المحاضرة الثاني والعشرون (22)

نظري
عملي

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة:

---

* ليكن $\vec{r}_1(s) = (1+\cos(s), \sin(s))$ ، $0 \le s \le 2\pi$
$\vec{r}_2(\sigma) = (4+4\cos\frac{\sigma}{4}, 4\sin\frac{\sigma}{4})$ ، $0 \le \sigma \le 8\pi$
تمثيلين وسيطيين لـ ℓ_1 و ℓ_2 على الترتيب

1) ماذا يمثل كل من ℓ_1 و ℓ_2 هندسياً ؟؟ وإلى صنف ينتمي ℓ_1 ، ℓ_2 ؟؟

2) ما هي قيمتا الوسيط الطبيعي للمبدأ في التمثيلين $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ ؟؟

3) هل هناك تلامس بين ℓ_1 و ℓ_2 عند المبدأ ومن أي مرتبة في حال وجوده .

4) هل هناك تلامس بين بياني التابعين $f_1(x) = x^4$ ، $f_2(x) = 0$ ومن أي مرتبة في حال وجودها ؟؟

* الحل :

$$\vec{r}_1(s) = \begin{cases} x(s) = 1+\cos(s) \\ y(s) = \sin(s) \end{cases}$$

أي أن $\ell_1 = C^+((1,0),1)$ دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها (1) ممسوحة مرة واحدة باتجاه موجب

$$\vec{r}_2(\sigma) = \begin{cases} x(\sigma) = 4+4\cos\frac{\sigma}{4} \\ y(\sigma) = 4 + 4\sin\frac{\sigma}{4} \end{cases}$$

أي أن $\ell_2 = C^+((4,0),4)$ دائرة مركزها $(4,0)$ ونصف قطرها (4) ممسوحة مرة واحدة باتجاه موجب .

إذن ℓ_1 و ℓ_2 من الصنف C^∞ لأن كل من المركبة $\vec{r}_1$ ، $\vec{r}_2$ من الصنف C^∞ ،
(لأن $\sin$ و $\cos$ تحليلي على $\mathbb{R}$ بالتالي تحليلي على منطلقاتها)

2) لنفرض أن s_0 هي قيمة الوسيط الطبيعي المقابل للمبدأ

$$\vec{r}(s_0) = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 1+\cos(s_0) = 0 \Rightarrow \cos s_0 = -1 \Rightarrow s_0 = \pi + 2\pi k \\ \sin s_0 = 0 \end{cases}$$

ومنه $s_0 = \pi$ من المجال $[0, 2\pi]$

لنفرض أن σ_0 هي قيمة الوسيط الطبيعي المقابل للمبدأ في $\vec{r}_2$:

$\vec{r}_2(\sigma) = \vec{0}$

$$\begin{cases} 4 + 4\cos\frac{\sigma_0}{4} \\ 4 + 4\sin\frac{\sigma_0}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow 4\cos\frac{\sigma_0}{4} = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos\frac{\sigma_0}{4} = 4 \Rightarrow \cos\frac{\sigma_0}{4} = -1 \Rightarrow \frac{\sigma_0}{4} = \pi + 2\pi k$$

$$\Rightarrow \sigma_0 = 4\pi + 8\pi k$$

ومنه $\sigma_0 = 4\pi$ هي قيمة الوسيط الطبيعي المقابل للمبدأ في $\vec{r}_2$

$\boxed{3}$ إن المبدأ نقطة مشتركة بين ℓ_1 و ℓ_2 ((من طلب ثاني))

$\vec{r}_1'(s) = (-\sin(s), \cos(s))$

$\vec{r}_2'(\sigma) = (-\sin(\frac{\sigma}{4}), \cos\frac{\sigma}{4})$

$\vec{r}_1'(\pi) = (0, -1)$

$\vec{r}_2'(4\pi) = (0, -1)$

$$\Rightarrow \vec{r}_1'(\pi) = \vec{r}_2'(4\pi)$$

$\vec{r}_1''(s) = (-\cos(s), -\sin(s))$

$\vec{r}_2''(\sigma) = (-\frac{1}{4}\cos\frac{\sigma}{4}, -\frac{1}{4}\sin\frac{\sigma}{4})$

$\vec{r}_1''(\pi) = (1, 0)$

$\vec{r}_2''(4\pi) = (\frac{1}{4}, 0)$

$$\Rightarrow \vec{r}_1''(\pi) \neq \vec{r}_2''(4\pi)$$

ومنه يوجد تلامس من المرتبة الأولى .

