نظري

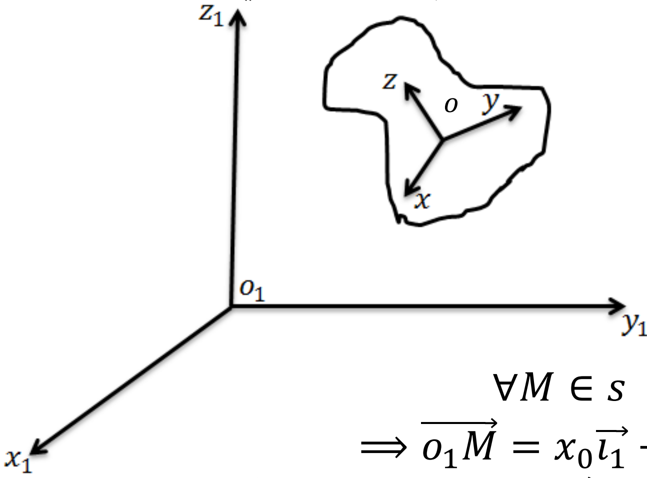
◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: الثانية عشرة — عنوان المحاضرة: الحركة العامة للجسم الصلب

سنبدأ في هذه المحاضرة أصدقائي في الدراسة التحليلية للحركة العامة ..

الدراسة التحليلية للحركة العامة للجسم الصلب

نختار جملتين احداثيتين جملة ثابتة (o_1, x_1, y_1, z_1) وجملة محاور متماسكة (o, x, y, z) بحيث مبدؤها قطب الحركة وليكن النقطة o عندئذٍ يتعين موضع أي نقطة من الجسم ولتكن M في الجملة الثابتة .



تعيين عبارة شعاع الموضع

يتعين موضع أي نقطة (M) من الجسم بإسقاط العبارة الشعاعية :

$$\forall M \in s \quad : \quad \overrightarrow{o_1 M} = \overrightarrow{o_1 o} + \overrightarrow{oM}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1 M} = x_0 \overrightarrow{\imath_1} + y_0 \overrightarrow{\jmath_1} + z_0 \overrightarrow{k_1} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

وبالتالي يتعين موضع النقطة M من خلال احداثيات قطب الحركة (x_0, y_0, z_0) وهي مقادير متغيرة مع الزمن وزوايا اولر (θ, φ, ψ) وهي التي تعين مركبات $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ على الجملة الثابتة ، و (x, y, z) ثوابت . الموضع حسب الجملة

$$\overrightarrow{oM} = \begin{cases} (x, y, z) & \text{متماسكة} \\ (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) & \text{ثابتة} \end{cases}$$

عبارة السرع

تتعين مركبات سرعة النقطة M من العلاقة :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(o) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$$

حيث تعطى المركبات حسب الجملة كما يلي :

$$\vec{v}(o) = \begin{cases} v_x(o)\,, v_y(o)\,, v_z(o) & \text{متماسكة} \\ (x_0'\,, y_0'\,, z_0'\,) \text{ أو } \left(v_{x_1}(o)\,, v_{y_1}(o)\,, v_{z_1}(o)\right) & \text{ثابتة} \end{cases}$$

$$\vec{\omega} = \begin{cases} (p,q,r) & \text{متماسكة} \\ (p_1,q_1,r_1) & \text{ثابتة} \end{cases}$$

وبالتالي تكون مركبات السرعة $\vec{v}(M)$ **في الجملة الثابتة** هي :

$$\vec{v}(M) = (x_0', y_0', z_0') + \begin{vmatrix} \vec{\iota_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(M) = \begin{cases} v_{x_1}(M) = x_0' + q_1(z_1 - z_0) - r_1(y_1 - y_0) = x_1' \\ v_{y_1}(M) = y_0' + r_1(x_1 - x_0) - p_1(z_1 - z_0) = y_1' \\ v_{z_1}(M) = z_0' + p_1(y_1 - y_0) - q_1(x_1 - x_0) = z_1' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{oM}}{\mathrm{dt}} = (x_1', y_1', z_1')$$

هذا يعطي أن السرعة هي مشتق الشعاع بالنسبة للزمن .

وتكون مركبات السرعة **في الجملة المتماسكة** هي :

$$\vec{v}(M) = \big(v_x(M), v_y(M), v_z(M)\big) + \begin{vmatrix} \vec{\iota} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(M) = \begin{cases} v_x(M) = v_x(o) + qz - ry \\ v_y(M) = v_y(o) + rx - pz \\ v_z(M) = v_z(o) + py - qx \end{cases}$$

عبارة التسارع

يعطى التسارع في النقطة M بالعلاقة :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \big(\Gamma_x(o), \Gamma_y(o), \Gamma_z(o)\big) + \begin{vmatrix} \vec{\iota} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ p' & q' & r' \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\iota} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ p & q & r \\ v_x(o) & v_y(o) & v_z(o) \end{vmatrix}$$

وهي عبارة التسارع للجملة المتماسكة .

$$\vec{\Gamma}(M) = (x_o'', y_o'', z_o'') + \begin{vmatrix} \vec{\iota_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1} \\ {p_1}' & {q_1}' & {r_1}' \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{\iota_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ v_{x_1}(o) & v_{y_1}(o) & v_{z_1}(o) \end{vmatrix}$$

وهي عبارة التسارع بالجملة الثابتة .

محور الفتل الآني تحليلياً

لتكن o' نقطة ما من محور الفتل Δ و o هي قطب الحركة عندئذٍ :

$$\forall o' \in \Delta : \vec{v}(o') // \vec{\omega} \Longrightarrow \vec{v}(o') = \vec{v}(o) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oo'}$$

حيث تعطى مركبات الحركة حسب الجملة كما يلي :

$$\vec{v}(o) = \begin{cases} v_x(o)\,, v_y(o)\,, v_z(o) & \text{متماسكة} \\ (x_0'\,, y_0'\,, z_0'\,) \text{ أو } (v_{x_1}(o)\,, v_{y_1}(o)\,, v_{z_1}(o)\,) & \text{ثابتة} \end{cases}$$

$$\vec{\omega} = \begin{cases} (p, q, r) & \text{متماسكة} \\ (p_1, q_1, r_1) & \text{ثابتة} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{oo'} = \begin{cases} (x, y, z) & \text{متماسكة} \\ (x_{1o'} - x_0, y_{1o'} - y_0, z_{1o'} - z_0) & \text{ثابتة} \end{cases}$$

$$\vec{v}(o') = \left(v_x(o), v_y(o), v_z(o)\right) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad \text{متماسكة}$$

$$\vec{v}(o') = \left(v_{x_1}(o), v_{y_1}(o), v_{z_1}(o)\right) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} \quad \text{ثابتة}$$

ومن التوازي نجد :

$$\frac{v_x(o')}{p} = \frac{v_y(o')}{q} = \frac{v_z(o')}{r} \quad \text{معادلات المتدحرج}$$

$$\frac{v_{x_1}(o')}{p_1} = \frac{v_{y_1}(o')}{q_1} = \frac{v_{z_1}(o')}{r_1} \quad \text{معادلات القاعدة}$$

إن معادلات المتدحرج والقاعدة هي عبارة عن معادلتين معادلة كل منها هي مستوي وتقاطع المستويين هو مستقيم (محمور الفتل الآني) وبحل المعادلات ينتج المتدحرج والقاعدة .
اي مستقيم محور الفتل الآني يرسم سطحاً ما في الفراغ الثابت نسميه **القاعدة** ويرسم سطحاً ما في الفراغ المتماسك نسميه **المتدحرج** .

مسألة

لدينا ثلاث نقاط $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,1,1)$ من جسم صلب إحداثياتها بالنسبة للجملة الثابتة بلحظة معينة أعطيت سرع تلك النقط باللحظة المذكورة

$$\vec{v}(A) = (2,1,-3)\,, \vec{v}(B) = (0,3,-1)\,\;, \vec{v}(C) = (-1,2,-1)$$

والمطلوب: عين عناصر الحركة اللولبية المماسة لحركة بهذه اللحظة
او يأتي بصياغة ((عين عناصر الفتل المكافئ لهذه الحركة))

الحل :

(عناصر الفتل المكافئ لهذه الحركة) $(\vec{\omega}\,, o' \in \Delta\,, b)$
نختار $A(0,0,0)$ قطب للحركة ((يمكننا اختيار أي نقطة لكن هنا A اسهل)) وبالتالي علاقة سرعة النقطة B هي :

$$\vec{v}(\mathrm{B}) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$(0,3,-1) = (2,1,-3) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(0,3,-1) = (2,1,-3) + (-r_1, r_1, p_1 - q_1)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 2 - r_1 \\ 3 &= 1 + r_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{r_1 = 2}$$

$$-1 = -3 + p_1 - q_1 \;\Rightarrow p_1 - q_1 = 2$$

كما أن علاقة السرع C تعطى بالعلاقة :

$$\vec{v}(\mathrm{C}) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC}$$

$$(-1,2,-1) = (2,1,-3) + \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath_1} & \overrightarrow{\jmath_1} & \overrightarrow{k_1} \\ p_1 & q_1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(-1,2,-1) = (2,1,-3) + (q - 2, 2 - p, p - q)$$

بالمطابقة
$$\begin{cases} -1 = 2 + \mathrm{q}_1 - 2 \;\Rightarrow \boxed{\mathrm{q}_1 = -1} \\ 2 = 1 + 2 - \mathrm{p}_1 \;\Rightarrow \boxed{\mathrm{p}_1 = 1} \\ -1 = -3 + \mathrm{p} - \mathrm{q}_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}(1,-1,2)$$

