

نظري

◀ دكتور الماظة: محمد الشيخ

◀ عنوان المحاضرة: المتتاليات

◀ المحاضرة: الخامسة عشر

**المحتوى العلمي :** أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- المتتاليات والمتسلسلات العرقية.

٢- تمرين عن تبولوجيا الأعداد العرقية.

انتهينا أصدقائي من الفصل الأول من مقرنا (( التحليل العقدي )) حيث تحدثنا فيه عن الأعداد العرقية وتمثيلها في المستوي العقدي و أيضاً تناولنا تبولوجيا الأعداد العرقية. والآن سنبدأ بالفصل الثاني من مقرنا وهو المتتاليات والمتسلسلات العرقية.

### المتتاليات والمتسلسلات العرقية

**في الحالة العامة:** إن المتتالية في مجموعة  $X$  هي تابع منطلقه مجموعة الأعداد الكلية  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  أو

مجموعة جزئية منها من الشكل :  $A = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} ; n \geq n_0\}$ .

لأجل عدد  $n_0$  من مجموعة الأعداد الطبيعية أي أن  $X : A \rightarrow X ; x \rightarrow x_{(n)}$

نرمز لهذه المتتالية عادة ب  $\{x_n\}_{n \in A}$  أو  $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_n, \dots$

ونسمي  $x_n$  بالحد العام للمتتالية

كما نسمي  $x_{n_0}$  بالحد الأول للمتتالية.

و  $x, x_{n_0+1}, \dots, x_n, \dots$  بحدود المتتالية .

في حالة المتتاليات نأخذ رمز التابع دليل .

إن مجموعة قيم المتتالية  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  نرمز لها بالرمز  $\{x_n ; n \in A\}$  وهي مجموعة قيم التابع  $x$

نرمز للمتتالية  $\{x_n\}_{n \in A}$  ونرمز للمجموعة  $\{x_n ; n \in A\}$

**ملاحظة :** هنالك فرق بين المجموعة والمتتالية حيث المجموعة تعطي قيم المتتالية ولا يسمح بالتكرار أما المتتالية تسمح بتكرار الحد وحدود المتتالية مرتبة .

**مثال :**  $\{i^n\}$

إن حدود هذه المتتالية  $i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots$  حيث إننا بدأنا من  $n = 1$  .

أما مجموعة قيم هذه المتتالية هي  $\{i, -1, 1, -i\}$

- إذا كانت  $X = \mathbb{R}$  أو مجموعة جزئية منها فإننا نسمي المتتالية بالمتتالية الحقيقية، وقد درسنا هذه المتتاليات بشكل مفصل في مقرر التحليل ١ والتحليل ٣ .
  - أما إذا كانت  $X = \mathbb{C}$  أو مجموعة جزئية منها فإننا نسمي المتتالية بالمتتالية العقدية .
- إن  $\{(-1)^n\}$  هي متتالية حقيقية وهي متتالية عقدية .
- أما  $\{(i)^n\}$  هي متتالية عقدية وليست حقيقية .

### متتاليات الأجزاء الحقيقية والأجزاء التخيلية لمتتالية عقدية

لتكن  $\{z_n\}_{n \geq n_0}$  متتالية عقدية عندئذ وبما أن  $z_n \in \mathbb{C}$  فيمكن كتابته بالشكل الجبري :

$$z_n = x_n + i y_n$$

نسمي المتتالية  $\{x_n\}_{n \geq n_0}$  متتالية الأجزاء الحقيقية لـ  $\{z_n\}$  .

نسمي المتتالية  $\{y_n\}_{n \geq n_0}$  متتالية الأجزاء التخيلية لـ  $\{z_n\}$  .

(نقول عن  $x_n, y_n$  أنها متتالية لأن كل متغير  $n$  تتغير قيمة  $z_n$ )

كل متتالية عقدية يقابلها متتاليتان حقيقيتان

**تمرين شامل عما تناولناه في المحاضرات السابقة :**

لتكن لدينا المجموعتان  $A = \{z \in \mathbb{C} ; 1 \leq |z| \leq 2\}$  و  $B = \{z \in \mathbb{C} ; \frac{\pi}{4} \leq \text{Arg } z < \frac{\pi}{3}\}$

مثل هندسياً المجموعات  $A, B, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$

