◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الثامنة عشر ◄ عنوان المحاضرة: خواص المتتاليات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـمبرهنة.

٢ـخواص المتتاليات.

تعريف : إذا كان $z_n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad |z_n| \to \infty$

وهذا يعني هندسياً أن أي جوار لنقطة الـ ∞ ((وهو خارج أي قرص مركزه المبدأ)) ، يحوي جميع حدود المتتالية z_n باستثناء عدد منته منها

وهذا يكافئ أن أي جوار للمبدأ $z = 0$ سيحوي عدداً منتهياً من حدود المتتالية .

مثال: $\{(3i)^n\}$ لإثبات أنها تسعى إلى ∞ نأخذ الطويلة $|(3i)^n| = |3^n|.|i^n| = \underbrace{3^n \to \infty}_{n\to\infty}$

هذه المتتالية الهندسية الحقيقية إذا كان الأساس لها أكبر من الواحد فإنها تسعى إلى ∞

خاصة :

$$z_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z_n} \to \infty$$

$$z_n \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z_n} \to 0$$

المتتالية الكوشية : نقول عن المتتالية $\{z_n\}$ أنها كوشية إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0\ ;\ \exists N > 0\ ;\ \forall\, n, m \geq N\ ;\ |z_m - z_n| < \varepsilon$$

مبرهنة : كل متقاربة كوشية في أي فضاء متري ، ولكن العكس في الحالة العامة غير صحيح ، وإذا كان العكس صحيحاً فإننا نقول عن الفضاء المتري أنه فضاء تام .

مبرهنة

$$\{z_n\} \text{ كوشية في } \mathbb{C} \Leftrightarrow \{x_n\},\{y_n\} \text{ كوشيتان في } \mathbb{R}$$

أثبت أن $\mathbb{C}$ فضاء تام

z_n كوشية $\mathbb{C}$ يؤيد أن x_n ، y_n كوشيتان في $\mathbb{R}$ تام تؤدي إلى أن x_n ، y_n متقاربتان في $\mathbb{R}$ حسب مبرهنة z_n متقاربة في $\mathbb{C}$

إذاً $\mathbb{C}$ فضاء تام .

اختبار المقارنة : لتكن $\{z_n\},\{W_n\}$ متتاليتين عقديتين ولنفرض وجود عدد طبيعي N بحيث يتحقق الشرط :

$$|z_m - z_n| \le |W_m - W_n| \qquad ; \forall m,n \ge N$$

عندئذ تقارب $\{W_n\}$ يقتضي تقارب $\{z_n\}$

المتسلسلات العقدية

لتكن $\{z_n\}_{n\ge n_0}$ متتالية عقدية :

نسمي المجموعة من الشكل :

$$z_{n_0} + z_{n_0+1} + \cdots + z_n + \cdots$$

متسلسلة عقدية حدها العام z_n ونرمز لها $\sum_{n=n_0}^{\infty} z_n$

كما نسمي ... ، z_{n_0+1} ، z_{n_0} بحدود هذه المتسلسلة .

***متتالية المجاميع الجزئية (النونية) للمتسلسلة :**

لتكن $\{S_n\}$ متتالية عقدية معرفة كما يلي :

$$S_{n_0} = 3_{n_0}$$

$$S_{n_0+1} = 3_{n_0} + 3_{n_0+1} = S_{n_0} + 3_{n_0+1}$$

$$S_{n_0+2} = 3_{n_0} + 3_{n_0+1} + 3_{n_0+2} = S_{n_0+1} + 3_{n_0+2}$$

$$\vdots$$

$$S_n = S_{n-1} + 3_n = 3_{n_0} + 3_{n_0+1} + \cdots + 3_n = \sum_{k=n_0}^{n} 3_k$$

(s_n عبارة عن مجموع الحدود من الحد الأول إلى الحد النوني)

نسمي المتتالية s_n متتالية المجاميع الجزئية (النونية) للمتسلسلة $\sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n$

تقارب متسلسلة عقدية

نقول عن المتسلسلة عقدية 3_n أنها متقاربة وأن مجموعها يساوي S إذا وفقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها s_n متقاربة من S وفي حال التقارب نكتب $\sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n = S$

وفي حالة تباعد $\{s_n\}$فإننا نقول أن المتسلسلة $\{3_n\}$ متباعدة .

مبرهنة :

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n \text{ متقاربة } \underbrace{\Longleftarrow}_{\text{فإن}} 3_n \longrightarrow 0$$

الاثبات :

لنفرض أن s مجموع المتتالية $\sum_{n=n_0}^{\infty} 3_n$ المتقاربة

عندئذ : $S_n = S_{n-1} + 3_n$

حيث $S_n = 3_{n_0+\cdots\ldots\ldots+3_n}$ و $S_{n-1=3_{n_0+\cdots\ldots\ldots+3_{n-1}}}$

$$S_n - S_{n-1} = 3_n$$

بأخذ نهاية الطرفين $0 = S - S = \lim 3_n$

◀ **ملاحظة:** العكس في المبرهنة السابقة غير صحيح في الحالة العامة فقد توجد متسلسلة متباعدة حدها العام يسعى إلى الصفر .