بفرض $o'(x,y,z) \in \Delta$

$$\vec{v}(\mathrm{o}') = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Ao'}$$

$$\vec{v}(\mathrm{o}') = (2,1,-3) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(o') = (2 - z - 2y, 1 + 2x - z, -3 + y + x)$$

معادلات المحور الآني للفتل :

من شرط التوازي $\vec{v}(o') \backslash\backslash \vec{\omega}$

$$\frac{2-z-2y}{1}=\frac{1+2x-z}{-1}=\frac{-3+y+x}{2}$$

$$-2+z+2y=1+2x-z \Rightarrow 2x-2y-2z+3=0 \quad (1)$$
$$2+4x-2z=3-y-x \Rightarrow 5x+y-2z-1=0 \quad (2)$$

بفرض $y=0$ ، وبطرح (1) من (2) نجد :

$$-3x+4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$$
$$2x-2z+3=0$$
$$\frac{8}{3}+3=2z \Rightarrow \frac{17}{3}=2z \Rightarrow z=\frac{17}{6}$$
$$o'\left(\frac{4}{3},0,\frac{17}{6}\right)$$

إيجاد خطوة اللولب

$$b=\frac{\vec{\omega}.\vec{v}(A)}{\omega^2} \Rightarrow b=\frac{(1,-1,2).(2,1,-3)}{1+1+4}$$
$$\Rightarrow b=\frac{2-1-6}{6}$$
$$\boxed{\Rightarrow b=\frac{-5}{6}}$$

الدوران بعكس الجهة لأن الإشارة سالبة .

طلب ثاني .

هل تنتمي $D(0,0,1)$ بالسرعة $\vec{v}(\mathrm{D})=(2,1,-3)$ في هذه اللحظة إلى الجسم السابق أم لا .

الحل :

إما نطبق نظرية المساقط :

$$\vec{v}(A).\overrightarrow{AD} \overset{?}{=} \vec{v}(D).\overrightarrow{AD}$$
$$(2,1,-3)(0,0,1) \overset{?}{=} (2,1,-3)(0,0,1)$$
$$-3=-3 \quad \text{محققة}$$

$$\vec{v}(B).\overrightarrow{BD} \overset{?}{=} \vec{v}(D).\overrightarrow{BD}$$

$$(0,3,-1)(-1,-1,1) \overset{?}{=} (2,1,-3)(-1,-1,1)$$

$$-4 \neq -6$$

أو :

$$\vec{v}(\mathrm{D}) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AD}$$

$$(2,1,-3) \neq (2,1,-3) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد علي فليون ** هديل سعيد ** خديجة الرفاعي

◄ دكتورة المادة : هدى شماط

◄المحاضرة : الثالثة والرابعة عشرة

عنوان المحاضرة :مراجعة وحل مسائل

بداية أصدقائي سنورد مراجعة للحركات التي درسناها سابقا وبعدها سنبدأ بحل تمارين ..

الحركة الدورانية حول محور ثابت	الحركة الانسحابية
لها درجة حرية **واحدة** , وسيط للحركة زاوية الدوران θ $\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{oM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ (x, y, z) ثوابت , $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ متغيرات السرعة: $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$; $\vec{\omega}$ شعاع الدوران $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{mM}$ حيث m المسقط القائم ل M على محور الدوران Δ التسارع : $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2 \overrightarrow{mM}$ حيث $\vec{\varepsilon}$ شعاع التسارع الزاوي $\vec{\omega}$ محمول على محور الدوران العامودي على مستوي الحركة	لها **ثلاث** درجات حرية 3) وسطاء للحركة $(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ يتعين موضعها بالمعادلة : $\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{oM}$ $= (x_0, y_0, z_0) + (\alpha, \beta, \gamma)$ (x_0, y_0, z_0) متغيرات , (α, β, γ) ثوابت $\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \vec{C}$; $o_1 \in$ الفراغ الثابت والسرعة : $\vec{v}(M) = \vec{v}(o)$ والتسارع : $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(o)$
الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة	**الحركة اللولبية**
لها **ثلاث** درجات حرية وثلاث وسطاء ψ , θ , φ $\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{oM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ متغيرات $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$ حيث $\vec{\omega}$ شعاع الدوران الآني و o نقطة ثابتة شعاع الدوران في هذه الحركة : $\vec{\omega} = \psi'\overrightarrow{k_1} + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{k}$ في جملة متماسكة : $\vec{\omega}(p, q, r)$ $\vec{\varepsilon}(p', q', r')$	لها درجة حرية **واحدة** لدينا b الخطوة المختزلة للولب زاوية الدوران θ و $\vec{\omega}$ شعاع الدوران $\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{oM}$ $\overrightarrow{o_1M} = s\overrightarrow{k_1} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ $\overrightarrow{o_1M} = b\theta\overrightarrow{k_1} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ $\vec{v}(M) = b\theta'\overrightarrow{k_1} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$ $\vec{\Gamma}(M) = b\theta''\overrightarrow{k_1} + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2\overrightarrow{mM}$ $\vec{\omega}$ محمول على محور الدوران $k = k_1$

الحركة العامة	الحركة المستوية
	في جملة ثابتة : $\vec{\omega}(p_1,q_1,r_1)$ $\vec{\varepsilon}(p'_1,q'_1,r'_1)$ $\vec{\Gamma}(M)=\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{oM}-\omega^2\overrightarrow{mM}$ يكون محوردوران Δ في هذه الحركة آني و $M\in\Delta,\ \overrightarrow{oM}\parallel\vec{\omega}$ آني $\vec{\omega},\vec{\varepsilon}$
الحركة العامة	**الحركة المستوية**
لها **ست** درجات من الحرية وسطائها : $(x_0,y_0,z_0),\ (\varphi\ ,\theta\ ,\psi)$ حيث o قطب الحركة $\overrightarrow{o_1M}=\overrightarrow{o_1o}+\overrightarrow{oM}$ $=(x_0,y_0,z_0)+\overrightarrow{oM}$ $\vec{v}(M)=\vec{v}(o)+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM}$ $\vec{\Gamma}(M)=\vec{\Gamma}(o)+\vec{\varepsilon}\wedge\overrightarrow{oM}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)$ $\vec{\Gamma}(M)=\vec{\Gamma}(o)+\vec{\Gamma_0}(M)$ حيث محور الفتل $\vec{\omega}$ في هذه الحركة آني و Δ يتعين من $o\in\Delta\ \ \vec{v}(o)\parallel\vec{\omega}$ $b=\dfrac{\vec{v}(o).\vec{\omega}}{\omega^2}$, $(\omega,o\in\Delta,b)$	سندرسها في هذه المحاضرة ..

حل وظيفة المحاضرة السابقة

تعطى معادلات حركة جسم صلب بالشكل :

$$x_0=t\quad,\quad y_0=-t\quad,\quad z_0=1$$
$$\psi=\frac{\pi}{2}\quad,\quad \theta=t\quad,\quad \varphi=2t$$

المطلوب :

تعيين معادلات محور الفتل وخطوة اللولب في الحركة اللولبية المماسة لحركة الجسم ثم تعيين شعاع التسارع الزاوي الآني وسرعة وتسارع نقطة M من الجسم احداثياتها في الجملة الثابتة $M(2,-1,3)$.

الحل :

حتى نعين معادلات محور الفتل يجب تعيين **أولاً** شعاع الدوران $\vec{\omega}$

وبفرض أن قطب الحركة هو النقطة $o=(x_0,y_0,z_0)=(t,-t,1)$

ويعطى شعاع الدوران بشكل عام بالعلاقة :

$$\vec{\omega}=\psi'\overrightarrow{k_1}+\theta'\vec{u}+\varphi'\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \vec{\omega} = \vec{u} + 2\vec{k} \ldots (@)$$

ولتعيين $\vec{k},\vec{u}$ بدلالة أشعة الجملة الثابتة $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$

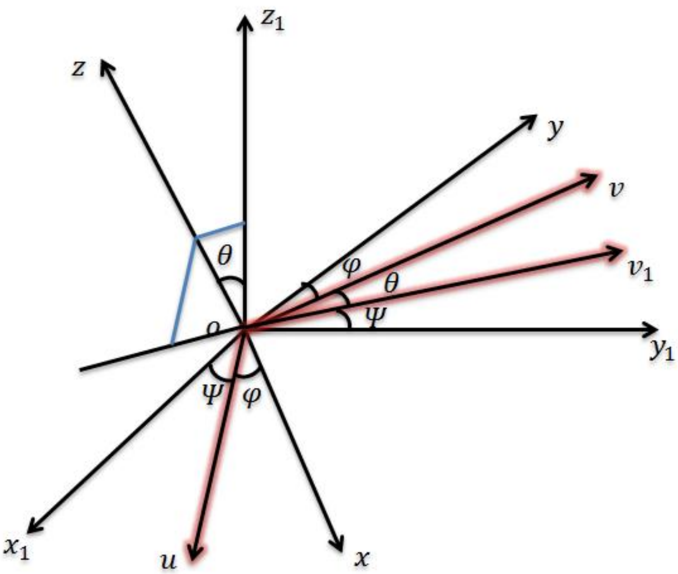
نقوم بعملية الإسقاط

أو بالاستفادة من مصفوفات التحويل لزوايا اولر

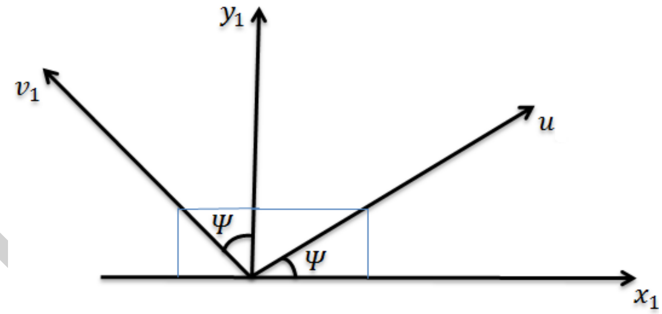
بداية لنوجد $\vec{u}$ بالإسقاط نجد :