ثم صنفها في جدول يبين فيما إذا كانت هذه المجموعات

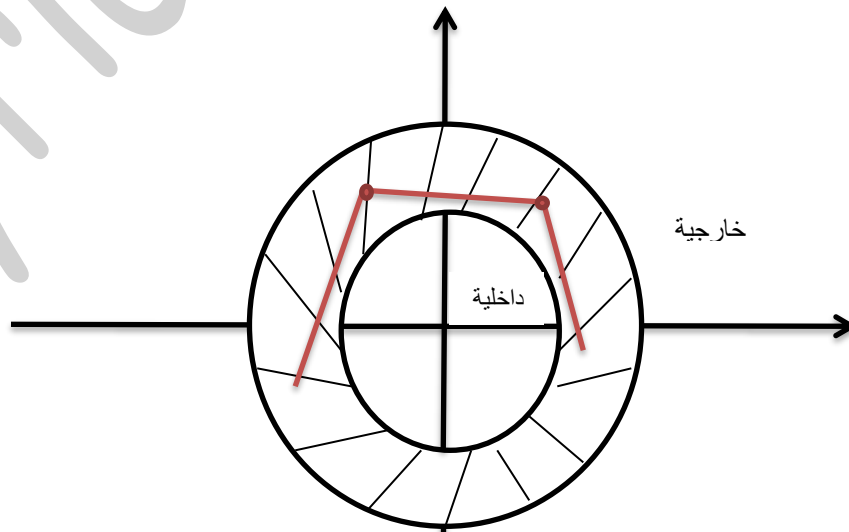
(( مفتوحة - مغلقة - محدودة - مترابطة - متراسة - منطقة ))

الحل :

المجموعة	مفتوحة	مغلقة	محدودة	مترابطة	متراسة	منطقة
$A$	لا	نعم	نعم	نعم	نعم	لا
$B$	لا	لا	لا	نعم	لا	لا
$A \cap B$	لا	لا	نعم	نعم	لا	لا
$A \cup B$	لا	لا	لا	نعم	لا	لا
$A \setminus B$	لا	لا	نعم	نعم	لا	لا
$B \setminus A$	لا	لا	لا	لا	لا	لا

1 المجموعة  $A$

- تمثل الحلقة المغلقة (مع المحيطين) التي مركزها المبدأ ونصف قطرها الداخلي 1 ونصف قطرها الخارجي 2 تعليق لأن المجموعة  $A$   $|A| \geq 1$  تعني خارج قرص واحدة مع محيط قرص الواحد أو  $|3| \leq 2$  ولأن متممها مفتوحة
- إن  $A$  ليست مفتوحة : لأن أي نقطة على المحيطين هي نقطة منها وليست داخلية فيها مثل  $2 \in A$  و 2 ليست نقطة داخلية .
- إن  $A$  محدودة : لأنه يمكن جعلها محتواه داخل القوس  $A \subseteq D(0,3)$ .
- إن  $A$  مترابطة : لأنه يمكن أن نصل أي نقطتين منها بخط مضعلي واقع بكامله فيها.
- إن  $A$  متراسة : لأنها مغلقة ومحدودة .
- إن  $A$  ليست منطقة : لأنها ليست مفتوحة .

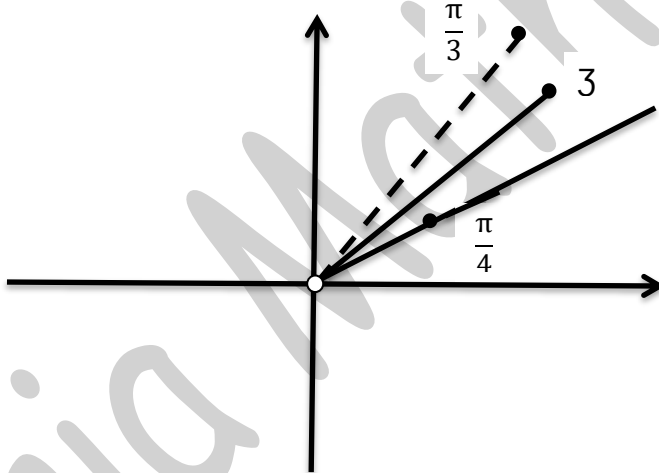


$1 \leq |3| \leq 2$  أكبر أو تساوي ( 1 ) تعني خارج قرص واحدة مع محيط

وأصغر أو تساوي (٢) تعني داخل قرص فهي تشكل حلقة مع المحيطين

المجموعة  $B$  ٢

- إن  $B$  ليست مفتوحة : لأنه أي نقطة نصف المستقيم  $Argz \leq \frac{\pi}{4}$  إذا أخذنا لها جوار فلن ينتمي إلى المجموعة  $B$  سيبقى جزء منه خارج المجموعة .
- إن  $B$  ليست مغلقة : لأن نقاط نصف المستقيم الأخر هي نقاط تجمع أي نقطة من المستقيم الذي  $Argz = \frac{\pi}{3}$  هي نقطة تجمع ل  $B$  ولكنها ليس من  $B$  إذا وجدنا نقطة تجمع من المجموعة وليست من المجموعة فهي ليست مغلقة.
- إن  $B$  ليست محدودة : لأنها لا يمكن جعلها محتواه ضمن قرص نصف قطره محدود .
- إن  $B$  مترابطة : وهي محدبة أكثر من مترابطة لأنه يمكن الوصل بين نقطتين فيها بخط مضع واقع فيها .
- إن  $B$  ليست مترابطة : لأنها ليست مغلقة ولا محدودة .
- إن  $B$  ليست منطقة : لأنها ليست مفتوحة .



