المحاضرة الرابعة عشرة

14

نظري ☑
عملي ☐

◄ دكتور المادة: خالد ضنيفس

◄ عنوان المحاضرة: شبه مسارات الزيادة

إيجاد التدفق الأعظمي باستخدام شبه مسار الزيادة :

ليكن لدينا المسار :

$$Q = \langle s, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_k}, t \rangle$$

نسمي هذا المسار شبه مسار إذا وجد فيه قوس راجع (ظلفي) Back arc

$$\exists \vec{e_i} \in Q \quad ; \quad \vec{e_i} = [v_i , v_{i-1}]$$

ملاحظة : نقول عن القوس $\vec{e_i}$ إنه قوس أمامي Farc إذا تحقق :

$$\vec{e_i} = [v_{i-1} , v_i]$$

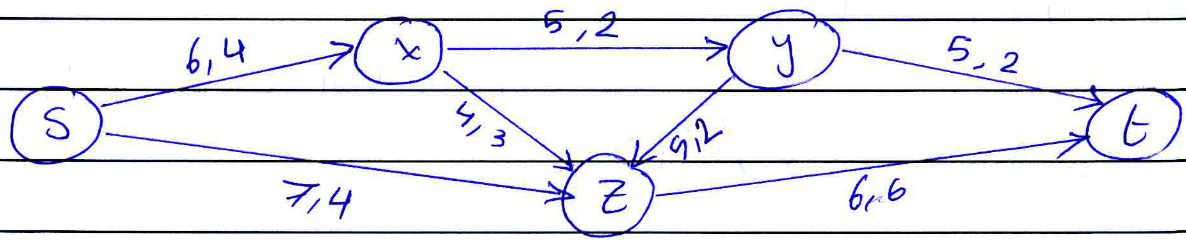
ونقول إنه قوس خلفي Barc إذا تحقق :

$$\vec{e_i} = [v_i , v_{i-1}]$$

- نعرف دالة التدفق على الشكل التالي :

$$f = \begin{cases} f(\vec{e}) + \Delta Q & : \text{if } \vec{e} \in Farc \\ f(\vec{e}) - \Delta Q & : \text{if } \vec{e} \in Barc \\ 0 & : \text{if } \vec{e} \notin Q \end{cases}$$

مثال : ليكن لدينا البيان :



((التدفق على هذه الشبكة $f = 4+4 = 2+6 = 8$))

ولنوجد التدفق الأعظمي باستخدام شبه مسارات الزيادة :

- لنأخذ شبه المسار التالي :

$Q_1 = \langle s, z, y, t \rangle$

(حيث القوس الراجع في هذا المسار هو $[z, y]$)

نحسب قيم الزيادة :

$$\Delta_Q = \begin{cases} cap(\vec{e}) - f(\vec{e}) & if : \vec{e} \in Farc \\ f(\vec{e}) & if : \vec{e} \in Barc \\ 0 & if : \vec{e} \notin Q \end{cases}$$

أي أنه إذا كان القوس أمامياً نأخذ الفرق بين السعة والتدفق، وإذا كان القوس راجعاً نأخذ قيمة التدفق نفسها، وإذا لم ينتمِ إلى المسار القيمة (0).

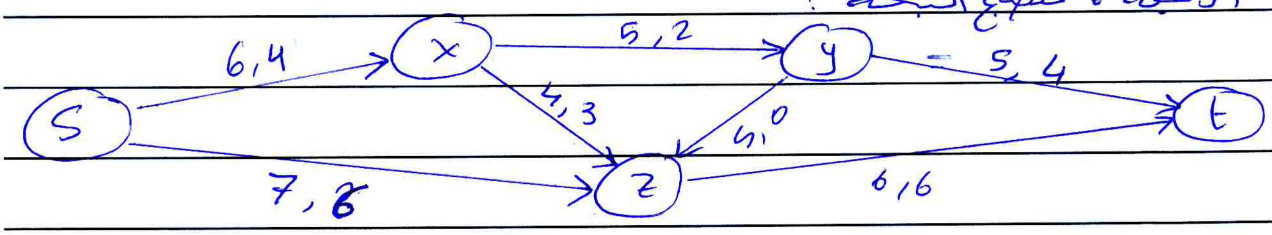
$$\boxed{\max(\Delta_Q) = \min \Delta_Q \Big|_{\vec{e}_i \in Q}}$$