$$\vec{u} = \cos\psi\,\vec{\imath_1} + \sin\psi\,\vec{\jmath_1}$$

$$\Longrightarrow \vec{u} = \vec{\jmath_1}$$

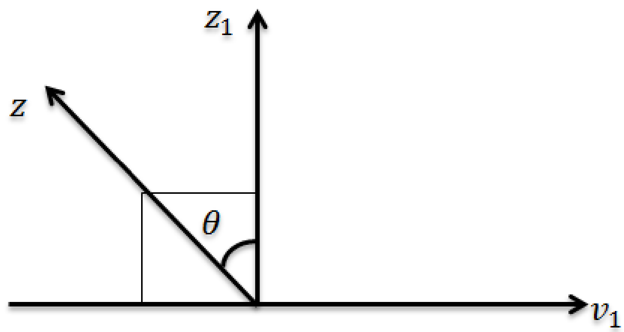


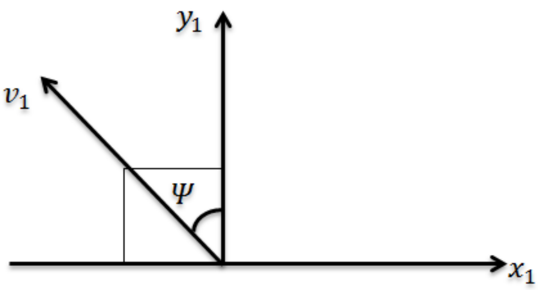
وبعدها لنوجد $\vec{k}$ ايضاً بالإسقاط نجد :



$$\vec{k} = -\sin\theta\,\vec{v_1} + \cos\theta\,\vec{k_1}$$

$$\overset{\text{بتعويض قيمة } \theta}{\Longrightarrow} \quad \vec{k} = -\sin t\,\vec{v_1} + \cos t\,\vec{k_1} \ldots (*)$$





لنوجد $\vec{v_1}$ ايضاً بالإسقاط نجد :

$$\vec{v_1} = -\sin\psi\,\vec{\imath_1} + \cos\psi\,\vec{\jmath_1} \quad \overset{\text{بتعويض قيمة } \psi}{\Longrightarrow} \quad \vec{v_1} = -\vec{\imath_1}$$

بتعويض $\vec{v_1}$ في $(*)$ نجد :

$$\vec{k} = \sin t\,\vec{\imath_1} + \cos t\,\vec{k_1}$$

نعوض $\vec{k},\vec{u}$ في $(@)$ نجد :

$$\vec{\omega} = \vec{\jmath_1} + 2\left(\sin t\,\vec{\imath_1} + \cos t\,\vec{k_1}\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{\omega} = 2\sin t\,\vec{\imath_1} + \vec{\jmath_1} + 2\cos t\,\vec{k_1}$$

$$\Longrightarrow \vec{\omega} = \left(\underbrace{2\sin t}_{p_1}, \underbrace{1}_{q_1}, \underbrace{2\cos t}_{r_1}\right)$$

$$\forall\, o' \in \Delta \;:\; \vec{v}(o') // \vec{\omega} \;\Longrightarrow \vec{v}(o') = \vec{v}(o) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oo'}$$

سنفرض أن الاحداثيات النقطة o' هي (x_1, y_1, z_1) ونستنتج سرعة النقطة o من علاقة سرعة $\vec{v}(o')$

حيث لدينا $o = (x_0, y_0, z_0) = (t, -t, 1) \Longrightarrow \vec{v}(o) = (1, -1, 0)$

ولنوجد $\overrightarrow{oo'} = (x_1 - t, y_1 + t, z_1 - 1)$

وبتعويض ما سبق بعلاقة السرعة $\vec{v}(o')$ نجد :

$$\vec{v}(o') = (1,-1,0) + \begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1} \\ 2\sin t & 1 & 2\cos t \\ x_1 - t & y_1 + t & z_1 - 1 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(o') = (1,-1,0) + \big((z_1 - 1) - 2\cos t\,(y_1 + t)\big)\vec{\imath_1}$$

$$+\big(2\cos t\,(x_1 - t) - 2\sin t\,(z_1 - 1)\big)\vec{\jmath_1} + \big(2\sin t\,(y_1 + t) - (x_1 - t)\big)\vec{k_1}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(o') = \begin{cases} v_{x_1}(o') = 1 + (z_1 - 1) - 2\cos t\,(y_1 + t) \\ v_{y_1}(o') = -1 + 2\cos t\,(x_1 - t) - 2\sin t\,(z_1 - 1) \\ v_{z_1}(o') = 2\sin t\,(y_1 + t) - (x_1 - t) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(o') = \begin{cases} v_{x_1}(o') = z_1 - 2\,y_1.\cos t - 2t.\cos t \\ v_{y_1}(o') = -1 + 2x_1.\cos t - 2t.\cos t - 2z_1.\sin t + 2\sin t \\ v_{z_1}(o') = 2y_1.\sin t + 2t.\sin t + t - x_1 \end{cases}$$

وبالتالي للحصول على محور الفتل في اللحظة $t = 0$ من المعادلات :

$$\frac{v_{x_1}(o')}{p_1} = \frac{v_{y_1}(o')}{q_1} = \frac{v_{z_1}(o')}{r_1}$$

$$\frac{z_1 - 2\,y_1.\cos t - 2t.\cos t}{2\sin t} = \frac{-1 + 2x_1.\cos t - 2t.\cos t - 2z_1.\sin t + 2\sin t}{1}$$

$$= \frac{2y_1.\sin t + 2t.\sin t + t - x_1}{2\cos t}$$

المعادلتين (1) و (2) هي معادلات الحركة لمحور الفتل .

اخيراً تعيين الخطوة المختزلة للولب من العلاقة :

$$b = \frac{\vec{\omega}.\vec{v}(o)}{\omega^2} = \frac{(2\sin t, 1, 2\cos t).(1,-1,0)}{4\sin^2 t + 1 + 4\cos^2 t}$$

تعيين التسارع الزاوي هو مشتق شعاع الدوران $\vec{\omega}$ أي :

$$\vec{\varepsilon} = (\vec{\omega})' = (2\cos t\ ,0\ ,-2\sin t\ )$$

سرعة وتسارع نقطة من الجسم $M(2,-1,3)$:

تعطى سرعة نقطة M بالعلاقة :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(o) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$$

$$\vec{v}(M) = (1,-1,0) + \begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1} \\ 2\sin t & 1 & 2\cos t \\ 2-t & -1+t & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(M) = (1 + 2 + 2\cos t - 2\,t\cos t)\vec{\imath_1}$$
$$+(-1 + 4\cos t - 2\,\mathrm{t}\ \cos t - 4\sin t)\vec{\jmath_1} + (-2\sin t + 2\,\mathrm{t}\sin t - 2 + t)\vec{k_1}$$

يتعين التسارع للنقطة M بالاشتقاق المباشر لعلاقة سرعة النقطة M أي $\left(\vec{v}(M)\right)' = \vec{\Gamma}(M)$

$$\vec{\Gamma}(M) = (-2\sin t - 2\cos t + 2t\ \sin t)\vec{\imath_1}$$
$$+ (-4\sin t - 2\cos t + 2\,\mathrm{t}\ \sin t - 4\ \cos t)\vec{\jmath_1}$$
$$+ (-2\cos t + 2\sin t + 2t\ \cos t + 1\ )\vec{k_1}$$

تمرين

عين النقاط التي تنتمي إلى مجموعة متماسكة واحدة من بين النقط .

$$A(0,0,-1)\ \ ,\ \ B(1,1,0)\ \ \ ,C(1,0,1)\ \ \ ,D(1,0,0)$$

$$\vec{v}(A) = (0,0,-1)\ \ \ ,\vec{v}(B) = (1,1,1)\ \ ,\vec{v}(C) = (2,0,0)\ \ ,\vec{v}(D) = (1,1,0)$$

في لحظة معينة ثم عين عناصر الحركة الفتلية المماسة لحركة الجسم في اللحظة المذكورة .

الحل :

نطبق نظرية المساقط :

$$\vec{v}(A).\overrightarrow{AB} \overset{؟}{\cong} \vec{v}(B)\overrightarrow{AB}$$

$$(1,1,1)(0,0,-1) \overset{؟}{\cong} (1,1,1)(1,1,1)$$

$$-1 = 3 \quad \text{غير محققة}$$

$$\vec{v}(A).\overrightarrow{AC} \overset{?}{=} \vec{v}(C).\overrightarrow{AC}$$

$$(1,0,2)(0,0,-1) \overset{?}{=} (2,0,0)(1,0,2)$$
$$-2 \neq 2$$

أي أن $S \not\ni A$ حتماً ، والآن لنجرب B مع C,D

$$\vec{v}(B).\overrightarrow{BC} \overset{?}{=} \vec{v}(C).\overrightarrow{BC}$$

$$(1,1,1)(0,-1,1) \overset{?}{=} (2,0,0)(0,-1,1)$$
$$0 = 0 \quad \text{محققة}$$

$$\vec{v}(B).\overrightarrow{BD} \overset{?}{=} \vec{v}(D).\overrightarrow{BD}$$

$$(1,1,1)(0,-1,0) \overset{?}{=} (1,1,0)(0,-1,0)$$
$$-1 = -1 \quad \text{محققة}$$

إذاً كلاً من $B,C,D \in S$.