المتتالية الهندسية العقدية

هي متتالية حدها العام يأخذ الشكل التالي :

$$ʒ_n = ba^n$$

حيث : a : أساس المتتالية العقدية

b :الحد الأول للمتتالية الهندسية

a, b ثابتان عقديان حيث $a\ ,b\ \neq 0$

<u>نميز حالتين :</u>

$\boxed{١}$ $|a| = 1$ (تعني النقاط التي تقع على الدائرة الواحدة)

$$|ʒ_n| = |ba^n| = |b||a^n| = |b|$$

$$\Longrightarrow b \neq 0$$

لنفرض جدلاً أن $ʒ_n$ متقاربة ونهايتها L

$$ʒ_n + 1 = ba^{n+1} = baa^n = aʒ_n$$

لنأخذ نهاية الطرفين $L = aL$ <u>أيضاً نميز حالتين</u> :

١- $a \neq 1$ المساواة السابقة تقتضي تناقض إلا في حالة $L = 0$

لكن L لا يمكن أن تساوي الصفر لأن :

$$|ʒ_n| = |b| \longrightarrow |b| \neq 0$$

$$\Longrightarrow |ʒ_n| \nrightarrow 0$$

وبسبب الفرض الجدلي حصلنا على تناقض

$\Longleftarrow$ $\{ʒ_n\}$ في هذه الحالة غير متقاربة

٢- $a = 1$ فإن

$$ʒ_n = b(1)^n = b \longrightarrow b$$

$\{ʒ_n\}$ متقاربة ونهايتها b

$\boxed{٢}$ $|a| \neq 1$ (وهذه يعني أما $a > 1$ أو $a < 1$)

تذكرة :

$* \lim a^n = 0$
$; |a| < 1$
$* \lim a^n = +\infty$
$; |a| > 1$

١- $|a| < 1$

$$|3_n| = |b| \underbrace{|a|^n}_{\substack{\text{إذا كان هذا الثابت} \\ \text{يسعى إلى الصفر (متتالية حقيقة)}}} \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow 3_n \longrightarrow 0$$

٢- $|a| > 1$

$$|3_n| = |b| \underbrace{|a|^n}_{\substack{\text{لأن عدد حقيقي موجب الأوس } n \\ \text{حسب تعريف نهاية متتالية تسعى إلى } \infty}} \longrightarrow +\infty$$

$$\Longrightarrow 3_n \longrightarrow +\infty$$

$\{3_n\}$ متباعدة

تنويه: إذا كان لدينا $\{a^n\} = S_n$ متتالية هندسية حقيقية و $a \in \mathbb{R}$

فنميز الحالات :

١) متقاربة من الصفر $S_n \to 0 \Rightarrow |a| < 1$.

٢) متباعدة $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow |a| > 1$.

◄تلخيص لما سبق

١- إذا كان أساس المتتالية الهندسية بالطويلة أصغر من الواحد فإن المتتالية الهندسية متقاربة وتسعى إلى الصفر.

٢- إذا كان طويلة أساس المتتالية الهندسية أكبر من الواحد فإن المتتالية الهندسية متباعدة وتسعى إلى ∞

٣- إذا كان طويلة الأساس يساوي الواحد والأساس أيضاً يساوي الواحد فالمتتالية الهندسية متقاربة وتسعى إلى الحد الأول (b).

٤- إذا كان طويلة الأساس يساوي الواحد والأساس لا يساوي الواحد فإن المتتالية تكون متباعدة .

أمثلة:

- $\{i^n\}$ متتالية هندسية إساسها i ، $|i| = 1$ كما أن $i \neq 1$
  $\Leftarrow$ متباعدة
- $\{(1+i)^n\}$ متتالية هندسية أساسها $(1+i)$ و $|1+i| = \sqrt{2} > 1$
  طويلة الأساس أكبر من الواحد $\Leftarrow$ متباعدة ونهايتها ∞

- $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i$

$$\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{13}{36}}=\frac{\sqrt{13}}{6}<1$$

طويلة الأساس أصغر من الواحد $\Leftarrow$ متقاربة نهايتها تساوي الصفر

الفضاء التبولوجي النسبي

إذا كان لدينا (X,τ) فضاء تبولوجي ولدينا المجموعة $Y\subseteq X$ فإننا نعرف على Yفضاء التبولوجي

$$\tau_Y=\{\mathcal{O}\cap Y\ ;\ \ \mathcal{O}\in\tau\}$$

أي المجموعات المفتوحة بالنسبة لِـ Y هي المجموعات المفتوحة في X تقاطع مع Y ، أو أثر المفتوحات في X مع Y .