$B$  هي القطع الزاوي الذي رأسه المبدأ وضلعاها نصفي المستقيم  $Argz = \frac{\pi}{4}$  يعني منتصف الربع الأول  $Argz = \frac{\pi}{3}$  دون نصف المستقيم الأخر ودون المبدأ رأس القطع

المجموعة  $A \cap B$  ٣

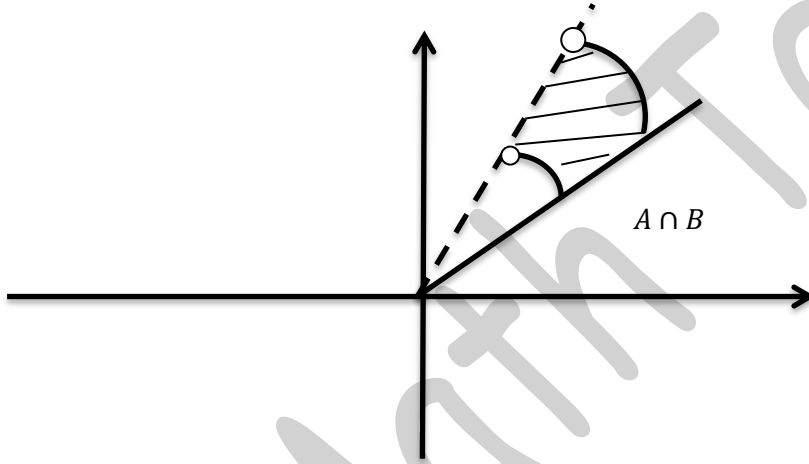
- غير مفتوحة : لأن أي نقطة منها هي نقطة من التقاطع وليست داخلية
- ليست  $\left\{ \begin{array}{l} Arg(z) = \frac{\pi}{4} \\ 1 < |z| \leq 2 \end{array} \right\}$
- نقاط داخلية .

- غير مغلقة : لأن أي نقطة منها عبارة عن نقاط تجمّع ولا تنتمي إلى المجموعة  $A \cap B$

$$\left\{ \begin{array}{l} Arg(z) = \frac{\pi}{3} \\ 1 < |z| < \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

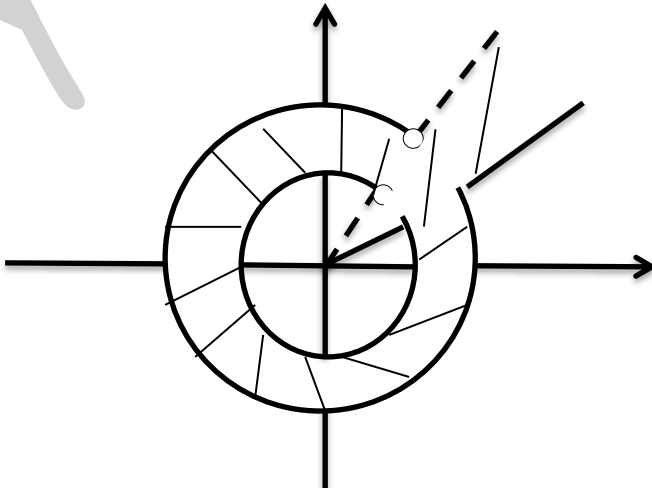
نقاط تجمع لا تنتمي للمجموعة

- محدودة : لأنه يمكن جعلها ضمن القرص.
- مترابطة : لأنه يمكن الوصل بين أي نقطتين بخط مزلعي واقع بكامله فيها .
- ليست مترابطة : لأنها ليست مغلقة .
- ليست منطقة : لأنها ليست مفتوحة .