تعيين عناصر الفتل $o'(x_1,y_1,z_1)$; $\vec{v}(o') // \vec{\omega}$

$$\vec{v}(o') = \vec{v}(D) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Do'}$$

$$\vec{v}(o') = (1,1,0) + \begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1} \\ 1 & 1 & 0 \\ x_1 - 1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(o') = (1 + z_1, 1 - z_1, y_1 - x_1 + 1)$$

$$\frac{(\mathbf{1} + \boldsymbol{z_1})}{1} = \frac{1 - z_1}{1} = \frac{y_1 - x_1 + 1}{0}$$

وبحل علاقات التناسب نحصل على النقطة $o'(1,0,0)$

$$\vec{v}(B) = \vec{v}(D) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{DB}$$

$$(1,1,1) = (1,1,0) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1 = 1 - r_1 \Rightarrow r_1 = 0 \quad ,1 = 1 + 0 \quad , \quad 1 = p_1$$

$$\vec{v}(C) = \vec{v}(D) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{DC}$$

$$(2,0,0) = (1,1,0) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 1 & q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2 = 1 + q_1 \quad , \quad 0 = 1 - 1 \quad , \quad 0 = 0$$

ومنه $\vec{\omega}(1,1,0)$

لإيجاد خطوة اللولب نطبق القانون التالي :

$$b = \frac{\vec{\omega}.\vec{v}(D)}{\omega} = \frac{(1,1,0)(1,1,0)}{2} = 1$$

المسألة الأولى

يتحرك قرص دائري نصف قطره (a) بحركة لولبية حول محوره بسرعة زاوية ثابتة $(\omega = \omega_0)$ علما بأن محور القرص ينتقل بمقدار $(2\omega_0)$ عندما يتم القرص دورة كاملة حول محوره , والمطلوب : تعيين مسار وسرعة نقطة من محيط القرص .

الحل :

هنا لا نملك الخطوة المختزلة لإيجاد المسار , لكن لدينا من **نص المسألة**
((يتم القرص دورة كاملة حول محوره أي أن $B = 2\pi b$))

$$\Rightarrow B = 2\pi b = 2\omega_0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \pi b \Rightarrow \mathrm{b} = \frac{\omega_0}{\pi}$$

لحساب زاوية الدوران (θ) نقوم بمكاملة (ω) ومنه :

$$\omega = \theta' \Rightarrow \theta = \int \omega dt \quad ; \omega = \omega_0$$

$$\theta = \int \omega_0 dt \Rightarrow \theta = \omega_0 t + \theta_0$$

من نص المسألة لدينا شروط البدء ومنه نفرض في بداية الحركة أن $(\theta = 0)$في اللحظة $(t = 0)$
بالتعويض نجد أن : $(\theta_0 = 0)$ ومنه $\theta = \omega_0 t$

تعيين موضع (M)

نختار جملة محاور ثابتة (o_1,x_1,y_1,z_1) بحيث ينطبق محور القرص على محور الدوران (o_1z_1)
ونختار جملة محاور متماسكة (o,x,y,z) بحيث ينطبق محور القرص على محور الدوران (oz)
ونختار (M) واقعة على أحد المحاور وليكن (ox), وبكتابة العلاقة الشعاعية للنقطة (M) :

$$\forall\, M \in s: \overrightarrow{o_1M} = b\theta\vec{k} + \overrightarrow{oM}$$

$$\overrightarrow{o_1M} = b\theta\overrightarrow{k_1} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \quad \Longrightarrow \overrightarrow{o_1M} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + (b\theta + z)\overrightarrow{k_1}$$

$$\overrightarrow{o_1M} = x(cos\theta\overrightarrow{\imath_1} + sin\theta\overrightarrow{\jmath_1}) + y(-sin\theta\overrightarrow{\imath_1} + cos\theta\overrightarrow{\jmath_1}) + (b\theta + z)\overrightarrow{k_1}$$

حيث أوجدنا سابقا العلاقات الشعاعية لـ : $\vec{\imath},\vec{\jmath}$.

وبالإسقاط على جملة المحاور الثابتة وتعويض $\theta = \omega_0.t$ نحصل على :

$$x_1 = xcos\omega_0 t - ysin\omega_0 t$$
$$y_1 = xsin\omega_0 t + ycos\omega_0 t$$
$$z_1 = z + b\omega_0 t$$

حيث (x_1,y_1,z_1) مركبات (M)

وبفرض أن $M = (a,0,0)$, وبالتعويض في معادلات حركة النقطة (M) في الجملة الثابتة :

$$x_1 = acos\omega_0 t \quad \dots(*)$$
$$y_1 = asin\omega_0 t \quad \dots(**)$$
$$z_1 = b\omega_0 t \quad \dots(***)$$

لإيجاد **معادلة المسار** نقوم **بحذف الزمن** من العلاقات السابقة :

من $(***)$ نجد : $\boxed{t = \frac{z_1}{b\omega_0}}$

ولدينا $b = \frac{\omega_0}{\pi}$ ومنه :

$$\boxed{t = \frac{\pi z_1}{\omega_0^2}}$$

وبتعويض قيمة (t) في $(*)$ نجد :

$$x_1 = acos\omega_0\frac{\pi z_1}{\omega_0^2} = acos\frac{\pi z_1}{\omega_0} \quad \dots(1)$$

ونعوض أيضا قيمة (t) في $(**)$ نجد :

$$y_1 = asin\omega_0\frac{\pi z_1}{\omega_0^2} = asin\frac{\pi z_1}{\omega_0} \quad \dots(2)$$

وبتربيع العلاقتين (2)و(1) وجمعهما نجد :

$$x_1^2 = a^2\cos^2\frac{\pi z_1}{\omega_0}$$
$$y_1^2 = a^2\sin^2\frac{\pi z_1}{\omega_0}$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 2a^2 \quad ...(\#)$$

أي هي معادلة دائرة في المستوي (x_1, y_1, z_1), ومنه **معادلة المسار** هي تقاطع $(\#)$ مع (2)أو(1)

لحساب سرعة النقطة (M) :

نشتق موضع النقطة (M) مباشرة

$$\vec{v}(\mathrm{M}) = \begin{cases} x_1' = -a\omega_0 sin\omega_0 t \\ y_1' = a\omega_0 cos\omega_0 t \\ z_1' = b\omega_0 \end{cases}$$

ولحساب التسارع للنقطة (M) :

نشتق معادلات السرعة مباشرة

$$\vec{\Gamma}(\mathrm{M}) = \begin{cases} x_1'' = -a\omega_0^2 \cos\omega_0 t \\ y_1'' = -a\omega_0^2 \sin\omega_0 t \\ z_1'' = 0 \end{cases}$$

المسألة الثانية محلولة في المحاضرة العاشرة الصفحة 5 التمرين الإضافي

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد علي فليون ** هديل سعيد ** خديجة الرفاعي

نظري

◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄المحاضرة: الخامسة والسادسة عشرة عنوان المحاضرة: الحركة المستوية

سندرس أصدقائي في هذه المحاضرة الحركة المستوية ..

الحركة المستوية

تعريفها هي حركة جسم صلب S بحيث تبقى كل نقطة منه في مستو واحد يوازي مستوي ثابت في الفراغ ، ندعو هذا المستوي الثابت **بالمستوي الأساسي للحركة** نرمز له بالرمز (π)

النظرية الأساسية

إذا تحرك جسم صلب S بحركة مستوية فإن أي مستقيم يعامد المستوي الأساسي للحركة ومتماسك مع الجسم سوف يتحرك بحركة انسحابية .

" البرهان "

ليكن Δ مستقيماً متماسكاً من الجسم الصلب S وَ يعامد المستوي الاساسي للحركة (π)

ولتكن $A , B \in \Delta$ عندئذ يكون $A , B \in S$ ، وبما أن حركة المستقيم هي حركة مستوية فإن A تقع في مستو ثابت $(\pi_1$ يوازي $\pi)$ وَ B تبقى في مستو ثابت $(\pi_2$ يوازي $\pi)$ ، حيث $|\overrightarrow{AB}|$ هو البعد بين (π_1) و (π_2) ، وحسب الفرض فإن $\Delta\perp \pi$ وبالتالي فإن $\overrightarrow{AB} \perp \pi$ (لان طول المستقيم ثابت)

فإن البعد بينهما ثابتاً $\qquad |\overrightarrow{AB}| = c \quad \dots(1)$

لأن البعد بين أي نقطتين من جسم صلب يبقى ثابتاً

ومنه $\pi \parallel \pi_1 \parallel \pi_2$ أيضا $\Delta \perp \pi_1$

ومنه منحى $(\overrightarrow{AB})$ ثابت .... (2)

ومنه من (1) و (2) نجد : $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$

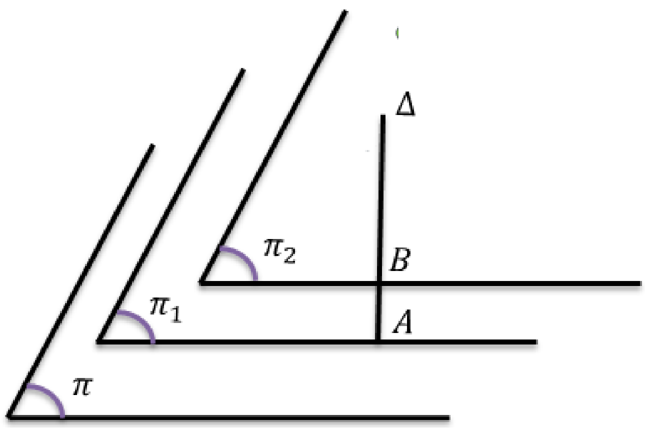
بالاشتقاق : $\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{0}$

وبفرض o نقطة ثابتة في الفراغ فإن :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Ao} + \overrightarrow{oB} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB}$$

$$\frac{d(\overrightarrow{oB} - \overrightarrow{oA})}{dt} \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{oB}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{oA}}{dt} = 0$$

$$\Longrightarrow \vec{v}(B) - \vec{v}(A) = 0 \Longrightarrow \vec{v}(A) = \vec{v}(B)$$



وبالتالي المستقيم Δ فالحركة انسحابية .