$\boxed{4}$

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$x^4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$x=0$ نقطة مشتركة بين بياني التابعين f_1 و f_2 كلاً من f_1 و f_2 تحليلي على $\mathbb{R}$ صفي من الصف C^∞

$$f_1'(x) = 4x^3 \Rightarrow f_1'(0) = 0$$

$$f_2'(x) = 0 \Rightarrow f_2'(0) = 0$$

$$\Rightarrow f_1'(0) = f_2'(0)$$

$$f_1''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f_2''(x) = 0 \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$\Rightarrow f_1''(0) = f_2''(0)$$

$$f_1'''(x) = 24x \Rightarrow f_1'''(0) = 0$$

$$f_2'''(x) = 0 \Rightarrow f_2'''(0) = 0$$

$$f_1'''(0) = f_2'''(0)$$

$$f_1^{(4)}(x) = 24 \Rightarrow f_1^{(4)}(0) = 24$$

$$f_2^{(4)}(x) = 0 \Rightarrow f_{(2)}^{(4)}(0) = 0$$

$$f_1^{(4)}(0) \neq f_2^{(4)}(0)$$

يوجد تلامس بين بياني التابعين f_1 و f_2 من المرتبة الثالثة .

* أثبت أن التمثيل التالي
$$\begin{cases} x = a\left(\ln t + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \\ y = \frac{2at}{1+t^2} \end{cases}$$
حيث $0 < t < \infty$

هل تمثيل وسيطي آخر للسبيع

- نعم انه يمكن تمثيل السبيع بـ
$$\vec{r}_1 = \begin{cases} a\cos\tau + \ln tg\frac{\tau}{2} \\ a\sin\tau \qquad 0 < \tau < \pi \\ 0 \end{cases}$$

لنأخذ التابع:

$$\phi :]0,\pi[\longrightarrow]0,\infty[$$
$$t \longmapsto tg\left(\frac{t}{2}\right)$$

ϕ تابع متزايد على مجال $]0,\pi[$ لان

$$\phi'(t) = \frac{1}{2}\left(1 + tg^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) > 0 \; ; \; t \in]0,\pi[$$

ϕ تابع مستمر على مجال $]0,\pi[$ لان

$$tg\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}$$

هو حاصل قسمة تابعين مستمرين على R

$\Longleftarrow$ $tg\left(\frac{t}{2}\right)$ مستمر على R ماعدا القيم التي تعدم المقام وهي حلول المعادلة:

$$\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi K \quad ; \; K \in Z$$

$$\Longleftrightarrow t = \pi + 2\pi K$$

ولما كانت $t \in]0,\pi[$ فانه لا يوجد أي نقطة انقطاع ضمن مجال

$tg\left(\frac{t}{2}\right)$ مستمر على $[0,\pi[=]0,\pi[$

$$\phi(]0,\pi[) =]0,\infty[$$

$\Longleftarrow$ ϕ تام

لنثبت ان $\vec{r}_1 \circ \phi = \vec{r}_2$

$$\vec{r}_1 \circ \phi(t) = \vec{r}_2(\phi(t)) = r_1\left(tg\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

$$= a\left(\ln\left(tg\left(\tfrac{t}{2}\right)\right) + \cos(t),\ a\sin(t), 0\right)$$

$$= \vec{r}_2(t)$$

$$\Leftarrow \quad \vec{r}_1 \sim \vec{r}_2$$

$$\frac{1 - tg^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\frac{t}{2}}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\frac{t}{2}}}$$

