin{cases}p & ; x=1\\ q & ; x=0\\ 0 & ; \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

عين $M_X(t)$ واحسب العزوم من المرتبة الثالثة واستنتج تباين X بحيث : $0<p<1$ و $p+q=1$

الحل

$$M_X(t):=E(e^{tx})\coloneqq\sum_{x_i\in\mathbb{R}_x}e^{(tx_i)}.f_X(x_i)$$

$$=e^{t(0)}.q+e^{t(1)}.p \qquad \text{لأنَّ } x \text{ منقطع}$$

$$M_X(t)=q+e^t.p\ \ ;\forall\, t\in\mathbb{R}$$

$$m_1\coloneqq E_X=\left(M_X(t)\right)'_{t=0}=(p.e^t)_{t=0}=p$$

$$m_2\coloneqq E_{X^2}=\left(M_X(t)\right)''_{t=0}=(p.e^t)_{t=0}=p$$

$$m_3\coloneqq E_{X^3}=\left(M_X(t)\right)'''_{t=0}=(p.e^t)_{t=0}=p$$

$$V(X)=E_{X^2}-(E_X)^2=p-p^2=p(1-p)=pq$$

تمرين: ليكن X متغيراً عشوائياً كثافته : $f(x)=\begin{cases}1 & : 0\le x<1\\ 0 & : \text{خلاف ذلك}\end{cases}$، عين $M_X(t)$

الحل:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_0^1 e^{tx}.1dx = \frac{e^t}{t} - \frac{1}{t} = \frac{e^t - 1}{t} : t \in R$$

الدالة المولدة لعزوم شعاع عشوائي وخواصها

تعريف ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة $f_{(X,Y)}(x,y)$ ، وإذا كان $E(e^{t_1X+t_2Y})$ موجوداً من أجل قيم $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$ ، فإننا نعرف الدالة المولدة لعزم الشعاع العشوائي (X,Y) :

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) := E(e^{t_1X+t_2Y}) := \begin{cases} \sum_x \sum_y e^{t_1x+t_2y}.f_{X,Y}(x,y) \; ; \text{منقطع } (X,Y) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x+t_2y} f_{X,Y}(x,y).dx.dy \; \text{مستمر} (X,Y) \end{cases}$$

خواص الدالة $M_{X,Y}(t_1,t_2)$

١) إنَّ $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ تحدد توزيع (X,Y) ، وتوزيع X وتوزيع Y بسبب الوحدانية .

٢) $M_{(X,Y)}(t_1,0) = M_X(t_1) = E(e^{t_1X})$

٣) $M_{X,Y}(0,t_2) = M_Y(t_2) = E(e^{t_2Y})$

٤) $E(X^k.Y^m) = \left[\frac{\partial^{k+m} M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1^k.\partial t_2^m}\right]_{t_1=0\ ,t_2=0}$

٥) $E(X) = \left[\frac{\partial M_{X,Y}(t_1,0)}{\partial t_1}\right]_{t_1=0}, E(Y) = \left[\frac{\partial M_{X,Y}(0,t_2)}{\partial t_2}\right]_{t_2=0}$

$$E(X.Y) = \left[\frac{\partial^2 M_{X,Y}(t_1,t_2)}{\partial t_1.\partial t_2}\right]_{-}(t_1 = 0 \,, t_2 = 0)$$

◄**ملحوظة** من خاصة الوحدانية للدالة المولدة للعزوم ، فإننا نقول عن متغيرين عشوائيين X,Y إنهما مستقلان عشوائياً إذا وفقط إذا كان : $M_{X,Y}(t_1,t_2) = M_Y(t_1).M_Y(t_2)$

مثال ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً دالة كثافته المشتركة :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & ; 0 < x < y < +\infty \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $M_{X,Y}(t_1,t_2)$ واستنتج منها $M_X(t_1)$ و $M_Y(t_2)$.

الحل

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) := E[e^{t_1X+t_2Y}] := \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x+t_2y}.f_{X,Y}(x,y).dx.dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x+t_2y}.e^{-y},dy\,.dx = \int_{0}^{+\infty} e^{t_1x}.[\int_{x}^{+\infty} e^{(t_2-1)y}.dy]\,.dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{(t_1)x}.\left[\frac{e^{(t_2-1)y}}{t_2-1}\right]_x^{+\infty}.dx$$

وإذا كان $(t_2-1)<0 \Leftarrow t_2<1$ ، وعندئذٍ :

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \int_{0}^{+\infty} e^{t_1x}\left[-\frac{e^{(t_2-1)x}}{t_2-1}\right].dx = \frac{1}{1-t_2}\int_{0}^{+\infty} e^{(t_1+t_2-1)x}.dx$$

$$= \frac{1}{1-t^2}\left[\frac{e^{(t_1+t_2-1)x}}{t_1+t_2-1}\right]_0^{+\infty}$$

وإذا كان $(t_1+t_2-1)<0 \Leftarrow t_1+t_2<1$ وعندئذٍ :