نتائج : لو أخذنا أي مستقيم يعامد المستوي الأساسي (π) فإن لنقاطه كلها نفس السرعة ونفس التسارع فبمعرفة سرعة أي نقطة من المستوي (π) نستطيع معرفة سرع جميع النقاط الواقعة على المستقيم المقام من هذه النقطة ويعامد المستوي (π) .

بدراسة حركة جسم صلب يتحرك بحركة مستوية **يكفي** دراسة حركة مستوي واحد يقع في المستوي الأساسي للحركة .

وتعاد الحركة المستوية إلى دراسة حركة نقاط مستوي يقع داخل المستوي الأساسي للحركة .

تعيين درجات حرية الجسم

نحتاج إلى ثلاث نقاط داخل المستوي (π) كل نقطة منه تتعين بوسيطين إذا يوجد ستة وسطاء للحركة غير مستقلة, مرتبطة بثلاث علاقات (علاقات البعد) وبالتالي عدد الوسطاء المستقلة هي $6-3=3$ وبالتالي يوجد ثلاث معادلات للحركة فنحتاج إلى قطب للحركة وهو يتعين بوسيطين وزاوية واحدة من زوايا أولر ولتكن (θ) وذلك لأن الحركة تتم في المستوي وشعاع الدوران يحمل على المستقيم العامودي على المستوي (π)

وبالتالي وسطاء الحركة هم عبارة عن قطب للحركة $o(x_0,y_0)$ وزاوية دوران واحدة (θ)

تعيين الزاوية (θ)

نختار (θ) هي زاوية الدوران التي يصنعها مستقيم متماسك من الجسم المتحرك مع مستقيم ثابت في المستوي الثابت .

تعيين الموضع والسرعة والتسارع

لتكن M نقطة ما من الجسم الصلب S عندئذٍ تعطى علاقة شعاع الموضع بالنسبة لنقطة O_1 في المستوي الثابت بالشكل : $\overrightarrow{o_1M}=\overrightarrow{o_1o}+\overrightarrow{oM}$

حيث $o(x_0,y_0)$ هي قطب الحركة ، إن الشعاع $\overrightarrow{o_1o}$ يتعين في المستوي بدلالة وسيطين مستقلين وأما الشعاع $\overrightarrow{oM}$ فطوله ثابت لأن $o,M\in S$ ولكنه يتعين بواسطة الزاوية θ

وباشتقاق علاقة شعاع الموضع نحصل على السرعة :

$$\forall M\in s:\vec{v}(M)=\underbrace{\vec{v}(o)}_{\text{سرعة القطب}}+\underbrace{\vec{\omega}}_{\text{شعاع الدوران الآني}}\wedge\overrightarrow{oM}$$

علاقة السرعة هي العلاقة المعطاة في الحركة العامة للجسم الصلب لكنها مقصورة على المستوي ويمكن الاختلاف أن شعاع الدوران $\vec{\omega}$ هنا يملك منحى ثابت فهو يعامد مستوي الحركة ، أي أن $\vec{\omega}$ عامودي دوماً على المستوي (π) ، وايضاً لا يتغير من نقطة إلى اخرى ولا يتعلق باختيار القطب ، بخلاف الحركة العامة .

وبالتالي القيمة العددية لسرعة النقطة M هي :

$$|\vec{v}(M)|=\left|\vec{v}(o)+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM}\right|$$
$$\left|\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM}\right|=|\vec{\omega}|.\left|\overrightarrow{oM}\right|.\sin\left(\vec{\omega},\overrightarrow{oM}\right)$$
$$\left|\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM}\right|=|\vec{\omega}|.\left|\overrightarrow{oM}\right|\quad;\vec{\omega}\perp\overrightarrow{oM}$$

تعريف المركز الآني للدوران ونرمز له ب (I)

هو نقطة من المستوي المتحرك تنعدم سرعتها في لحظة ما بالنسبة للمستوي الثابت (π)
ونرمز له بـ (I) أي ان $I \in \pi$ وسرعته بالنسبة للجملة الثابتة $\vec{v}(I) = \vec{0}$.
بفرض (I) قطب للحركة عندئذٍ :

$$\forall M \in s: \vec{v}(M) = \vec{v}(I) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM}$$

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM} \qquad ; \ \vec{v}(I) = 0$$

ومن هذه العلاقة نجد ان سرعة أي نقطة M من المستوي المتحرك هي في كل لحظة سرعة دورانية حول نقطة (I) ، وهو سبب تسميتها مركزاً آنياً للدوران .

$$|\vec{v}(M)| = \left|\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM}\right| \Longrightarrow |\vec{v}(M)| = |\vec{\omega}|.\left|\overrightarrow{IM}\right|$$

ومنه نستطيع كتابة شعاع الدوران $\vec{\omega}$ بالشكل :

$$\omega = |\vec{\omega}| = \frac{|\vec{v}(M)|}{\left|\overrightarrow{IM}\right|}$$

ملاحظة : إذا كانت A , B نقطتين من المستوي المتحرك فإن سرعة كل منهما تكتب كما يلي :

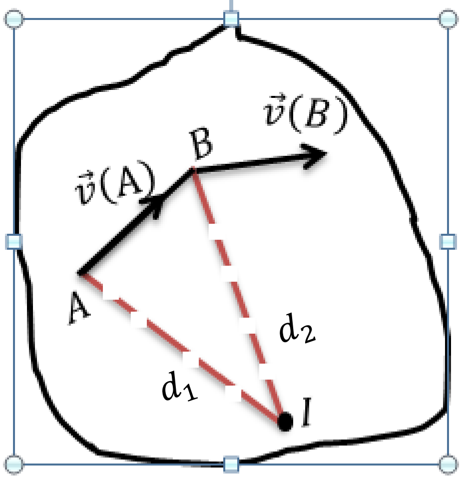
$$\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IA} \quad , \quad \vec{v}(B) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IB}$$

$$|\vec{v}(A)| = |\vec{\omega}|.\left|\overrightarrow{IA}\right| \quad , \quad |\vec{v}(B)| = |\vec{\omega}|.\left|\overrightarrow{IB}\right|$$

$$|\vec{\omega}| = \frac{|\vec{v}(A)|}{\left|\overrightarrow{IA}\right|} = \frac{|\vec{v}(B)|}{\left|\overrightarrow{IB}\right|}$$

طويلة شعاع السرعة على بعد النقطة عن مركز الدوران .

تعيين المركز الآني للدوران هندسيا "سؤال دورة"



نختار نقطتين A , B من المستوي المتحرك ولنميز الحالات التالية :

الحالة الاولى : إذا كان $\vec{v}(B)$ لا يوازي $\vec{v}(A)$

نرسم من النقطة A عموداً على $\vec{v}(A)$ وليكن (d_1)

ونرسم من النقطة B عموداً على $\vec{v}(B)$ وليكن (d_2)

وليكن $A_1 \in d_1$ **وبتطبيق نظرية المساقط** على A , A_1 نجد :

$$proj_{d_1}\vec{v}(A) = proj_{d_1}\vec{v}(A_1) = 0$$

$$\vec{v}(A_1) = \begin{cases} \vec{0} \\ \perp d_1 \end{cases} \text{أو}$$

بنفس الطريقة $B_1 \in d_2$ **نطبق نظرية المساقط** على B, B_1 نجد :

$$proj_{d_2}\vec{v}(B) = proj_{d_2}\vec{v}(B_1) = 0$$

$$\vec{v}(B_1)=\begin{cases}\vec{0}\\ \perp d_2\end{cases}$$ أو

ولما كان $\vec{v}(A)$ و $\vec{v}(B)$ غير متوازيين فإن (d_1) لا يوازي (d_2) أي المستقيمان (d_1) و (d_2) متقاطعين في المستوي π بنقطة واحدة ولتكن (I) ونلاحظ أن : $I\in d_1 \ \wedge\ I\in d_2$ ومنه :

$$\vec{v}(I)=\begin{cases}\vec{0}\\ \vec{v}(I)\perp d_1\end{cases} \ \underset{\text{وَ}}{\wedge}\ \vec{v}(I)=\begin{cases}\vec{0}\\ \vec{v}(I)\perp d_2\end{cases}$$

ولما كان من غير الممكن أن يعامد الشعاع مستقيمين (شعاعين) متقاطعين في مستويه فالاحتمال الثاني مرفوض وبالتالي فإن :

$$\vec{v}(I)=\vec{0}$$

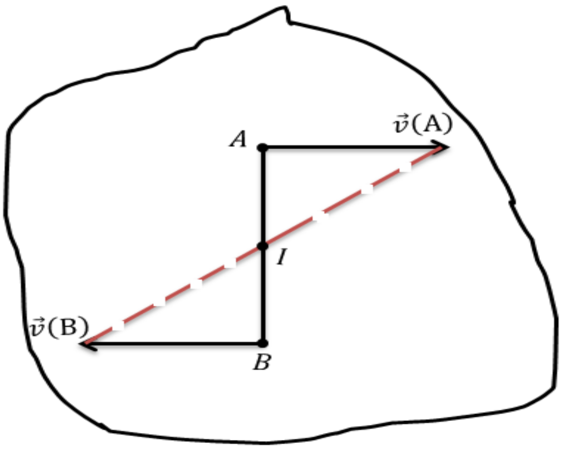
مما سبق نجد ان المركز الآني للدوران وحيد موجود يتعين هندسياً من تقاطع المستقيمين d_2, d_1 .