إذاً قيم الزيادة المطلوبة:

$$\max(\Delta_{Q_1}) = \min\{7-4 \,,\, \underset{((\text{لأنه قوس راجع}))}{\underline{\underline{2}}} \,,\, 5-2\}$$

$$= \min\{3, 2, 3\} = 2$$

- القيمة التي حصلنا عليها تضاف إلى تدفق الأقواس الأمامية وتطرح من تدفق الأقواس الراجعة، فتصبح الشبكة :



أصبح التدفق على هذه الشبكة :

$f = 4 + 6 = 10$

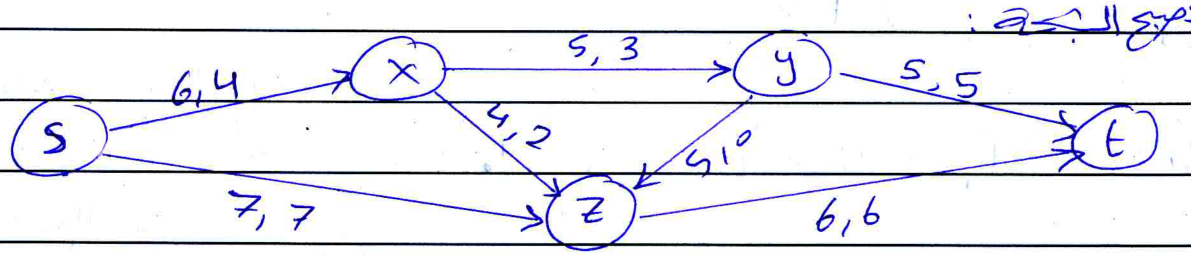
- الآن لنأخذ شبه المسار التالي :

$Q_2 = \langle s, z, x, y, t \rangle$

وقيمة الزيادة :

$$\max(\Delta Q_2) = \min\{7-6,\ 3,\ 5-2,\ 5-4\}$$
$$= \min\{1,\ 3,\ 3,\ 1\} = 1$$

فتصبح الشبكة :



ملاحظة : نحصل على التدفق الأعظمي إذا وجدت قاطعة مشبعة ، أي قيمة التدفق فيها تساوي قيمة السعة .

لنأخذ القاطعة :

$$\{<s,z,x,y>\ ,\ t\}$$

نجد أن :

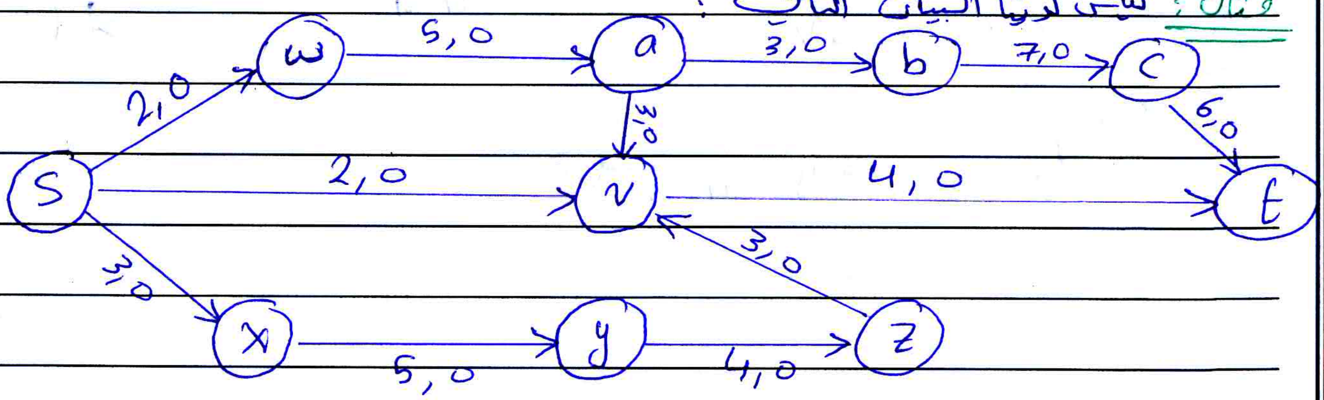
$$\sum_{\vec{e} \in \{<s,z,x,y>,t\}} f(\vec{e}) = Cap(\{\{s,z,x,y\},t\})$$

وبذلك يكون التدفق الأعظمي على هذه الشبكة هو :

$$f^* = 4+7 = 5+6 = 11$$

ملاحظة : لتحسين التدفق في شبكة يمكننا أن نستخدم مسار الزيادة أو شبه مسار الزيادة .
(نختار الأسرع بينهما) .