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \frac{1}{1-t^2}\left[-\frac{1}{t_1+t_2-1}\right]$$

$$\Rightarrow M_{X,Y}(t_1,t_2) = \left(\frac{1}{1-t_2}\right)\left(\frac{1}{1-t_1-t_2}\right)\ ;\ t_2<1\,,t_1+t_2<1$$

ومنه نستنتج : $\mathrm{M_X}(t_1) = M_{X,Y}(t_1,t_2=0) = \frac{1}{1-t_1}\ ;\ t_1<1$

ونستنتج : $M_Y(t_2) = M_{X,Y}(t_1=0,t_2) = \frac{1}{(1-t_2)^2}\ ;t_2<1$

الدالة المميزة لمتغير عشوائي وخواصها

تعريف ليكن Y عشوائياً كثافته الاحتمالية $f_Y(y)$ ، نعرف الدالة المميزة للمتغير العشوائي Y بـ :

$$\varphi_{\mathrm{Y}}(t) := E\left(e^{itY}\right);t\in\mathbb{R}$$

$$:= \begin{cases} \sum_{y_i \in \mathbb{R}_y} e^{ity}.f_Y(y) & ; \text{ منقطع } Y \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}.f_Y(y).dy & ; \text{ مستمر } Y \end{cases}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \;; i = \sqrt{-1}$$

◀**ملاحظة** بما أنَّ $\left|e^{itx}\right| = 1$ ، $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x).dx = 1$ فإنَّ :

$$|\varphi_X(x)| = 1 \;;\; |\varphi_X(t)| \leq 1$$

مثال ليكن Y متغيراً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية :

$$f_Y(y) = \begin{cases} C_y^n.P^y.q^{n-y}; y = 0,1,2,\dots,n\,; (0 < P < 1\,; q = 1 - P) \\ 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين الدالة المولدة للعزوم و الدالة المميزة لـ Y .

الحل

إنَّ لـ Y التوزيع الجدائي الثنائي بوسيطين (P,n)

$$M_Y(t) := E(e^{ty})$$

$$= \sum_y e^{ty}.f_Y(y) = \sum_{y=0}^{y=n} e^{ty}.C_y^n.P^y.q^{n-y} = \sum_{y=0}^{y=n} C_y^n(P.e^t).q^{n-y}$$

وحسب منشور ثنائي حد نيوتن $\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{k=0}^{k=n} \boldsymbol{C_k^n}.\boldsymbol{a^k}.\boldsymbol{b^{n-k}}}$

فإنَّ $M_Y(t) = (P.e^t + q)^n$

وأيضاً إنَّ : $\varphi_Y(t) := E\left(e^{itY}\right)$

$$= \sum_y e^{ity}.f_Y(y) = \sum_{y=0}^{y=n} e^{ity}.C_y^n.P^y.q^{n-y} = \sum_{y=0}^{y=n} C_y^n\left(P.e^{it}\right)^y.q^{n-y}$$

فحسب منشور ثنائي حد نيوتن نجد أنَّ : $\varphi_y(t) = \left(P.e^{it} + q\right)^n$

خواص الدالة المميزة لـ Y

$$(1)\; \varphi_{aY+b}(t) = e^{itb}.\varphi_Y(at)$$

(2) إذا كانت $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ متغيرات عشوائية مستقلة فإنَّ :

$$\varphi_{\sum_{i=1} Y_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{Y_i}(t)$$

$$\varphi_Y^k(t)\Big|_{t=0} = (i)^k . E(Y^k) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_Y'(t)|_{t=0} = i\,.E(Y) \\ \varphi_Y''(t)|_{t=0} = i^2 . E(Y) = -EY^2 \\ \varphi_Y'''(t)|_{t=0} = i^3\,.E(Y) = -i.EY^3 \\ \varphi_Y^4(t)|_{t=0} = i^4 . E(Y) = EY^4 \end{cases}$$

تمرين : ليكن X متغيراً كثافته:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & : x > 0 \\ 0 & : \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عين $\varphi_X(t)$

الحل : $\varphi_X(t) = E\left(e^{itx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} 3e^{-3x} dx = 3\left[\frac{e^{(it-3)x}}{it-3}\right]_0^{\infty}$

- إذا كان $|it-3| < 0$ و بالتالي $t < 3$ فإن :

$$\varphi_X(t) = \frac{3}{3-it} \quad : t < 3$$

الدالة المميزة لشعاع عشوائي (X,Y)

كثافته الاحتمالية المشتركة $f(x,y)$ ، يعرف بـ :

$$\varphi_{X,Y}(t_1,t_2) := E\left[e^{i(t_1X+t_2X)}\right]$$

$$= \begin{cases} \sum_x \sum_y e^{i(t_1x+t_2y)} . f(x,y) & ; \ (X,Y) \text{ منقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t_1x+t_2y)} . f(x,y).dx.dy & ; \ (X,Y) \text{ مستمر} \end{cases}$$

انتهت المحاضرة

بذلك نكون قد أنهينا مقررنا و نرجو من الله أن نكون قد وفقنا بتقديمه كما يجب — Syria Math Team

إعداد: خديجة الرفاعي – ولاء المبخر – لمى حبشية