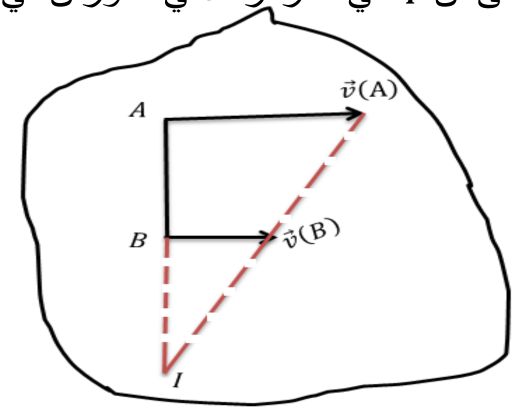
الحالة الثانية : إذا كان $\vec{v}(B)\neq\vec{v}(\mathrm{A})$ و $\vec{v}(\mathrm{A})\ //\ \vec{v}(B)$ ((هنا نظرية المساقط لا تتحقق))

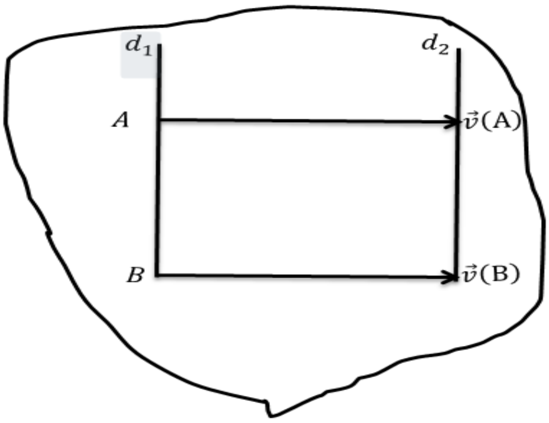
لما كان $\vec{v}(\mathrm{A})$ يوازي $\vec{v}(B)$ فإن مسقط $\vec{v}(\mathrm{A})$ على $\overrightarrow{AB}$ لا يمكن أن يساوي مسقط $\vec{v}(B)$ على $\overrightarrow{AB}$ __إلا__ إذا كان $\overrightarrow{AB}$ عامودياً على المنحى المشترك للسرعتين أي أن d_1 ينطبق على d_2 وينطبق على $\overrightarrow{AB}$ في هذه الحالة فإذا وصلنا نهاية $\vec{v}(\mathrm{A})$ إلى نهاية $\vec{v}(B)$ فإن هذا المستقيم يقطع $\overrightarrow{AB}$ بنقطة وحيدة I .

تتحقق العلاقة حسب تالس : $\dfrac{|\vec{v}(\mathrm{A})|}{|\overrightarrow{IA}|}=\dfrac{|\vec{v}(\mathrm{B})|}{|\overrightarrow{IB}|}$

مما يدل على أن I هي المركز الآني للدوران في هذه الحالة .







الحالة الثالثة : $\vec{v}(A)//\vec{v}(B)$ و $\vec{v}(A)=\vec{v}$: $\forall\ A,B\ \in\pi$

نلاحظ في هذه الحالة أن النظرية المساقط لحركة الجسم الصلب تكون محققة دوماً ، فإذا رسمنا $\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2$ كما سبق فإننا نحصل على مستقيمين متوازيين في المستوي π وبالتالي تدل طريقة الانشاء السابقة أن I يبتعد إلى اللانهاية ونلاحظ من جهة أخرى أن الحركة هي حركة

انسحابية في المستوي π في المستوي الثابت وبالتالي إن الحركة الانسحابية هي حركة دورانية حول مركز آني للدوران يقع في اللانهاية .

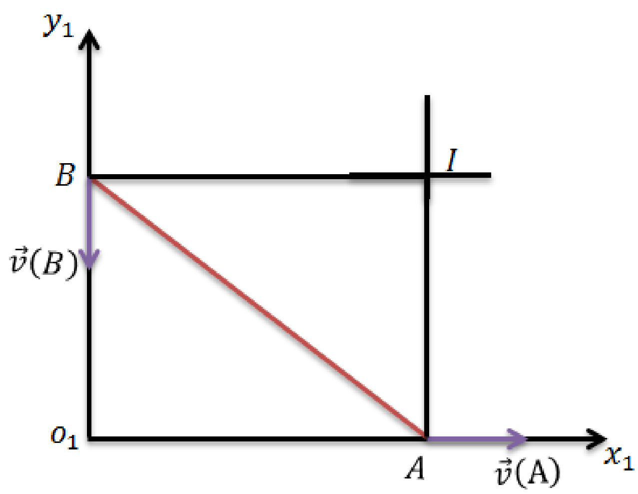
نتيجة لتعيين المركز الآني للدوران

لإيجاد المركز الآني للدوران في حال سرعة النقطة الأولى لا توازي سرعة النقطة الثانية نرسم عمود على النقطة الأولى وعمود على النقطة الثانية نقطة تلاقي العمودين هي المركز الآني للدوران .

المثال الأول (على الحالة الأولى)

-AB مستقيم ينزلق طرفاه على محورين متعامدين بالمستوي $o_1x_1y_1$ عين المركز الآني للدوران .

الحل :



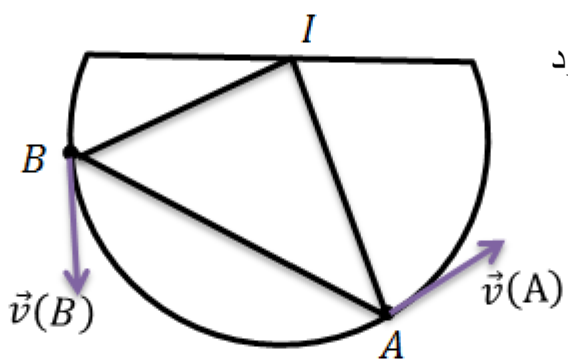
بما أن $\vec{v}(B)$ لاتوازي $\vec{v}(\mathrm{A})$ فنقيم عامود على $\vec{v}(\mathrm{A})$ ونقيم عامود على $\vec{v}(B)$ فيكون المحور الآني I هي نقطة التقاطع للمستقيمين .((وهي الحالة الأولى))

((شرح)) لدينا من النص النقطة A تنزلق على المحور ox ومنه سرعة A محمولة على ox والنقطة B تنزلق على oy وبالتالي سرعة B محمولة على oy وتكون سرعتها عكس اتجاه المحور لأنها تنزلق عكس نحو الاسفل .

المثال الثاني

نصف دائرة وقضيب AB يستند عليها بطرفيه عين المركز الآني للدوران .

الحل :



ايضاً هنا $\vec{v}(B)$ لايوازي $\vec{v}(\mathrm{A})$ وبالتالي نقيم عامود على $\vec{v}(\mathrm{A})$ وعامود على $\vec{v}(B)$ والمحور الآني I هو نقطة تقاطع المستقيمين .

والسرعة محمولة على مماس الدائرة والعمود على المماس هو نصف القطر ومنه يكون مركز الدائرة هو نفسه المركز الآني للدوران .

المثال الثالث

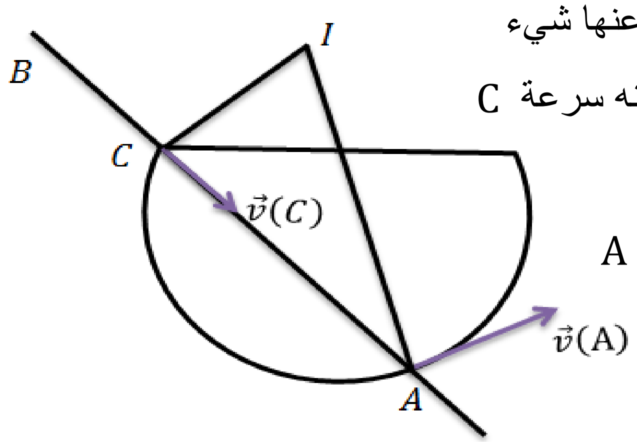
نصف دائرة ثابتة مركزها (o) ونصف قطرها (a) ,AB قضيب طوله (2ℓ) تتحرك نهايته (A) على محيط نصف الدائرة ويستند القضيب على الحافة (c) من الدائرة .