مثال:

$$\mathrm{X}=\{1,2,3\}$$

$$\mathrm{Y}=\{1,2\}\ \ ,\ \ \tau=\{\emptyset\,,X\,,\{1\},\{1,2\}\}$$

تقاطع ال Y مع τ

إن تقاطع ال Y مع τ: $\tau_Y=\{\emptyset\,,Y,\{1\}\}$ وهي فضاء تبولوجي جزئي من (X,τ)

مثال: $X=\overline{D}(0,1)\ \cup D(3,1)$

نزودها بمقصور المترك على $\mathbb{C}$ فتصبح فضاء متري

هل هذا الفضاء مترابط ؟

$X\cap D(3\,,1.5)=\overline{D}(0,1)$ مفتوحة في X

لأن $D(3\,,1.5)$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$

*$D(3,1)\cap X=D(3,1)$ هي أيضاً مفتوحة في X

$$\overline{D}(0,1)=D(0\,,1.5)\cap X$$

إن $\overline{D}(0,1) \neq \emptyset\ ,\ D(3,1) \neq \emptyset$ مفتوحتان في X

$$\overline{D}(0,1) \cup D(3,1) = X \ ,\ \overline{D}(0,1) \cap D(3,1) = \emptyset$$

بالتالي تشكلان فصلاً للفضاء X أي أن X غير مترابط ومنه Y مجموعة غير مترابطة في $\mathbb{C}$

بالعودة للمحاضرة ١٥:

وجدنا أن المجموعة $B - A$ لا يمكن الحكم على ترابطها في المجموعة $\mathbb{C}$ لذلك سنلجأ إلى التبولوجيا النسبية لإثبات ذلك

سنعتبر $B - A$ فضاء جزئي في الفضاء الكلي $\mathbb{C} = X$

$$Y = B - A$$

وسندرس التبولوجيا النسبية ل X على Y .

فالسؤال :

هل A_1, A_2 تشكلان فصلاً ل $B - A$ ؟

إن $B - A = A_1 \cup A_2$

أي هل A_1, A_2 مفتوحتان في الفضاء التبولوجي الجزئي Y ؟

إن A_1مفتوحة في الفضاء الجزئي $B - A$ لوجود القرص $D(0\,,1.5)$ ومفتوحة في $\mathbb{C}$ بحيث

$$A_1 = D(0\,,1.5) \cap Y$$

بالتالي حسب تعريف التبولوجيا النسبية تكون A_1 مفتوحة في Y

كما أن A_2 مفتوحة لأنه لو أخذنا القطاع الزاوي الذي يحقق :

$$S = \left\{3 \in \mathbb{C}\ ;\quad 1,5 < |3| \quad \vee \ \frac{\pi}{6} < Arg3 < \frac{\pi}{3}\ \right\}$$

إن S مفتوحة في $\mathbb{C}$

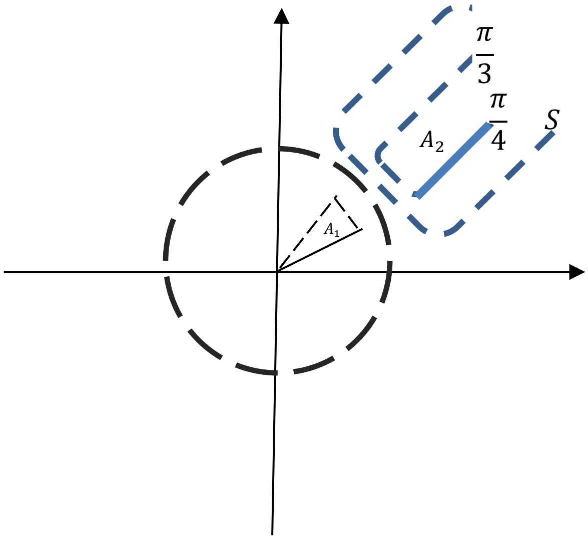
كما أن $A_2 = B \cap Y$

ومنه حسب تبولوجيا النسبية A_2 مفتوحة في Y

بالتالي وجدنا مجموعتان مفتوحتان في Y هما A_1, A_2 وغير خاليتان تحققان :

$$A_1 \cup A_2 = \mathbb{C}$$

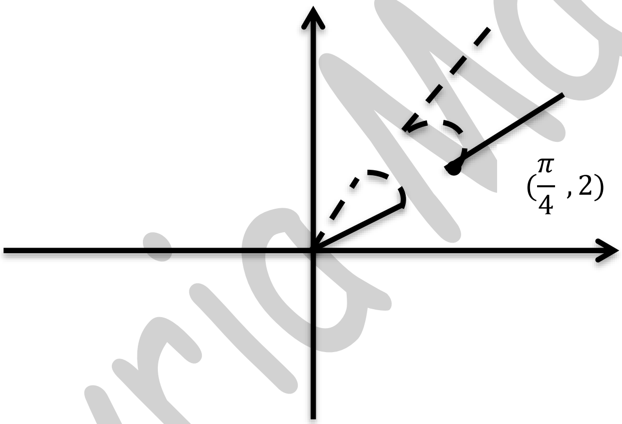
$$A_1 \cup A_2 = B - A$$



وأن A_1, A_2 تشكلان فصل ل $B - A$

إذاً $B - A$ مجموعة غير مترابطة في $\mathbb{C}$.

- ورد خطأ في المحاضرة الخامسة عشر في الرسمة بالمجموعة $A \_ B$ التصحيح هنا .



هي القطاع B دون الأقواس.

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي – باسل أبو عيسى – هالة مصطفى