مثال : ليكن لدينا البيان التالي :



نلاحظ أن جميع التدفقات على جميع الأقواس تساوي الصفر ، لذلك نبحث عن المسارات الممكنة لتحسين التدفق .

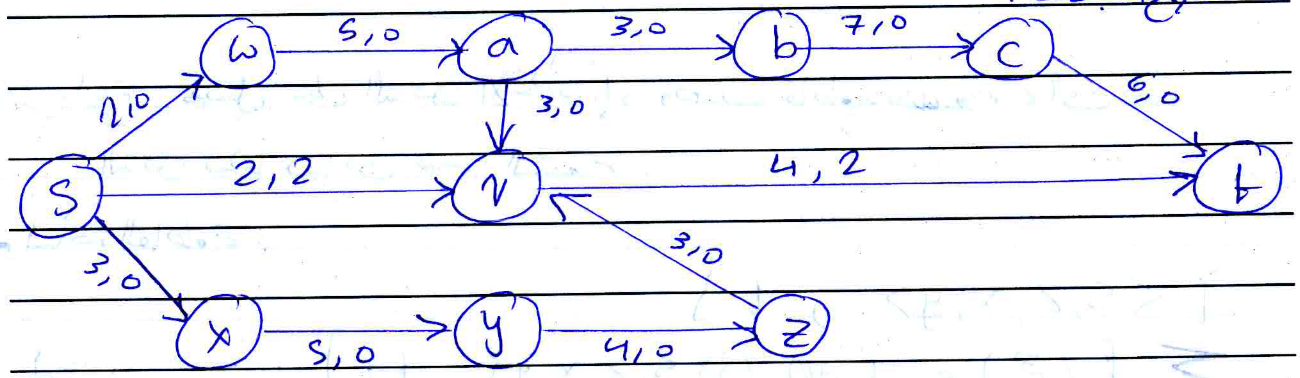
▬ لنأخذ المسار الأول :

$P_1 = \langle s, v, t \rangle$

ونوجد مقدار الزيادة :

$\max(\Delta P_1) = \min\{2-0, 4-0\} = 2$

فتصبح الشبكة :



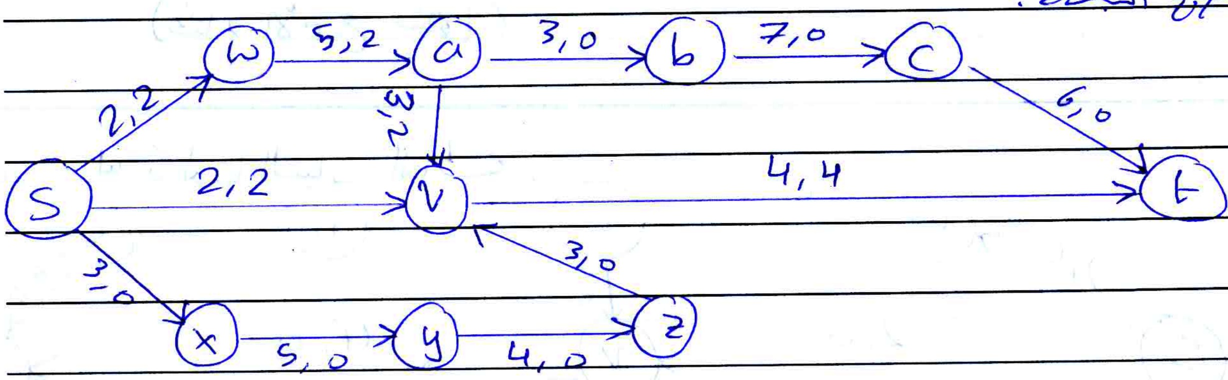
▬ المسار الثاني :

$P_2 = \langle s, w, a, v, t \rangle$

ومقدار الزيادة :

$\max(\Delta P_2) = \min\{2, 5, 3, 2\} = 2$

فتصبح الشبكة :