الحل :

إن سرعة A هي مماس للدائرة أما سرعة B لا نعلم عنها شيء

لذلك نستفيد من سرعة C وهي نقطة من القضيب ومنه سرعة C متغيرة على القضيب وثابتة بالنسبة لنصف القطر

لتعيين المركز الآني للدوران نرسم عاموداً من سرعة A وعاموداً من سرعة C نقطة تلاقي المستقيمين هي I

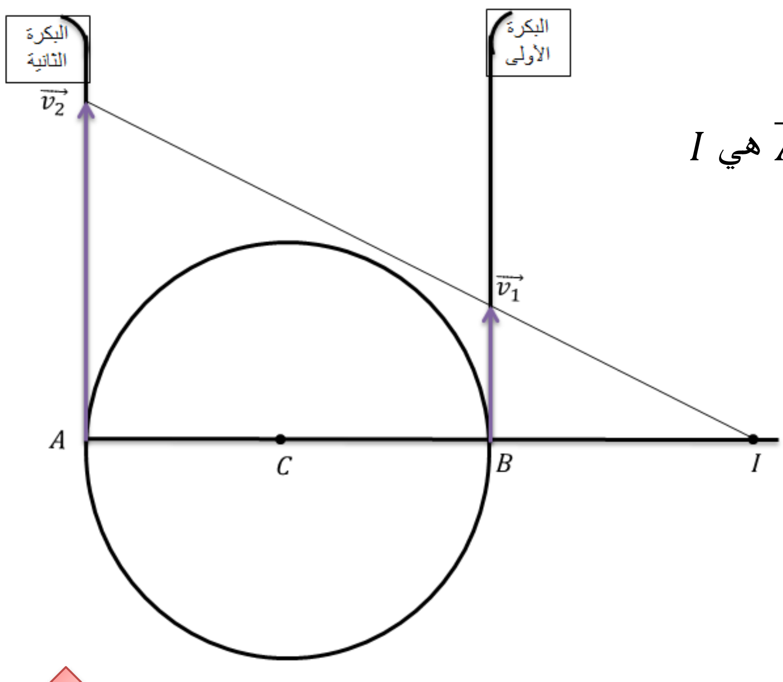


المثال الرابع " سؤال دورة "

بكرة متحركة مركزها (c) نصف قطرها (a) ترفع شاقولياً بواسطة حبل يمر على محيطها وتمر نهايتا الحبل على بكرتين صغيرتين ثابتتين , (A), (B) نقطتا تماس الحبل مع البكرة و (AB) هو قطر أفقي فيها فإذا علمت أن سرعة (A) شاقولية نحو الأعلى وتساوي $(\overrightarrow{v_1})$ وسرعة (B) هي $(\overrightarrow{v_2} = 2\overrightarrow{v_1})$ عين المركز الآني للدوران .

الحل :

نلاحظ أن سرعتين غير متساويين و متوازيتين ((الحالة الثانية)) فالتعيين المركز الآني نصل بين نهايات السرع فنقطة التلاقي مع $\overrightarrow{AB}$ هي I



" إيجاد القاعدة والمتدحرج "

إن المركز الآني للدوران هو نقطة من المستوي المتحرك تأخذ في كل لحظة موضعا معينا في هذا المستوي وترسم حين يتغير الزمن منحنيا ما في هذا المستوي نسميه منحني المتدحرج كما أن لها موضعا معينا في المستوي الثابت في كل لحظة فهي ترسم مع تغير الزمن منحنيا ما في المستوي الثابت أيضا نسميه القاعدة

فالمحل الهندسي للمركز الاني للدوران بالمستوي المتحرك **هو المتدحرج**

والمحل الهندسي للمركز الآني للدوران بالمستوي الثابت **هو القاعدة**

من الواضح أن القاعدة والمتدحرج **يشتركان** في كل لحظة بنقطة واحدة فقط **هي المركز الآني للدوران I.**

تكون سرعة هذه النقطة معدومة بالنسبة للمستوي الثابت ، وتسمى حركة المنحني المتدحرج المتماسك مع المستوي المتحرك ، بالنسبة لمنحني القاعدة أو المتماسك مع المستوي الثابت بحركة تدحرج دون انزلاق

أن المركز الآني للدوران I ينتقل على المنحنيين ((المتدحرج والقاعدة)) فله سرعة انتقال على كل مستوي وهذه السرعة ((أي سرعة الانتقال وليست سرعة I)) متساوية سواء كانت الجملة ثابتة أم متحركة

أن المسافة المقطوعة لـ I على القاعدة تساوي المسافة المقطوعة لـ I المتدحرج

كما أن سرع المستقيم المار من I والعمودي على المستوي π معدومة وذلك حسب مبرهنة في بداية بحث الحركة المستوية نجد

((ان سرع اي مستقيم متماسك مع S و يعامد المستوي الأساسي للحركة المستوية))

يسمى هذا المحور بالمحور الآني للدوران ، وهذا المحور ينتقل في الفراغ الثابت مع تغير الزمن موازياً لنفسه بحيث يرسم سطحاً اسطوانياً دليله منحني القاعدة ، ندعو هذا السطح بسطح القاعدة .

وينتقل ايضاً المحور الآني للدوران في الفراغ المتماسك مع الجسم مع تغير الزمن راسماً سطحاً اسطوانياً دليله منحني المتدحرج ، ندعو هذا السطح بسطح المتدحرج .

فيشترك سطح المتدحرج مع سطح القاعدة في كل لحظة من الزمن بمستقيم ((المحور الآني للدوران)) سرعة نقاطه معدومة ، ونَصِف الحركة المستوية بناءً على ذلك بأنها حركة جسم صلب يتدحرج على سطح اسطواني متماسك مع الجسم على سطح اسطواني ثابت دون انزلاق

((أي هي حركة تدحرج دون انزلاق))

ملاحظة :

1) لتعيين القاعدة هندسياً نبحث عن نقطة في المستوي الثابت يكون بعدها عن I ثابت .

2) لتعيين المتدحرج هندسياً نبحث عن نقطة في المستوي المتحرك يكون بعدها عن I ثابت .

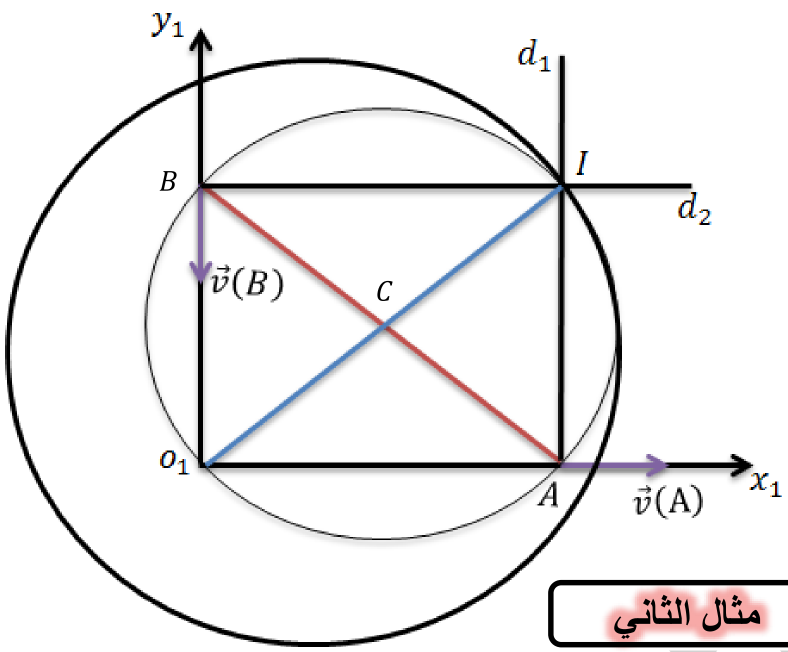
مثال الأول

قضيب AB طوله $2l$ ينزلق طرفه A على المحور ox وطرفه B ينزلق على المحور oy عين القاعدة والمتدحرج هندسيا .

الحل:

تعيين القاعدة : نبحث عن نقطة ثابتة بحيث يكون بعدها عن (I) ثابت دوماً في المستوي الثابت إن $AB = o_1I = 2\ell$ لأنها قطر في المستطيل(IBo_1A) ومنه (I) ترسم دائرة بالنسبة للمستوي الثابت مركزها o_1 ونصف قطرها $2l$ أي $c(0,2\ell)$

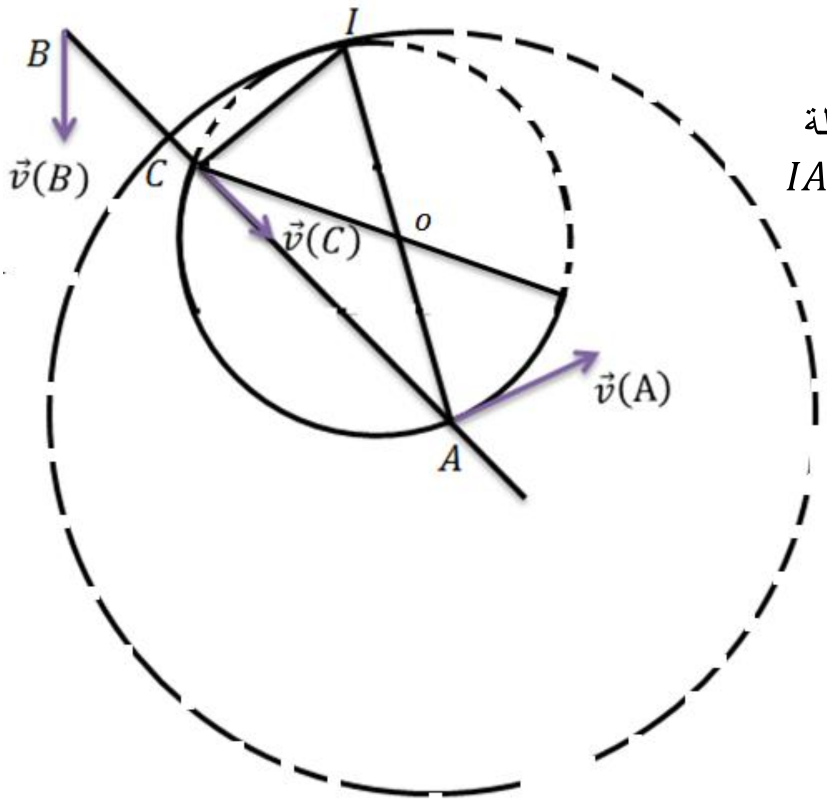
تعيين المتدحرج : نلاحظ وجود نقطة (c) في منتصف القضيب وبعدها عن I ثابت يساوي l وبالتالي I ترسم بالنسبة للمستوي المتحرك دائرة مركزها هو منتصف القضيب ونصف قطرها l أي $C_1(c,l)$ والحركة هي تدحرج الدائرة الصغيرة داخل الدائرة الكبيرة دون انزلاق .