المجموعة  $A \cup B$  ٤

- ليست مغلقة : لأن أي نقطة من نقاط المستقيم  $Arg z = \frac{\pi}{3}$  هي نقطة تجمع لكنها لا تنتمي إلى المجموعة
- ليست مفتوحة : لأن أي نقطة من القرص الذي نصف قطره ٢ لا تصلح أن تكون نقطة داخلية .
- وليست محدودة .
- مترابطة : لأنه يمكن الوصل بين أي نقطتين منها بخط مزلعي واقع بكامله فيها .
- وليست مترابطة : لأنها غير مغلقة وغير محدودة.
- ليست منطقة : لأنها غير مفتوحة .



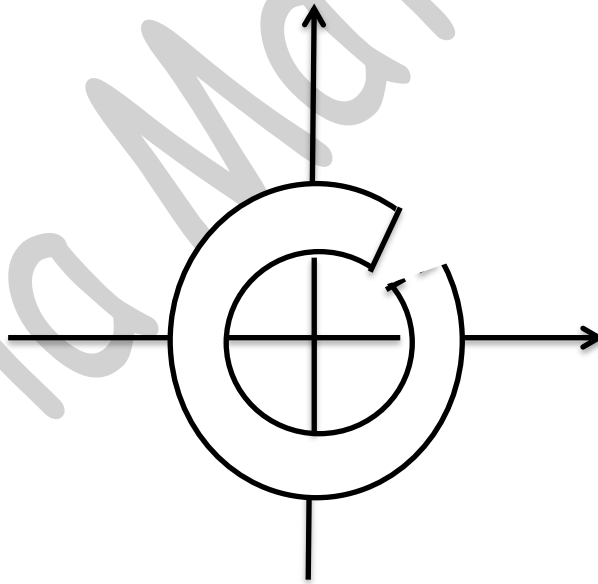
ملاحظة أن النقطة زاويتها هي  $\frac{\pi}{3}$  ونصف قطرها ١

ونصف قطرها ٢  $\frac{\pi}{4}$

وهي اجتماع الحلقة مع القطاع

5 المجموعة  $A \setminus B$  ((وهي النقاط الواقعة في  $A$  وليست واقعة في  $B$ ))

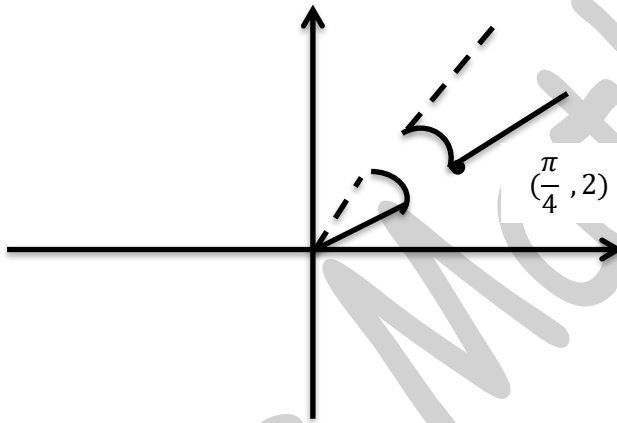
- ليست مغلقة : لأن أي نقطة من المتممة لن تكون داخلية في المتممة أي أن المتممة ليست مفتوحة ، بالتالي المجموعة ليست مغلقة .
- ليست مفتوحة : لأن النقط التي تقع محيط القرص ليست داخلية .
- محدودة : لأننا نستطيع جعلها داخل قرص نصف قطره ٣ .
- ومتراصة : لكنها ليست محدبة لأنه نستطيع أن نصل بين أي نقطتين منها بخط مضلعي واقع بكامله فيها .
- ليست متراسة : لأنها ليست مغلقة .
- ليست منطقة : لأنها ليست مفتوحة .



وهي حلقة دون القطاع

6 المجموعة  $B \setminus A$ 

- ليست مفتوحة : لأن أي نقطة من المستقيم  $Arg 3 = \frac{\pi}{4}$  ,  $1 \leq |3| \leq 2$  وهي نقطة تنتمي إلى المجموعة وليست داخلية فيها وبالتالي المجموعة  $B \setminus A$  ليست مفتوحة.
- وليست مغلقة : لأن نقاط التي تقع على المستقيم  $Arg 3 = \frac{\pi}{3}$  هي نقاط تجمع ولكنها لا تنتمي إلى المجموعة .
- ليست محدودة لأننا لا نستطيع جعلها داخل قرص .
- ليست مترابطة : لا نستطيع الحكم عليها بأنه لا يمكن الوصل بين أي نقطتين فيها بخط مضلع يقع بأكمله فيها سنثبت ترابطها في المحاضرة القادمة .
- ليست متراسة : لأنها ليست مغلقة .
- ليست منطقة : لأنها ليست مفتوحة .

هي القطاع  $B$  دون الأقواس.

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي - باسل أبو عيسى - هالة مصطفى