- الآن لنأخذ المسار الثالث:

$P_3 = \langle s, x, y, z, v, a, b, c, t \rangle$

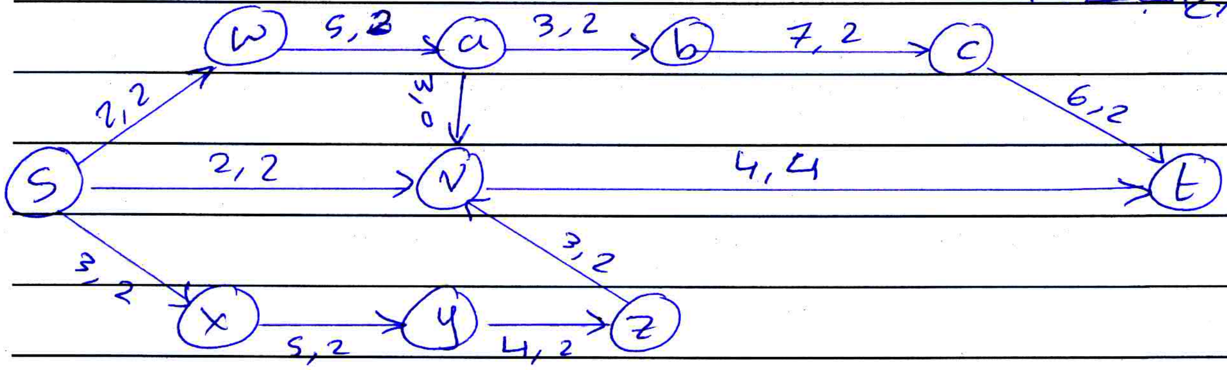
(لاحظ أن هذا المسار هو شبه مسار زيادة لأنه يحوي القوس الراجع [v, a]))

مقدار الزيادة:

$$\max(\Delta P_3) = \min\{3-0, 5-0, 4-0, 3-0, 2, 3-0, 7-0, 6-0\}$$

$$= \min\{3, 5, 4, 3, 2, 3, 7, 6\} = 2$$

فتصبح الشبكة:



- نلاحظ أنه لا يوجد أي مسار (ولا شبه مسار) يمكننا من تحسين التدفق
إذاً التدفق الأعظمي هو:

$$f^* = 2 + 2 + 2 = 2 + 4 = 6$$

طلب إضافي: أوجد القاطعة الصغرى:

نبحث عن قاطعة تكون سعتها مساوية للتدفق الأعظمي، وهي القاطعة:

$V_s = \{s, x, y, z, v\}$, $V_t = \{w, a, b, c, t\}$

حيث:

$Cap(\langle V_s, V_t \rangle) = 6$, $f^* = 6$

سنبدأ في المحاضرة القادمة بمسألة السيارة (التوصيلة)...

انتهت المحاضرة

المحاضرة الثالثة عشرة

◄ دكتور المادة: خالد ضنيقس

◄ عنوان المحاضرة: مسارات الزيادة

نظري ☑ عملي ☐

إيجاد التدفق الأعظمي باستخدام مسار موجه من عقدة البداية إلى عقدة النهاية:

أولاً: مسار الزيادة:

هو مسار موجه كل أقواسه بنفس الاتجاه، وهو مسار يمكن زيادة التدفق عليه بكمية متساوية على جميع الأقواس بحيث نحافظ على كمية التدفق الممكنة.

((عادةً تكون كمية التدفق الممكنة مساوية السعة))

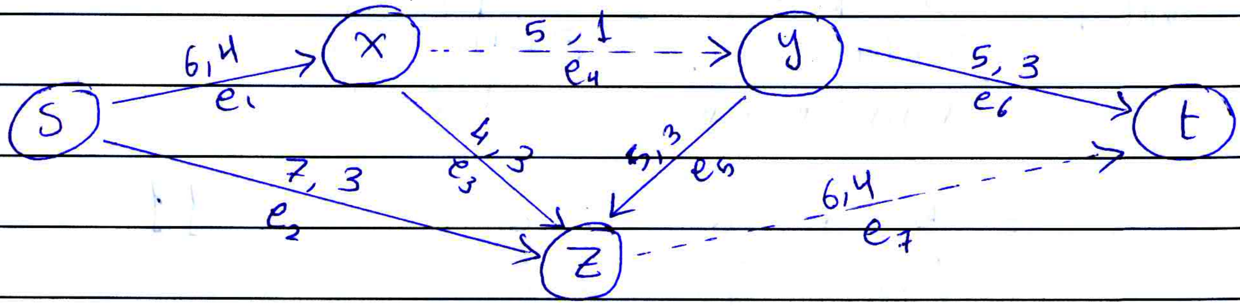
- الكمية المضافة هي أصغر كمية لحاصل طرح كمية التدفق من السعة على كل قوس:

$p = < s, \vec{e_1}, v_1, \dots, \vec{e_n}, t >$

$\delta = \min_i \{ Cap(\vec{e_i}) - f(\vec{e_i}) \}$

الكمية المضافة — السعة — كمية التدفق

مثال: ليكن لدينا البيان التالي:



وليكن لدينا المسار التالي:

$p_1 = < s, \vec{e_1}, x, \vec{e_4}, y, \vec{e_6}, t >$

أوجد قيمة الزيادة على هذا المسار.

- التدفق الأعظمي: ((يجب أن يبقى متساوياً بين عقدة المصدر s وعقدة الهدف t))

$$val\ f = \sum_{\substack{\vec{e} \in ind(t)}} f(\vec{e_i}) - \sum_{\substack{\vec{e} \in out(t)}} f(\vec{e_i})$$

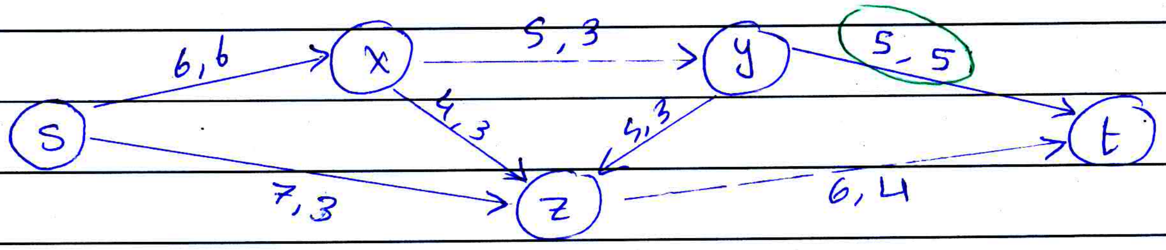
أو

$$\sum_{\vec{e} \in out(s)} f(\vec{e_i}) - \sum_{\vec{e} \in ind(s)} f(\vec{e_i})$$

الكمية المضافة: $S_1 = \min\{6-4,\ 5-1,\ 5-3\}$

$= \min\{2, 4, 2\} = 2$

وبالتالي تصبح الشبكة بالشكل: ((نضيف قيمة S_1 إلى تدفق الأضلاع التي تنتمي للمسار))

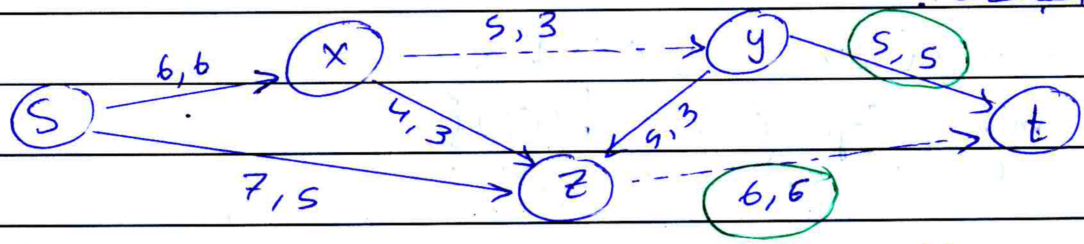


ولنأخذ المسار: $P_2 = \langle s, \vec{e_2}, z, \vec{e_7}, t \rangle$

والكمية المضافة: $S_2 = \min\{7-3,\ 6-4\}$

$= \min\{4, 2\} = 2$

فتصبح الشبكة:



ويكون التدفق الأعظمي بالنسبة لـ t (عقدة الهدف):

$$val\ f = \underbrace{\sum_{\vec{e} \in ind(t)} f(\vec{e_i})}_{\text{التدفق الداخل لـ } t} - \underbrace{\sum_{\vec{e} \in oud(t)} f(\vec{e_i})}_{\text{الخارج من } t}$$

$$= \underbrace{5}_{e_6 \text{ تدفق}} + \underbrace{6}_{e_7 \text{ تدفق}} - \underbrace{0}_{\text{لا توجد أقواس خارجة من } t} = 11$$