* المنحني السحبي : هو منحنٍ مستوٍ يحقق الخاصة التالية القطعة المستقيمة من مماس المحدودة بنقطة التماس P وبنقطة تقاطع هذا المماس مع مستقيم ثابت في مستويه في نقطة ولتكن M ، طول ثابت ولنرمز له بـ a.
لننسب الفراغ لجملة إحداثية بحيث يكون هذا المنحني واقع في المستوي xoy وبحيث يكون المستقيم الثابت المذكور بالتعريف هو ox ولنفرض ان قياس زاوية $\vec{ox}^+$ ، $\vec{MP}$ يساوي t عندئذ

$$x = a\left(\ln tang\left(\tfrac{t}{2}\right) + \cos t\right)$$
$$y = a\sin t$$
$$z = 0$$

هي المعادلة الوسيطية للسحبي بشكل مكافئ فإن الشكل المكافئ له هو

$$\vec{r}(t) = \left(a\left(\ln \tfrac{t}{2} + \cos t\right),\ a\sin t,\ 0\right)$$

اثبت ان هذه معادلات هي معادلات وسيطية للسحبي السابق بطريقة مباشرة

نلاحظ $t \to 0 \Rightarrow \begin{cases} y \to 0 \\ x \to -\infty \end{cases}$ $y = 0$ (ox) مقارب جوار $-\infty$

$\begin{cases} y \to 0 \\ x \to +\infty \end{cases}$ $y = 0$ (ox) مقارب للسحبي

* زاوية منحنيين :

تعرف الزاوية بين المنحنيين ℓ_1 و ℓ_2 ممثلين بـ $t \to r_1(t)$ و $\tau \to r_2(\tau)$ في نقطة مشتركة بينهما p_0 تجيبها معطى بمساواة

$$\cos = \frac{\vec{r_1'}(t_0) \cdot \vec{r_2'}(\tau_0)}{\| r_1'(t_0) \| \| r_2'(t_0) \|}$$

حيث p_0 موافقة لـ t_0 في $\vec{r_1}$ وموافقة لـ τ_0 في $\vec{r_2}$ لنفرض أن p_0 النقطة البسيطة من كلا التمثيلين ذلك عندما تكون نقطة p_0 غير شاذة في كلا التمثيلين .

- نقول عن منحني أنهما متعامدان بنقطة إذا كانت زاوية بينهما $\frac{\pi}{2}$ أي أن $\cos = 0$

* المستوي الملاصق لمنحني :

* مبرهنة : ليكن ℓ منحنياً وليكن $s \to \vec{r}(s)$ تمثيلاً وسيطاً طبيعياً لهذا المنحني من صف C_2 على الأقل و p_0 نقطة نظامية وسيطها طبيعي s_0 لنفرض أن $\vec{r''}(s_0) \neq 0$ عندئذ يوجد مستوٍ ملاصق وحيد لـ ℓ عند p_0

* تعريف :

ليكن ℓ منحنياً و p_0 نقطة منه نقول عن المستوي الذي له تلامس من المرتبة عليا (مرتبة ثانية على الأقل مع المنحني (أي مالو موجود)) إنه المستوي ملاصق لـ ℓ عند p_0

إذاً معادلة المستوي الملاصق عند p_0 :

$$[\vec{QP_0}, \vec{r'}(s_0), \vec{r''}(s_0)] = 0$$

لو فرضنا أن $Q(X, Y, Z)$

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0$$

هذا يحدد لنا معادلة ديكارتية للمستوي الملاصق.

* ملاحظة: 1- إذا كانت رتبة التلامس منحني مع مستويه الملاصق في نقطة P_0 أكبر من 2 ، هذا يحصل في حال كان $r'''(t_0)$ معدوماً أو كانت $r'''(t_0)$ مرتبطاً خطياً مع متجهين $r'(t_0)$ و $r''(t_0)$ نسمي نقطة P_0 نقطة منبسطة.

★★ انتهت المحاضرة ★★