وبالنسبة لـ s:

$$val\ f = \sum_{\vec{e} \in oud(s)} f(\vec{e_i}) - \sum_{\vec{e} \in ind(s)} f(\vec{e_i})$$

$$= 6 + 5 - 0 = 11$$

((لم يعد بإمكاننا إيجاد أي مسار زيادة لذلك تتوقف الخوارزمية، والتدفق الأعظمي = 11))

ملاحظة: طبقاً لأي تدفق على الشبكة فإن التدفق الأعظمي:

$$val(f) \le val(f^*)$$

مجموعة الأقواس القاطعة: هي مجموعة الأضلاع التي منطلقها مجموعة العقد V_s ومستقرها V_t، حيث:

$$V_s \cup V_t = V \quad , \quad V_s \cap V_t = \emptyset$$

سعة مجموعة القطع:

$$Cap\langle V_s, V_t\rangle = \sum_{e_i \in \langle V_s, V_t\rangle} f(e_i)$$

((مجموع تدفق الأقواس ضمن هذه القاطعة))

القاطعة الصغرى Minimum Cut:

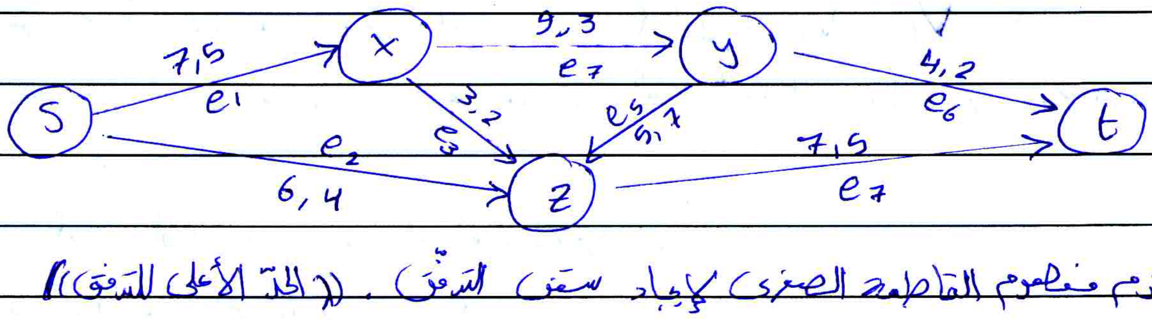
هي القاطعة التي تدفقها أصغر سعة للقاطعات الأخرى في الشبكة، أي إذا كان لدينا K قاطعة على الشبكة ND، ولتكن القاطعة الصغرى l، عندئذ:

$$Cap(l) \le \min_{i=1}^{k} \{Cap(i)\}$$

ملاحظة: التدفق الأعظمي دائماً أصغر أو يساوي سعة القاطعة الصغرى:

$$val(f^*) \le Cap(l)$$

مثال: لتكن لدينا الشبكة التالية:



استخدم مفهوم القاطعة الصغرى لإيجاد سقف التدفق. ((الحد الأعلى للتدفق))

- لنوجد سعة الشبكة من أجل كل الاحتمالات الممكنة للقواطع :

نأخذ $V_s = \{s\}$ والباقي المتمم V_t أي : $V_t = V_{ND} - V_s$

$\boxed{1}$ $Cap\langle V_s = \{s\} , V_{ND} - V_s \rangle = \underbrace{7}_{(e_1 \text{ سعة})} + \underbrace{6}_{(e_2 \text{ سعة})} = 13$

ثم نأخذ $V_t = \{t\}$:

$\boxed{2}$ $Cap\langle V_{ND} - V_t , V_t = \{t\} \rangle = \underbrace{4}_{(e_6 \text{ سعة})} + \underbrace{7}_{(e_7 \text{ سعة})} = 11$

وهكذا نأخذ كل القاطعات الممكنة:

$S_1 = \langle \{s, x\} , \{y, z, t\} \rangle$

$\boxed{3}$ $Cap(S_1) = 9 + 3 + 6 = 18$

$S_2 = \langle \{s, x, z\} , \{y, t\} \rangle$

$\boxed{4}$ $Cap(S_2) = 9 + 7 = 16$

$S_3 = \langle \{s, x, y\} , \{z, t\} \rangle$

$\boxed{5}$ $Cap(S_3) = 4 + 5 + 3 + 6 = 18$

$S_4 = \langle \{s, z\} , \{x, y, t\} \rangle$

$\boxed{6}$ $Cap(S_4) = 7 + 7 = 14$

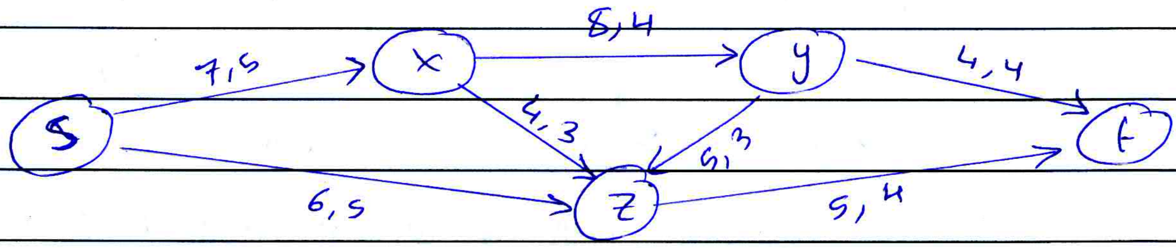
- مما سبق نجد أن القاطعة الصغرى هي $\langle V_{ND} - V_t , \{t\} \rangle$ لأنها تملك أصغر سعة ، وهذا يعني أن التدفق في كل الأحوال لا يتجاوز سعتها (11)

- إذاً بشكل عام:

التدفق الممكن لن يتجاوز سعة القاطعة الصغرى.

((وإذا تجاوزها فهو تدفق خارجي)).

مثال: أوجد الحد الأعلى للتدفق على الشبكة التالية:



بنفس الأسلوب في المثال السابق نوجد سعة جميع القاطعات الممكنة حتى نوجد القاطعة الصغرى بينها:

$S_1 = \langle \{s\}, V_{N} - \{s\} \rangle$

$Cap(S_1) = 7 + 6 = 13$

$S_2 = \langle \{s, x\}, \{y, z, t\} \rangle$

$Cap(S_2) = 8 + 4 + 6 = 18$

$S_3 = \langle \{s, z\}, \{x, y, t\} \rangle$

$Cap(S_3) = 7 + 5 = 12$

$S_4 = \langle \{s, x, z\}, \{y, t\} \rangle$

$Cap(S_4) = 8 + 5 = 13$

$S_5 = \langle \{s, x, y\}, \{z, t\} \rangle$

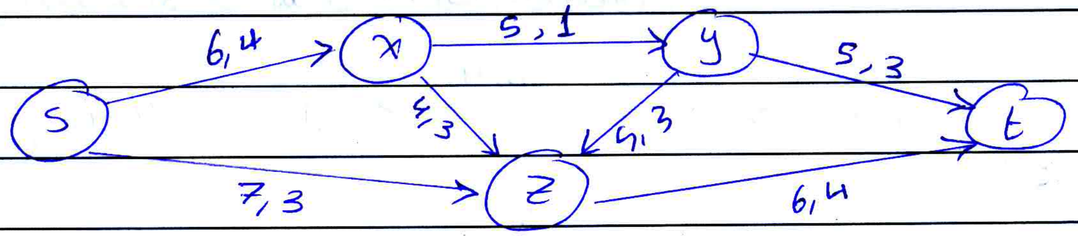
$Cap(S_5) = 6 + 4 + 5 + 4 = 19$

$S_6 = \langle V_{N} - \{t\}, \{t\} \rangle$

$Cap(S_6) = 4 + 5 = 9$

القاطعة الصغرى هي S_6 لأنها تملك أصغر سعة، وبالتالي التدفق لا يمكن أن يتجاوز (9)

مثال: أوجد الحد الأعلى للتدفق الأعظمي في الشبكة التالية، واستخدم مسار الزيادة لتحسين التدفق على هذه الشبكة:



لإيجاد الحد الأعلى للتدفق نوجد القاطعة الصغرى كما سبق:

$S_1 = \langle V_s = \{s\}, V_N - V_s \rangle \Rightarrow Cap(S_1) = 6+7 = 13$

$S_2 = \langle V_N - V_t, V_t = \{t\} \rangle \Rightarrow Cap(S_2) = 5+6 = 11$

$S_3 = \langle \{s, x\}, \{y, z, t\} \rangle \Rightarrow Cap(S_3) = 16$

$S_4 = \langle \{s, x, z\}, \{y, t\} \rangle \Rightarrow Cap(S_4) = 11$

$S_5 = \langle \{s, x, y\}, \{z, t\} \rangle \Rightarrow Cap(S_5) = 21$

$S_6 = \langle \{s, z\}, \{x, y, t\} \rangle \Rightarrow Cap(S_6) = 12$

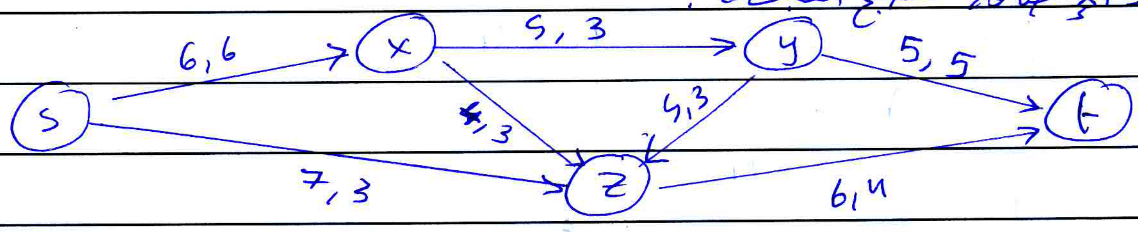
- إذاً القاطعة الصغرى هي S_4، والتدفق لا يتجاوز (11)
- الآن نأخذ مساراً، وليكن مثلاً:

$P_1 = \langle s, x, y, t \rangle$

ونوجد كمية الزيادة:

$\delta_1 = \min\{2, 4, 2\} = 2$

بعد الإضافة تصبح الشبكة:



ومن هذه الشبكة المعدل التدفق هو $f = 9$

((نوجده من مجموع تدفق الأقواس الخارجة من عقدة المصدر أو الداخلة إلى عقدة الهدف))

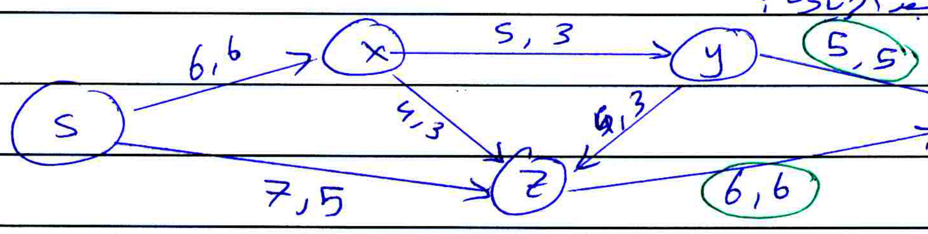
- نأخذ المسار التالي:

$P_2 = \langle s, z, t \rangle$

وكمية الزيادة:

$\delta_2 = \min\{4, 2\} = 2$

تصحيح الشبكة بعد الزيادة :



لم يعد بإمكاننا إيجاد أي مسار زيادة لذلك نتوقف ويكون التدفق الأعظمي :

$$f^* = val(f) = 11$$

((وهو ذاته سعة القاطعة الصغرى التي أوجدناها سابقاً والتي تمثل الحد الأعلى للتدفق)).

ثانياً: تحسين التدفق على الشبكة باستخدام شبه مسار الزيادة ((باستخدام القوس الراجع/الخلفي))

شبه مسار الزيادة: هو مسار يوجد فيه على الأقل قوس واحد راجع.

مثال على الشبكة السابقة: المسار التالي هو شبه مسار زيادة:

$\langle s, z, y, t \rangle$

ملاحظة: في الحالات التي سنقوم بدراستها نأخذ دوماً شبه المسار الذي يحوي قوساً راجعاً واحداً فقط.

سنتابع بكيفية إيجاد التدفق الأعظمي اعتماداً على شبه المسار في المحاضرة القادمة..

انتهت المحاضرة