مثال الثاني

قضيب AB ينزلق طرفه A على نصف دائرة قطرها a ويستند طرفه الآخر على الحافة C ولايغادرها عين القاعدة والمتدحرج .

الحل :



تعيين القاعدة : إن المثلث ACI قائم في C وبعد (I) عن (A) ثابت ((نقطة من محيط الدائرة لها بعد ثابت عن المركز)) ومنه فإن I ترسم دائرة كاملة مركزها o هي القاعدة ، ومنه ACI مثلث قائم IA وتر المثلث هو قطر دائرة مركزها o ونصف قطرها $oI = a$ ، فالقاعدة $C(0,a)$.

تعيين المتدحرج : إن بعد النقطة A عن I ثابت ((لأن IA قطر في الدائرة)) إن I ترسم دائرة مركزها A ونصف قطرها $AI = 2a$
فالمتدحرج هو $C(A,2a)$
الحركة هي تدحرج الدائرة الكبيرة دون انزلاق خارج الدائرة الصغيرة .

توزع التسارعات في الحركة المستوية

1) عبارة التسارع بدلالة o قطب الحركة

لتكن M نقطة كيفية من الجسم الصلب S و o قطب الحركة عندئذٍ :
علاقة السرعة تعطى بالعلاقة

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(o) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$$

وبالاشتقاق نجد :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{oM}}{dt}$$

لتكن o_1 نقطة ثابتة في الفراغ عندئذٍ :

$$\overrightarrow{oM} = \overrightarrow{oo_1} + \overrightarrow{o_1M} = -\overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1M} - \overrightarrow{o_1o}$$

$$\Longrightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \left[\frac{d\overrightarrow{o_1M}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt}\right]$$

$$\Longrightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{v}(M) - \vec{v}(o)\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}\right)$$

ومنه حسب علاقة جيبس

$$\boxed{\Longrightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2 \overrightarrow{oM}}$$

حيث $\vec{\Gamma}(o)$ تسارع القطب وهو انسحابي ، و $\left(\vec{\omega} \perp \overrightarrow{oM}\right)$ دوماً
و $\left(\vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2 \overrightarrow{oM}\right)$ تسارع دوراني حول القطب (o)

ملاحظة : $\vec{\varepsilon}$ ايضاً يكون عامودي على مستوي الحركة وعلى المستوي الأساسي لأنه يوازي مستوي الحركة .

2) علاقة التسارع بدلالة I (المركز الآني للدوران)

لتكن M نقطة كيفية من الجسم الصلب S و I قطب الحركة عندئذٍ :
علاقة السرعة تعطى بالعلاقة :

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM}$$

بالاشتقاق نجد :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{IM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{IM}}{dt}$$

و لتكن o_1 نقطة ثابتة في الفراغ عندئذٍ :

$$\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{Io_1} + \overrightarrow{o_1M} = -\overrightarrow{o_1I} + \overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1M} - \overrightarrow{o_1I}$$

$$\Longrightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{IM} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{o_1M}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{o_1I}}{dt}\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{IM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M) - \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

حيث $(\vec{u})$ سرعة انتقال المركز الآني للدوران على القاعدة .
وهذا التسارع لا يشكل تسارع دوراني بالنسبة لنقطة القطب .

انتهت المحاضرة

إعداد: محمد علي فليون ** هديل سعيد ** خديجة الرفاعي

◄ دكتورة المادة : هدى شماط zb

◄ المحاضرة : السابعة والثامنة عشرة عنوان المحاضرة : مركز التسارع المعدوم

سنبدأ معكم أصدقائي في هذه المحاضرة ففي فقرة مركز التسارع المعدوم وتمارين

مركز التسارع المعدوم

هو نقطة من المستوي المتحرك ينعدم تسارعها في لحظة ما مذكورة بالنسبة للجملة الثابتة ونرمز لها بالرمز (Q) وتحقق العلاقة : $\vec{\Gamma}(Q) = \vec{0}$ (بالنسبة للمستوي الثابت)
إن تسارع كل نقطة هو متغير بالنسبة للزمن فالمركز يتغير في كل لحظة بالنسبة للفراغ الثابت وبالنسبة للفراغ المتحرك و هذه النقطة في الحالة العامة لا ينطبق على المركز الآني للدوران لأنه لو انطبق على المركز الآني للدوران فإن $\vec{v}(Q) = \vec{0}$ وبالتالي $\vec{\Gamma}(Q) = \vec{0}$ أي أن النقطة (Q) هي ثابتة و هذا يخالف كون أن (Q) متغيرة إذا اخترنا مركز التسارع المعدوم هو قطل للحركة عندئذٍ سرعة وتسارع أي نقطة M يكتب بدلالة :

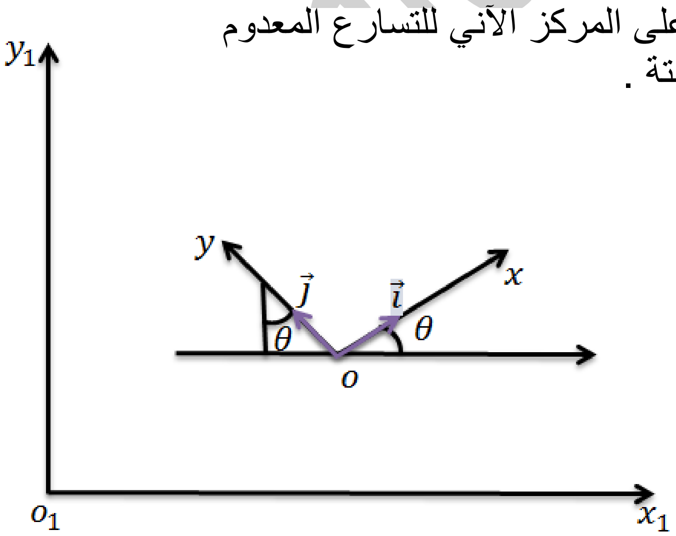
$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(Q) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{QM} - \omega^2 \overrightarrow{QM}$$
$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{QM} - \omega^2 \overrightarrow{QM}$$

أي أن تسارع أي نقطة (M) من المستوي المتحرك في هذه اللحظة **هو عبارة عن تسارع دوراني** حول النقطة (Q) الأمر الذي دعانا إلى تسميتها **بالمركز الآني للتسارع** .

ملاحظة :

إن المركز الآني للدوران (I) لا ينطبق في الحالة العامة على المركز الآني للتسارع المعدوم وإن انطبقت النقطتان تصبح الحركة دورانية حول نقطة ثابتة .

الدراسة التحليلية للحركة المستوية



تعيين الموضع نختار $(o_1x_1y_1)$ جملة محاور احداثية في المستوي الثابت و (oxy) جملة محاور احداثية في المستوي المتماسك (المتحرك) مع الجسم ، بحيث نختار مبدأ الاحداثيات (o) قطب للحركة وتكون (θ) الزاوية بين (ox) مع منحى (o_1x_1)
إن للحركة كما نعلم ثلاث درجات حرية فهي تتعين بثلاث وسطاء مستقلة وهي (x_0, y_0, θ) وتكون معادلات الحركة هي :

$$\theta_0 = \theta_0(t) \quad , \quad x_0 = x_0(t) \quad , \quad y_0 = y_0(t)$$

ومنه يتعين موضع النقطة M من المستوي المتحرك تحليلياً من اسقاط العلاقة :

$$\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{oM}$$

$$\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{o_1M} = (x_0, y_0) + x(\cos\theta\,\vec{\imath_1} + \sin\theta\,\vec{\jmath_1}) + y(-\sin\theta\,\vec{\imath_1} + \cos\theta\,\vec{\jmath_1})$$

بالإسقاط نجد :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + x.\cos\theta - y.\sin\theta \\ y_1 = y_0 + x.\sin\theta + y.\cos\theta \end{cases}$$ وهي مركبات M على الجملة الثابتة

تعيين سرعة النقطة (M) :

إما عن طريق الاشتقاق المباشر للجملة الثابتة

$$\vec{v}(M) = \begin{cases} x_1' = x_0' - x\sin\theta\,.\theta' - y\cos\theta.\theta' \\ y_1' = y_0' + x\cos\theta.\theta' - y\sin\theta.\theta' \end{cases}$$

أو من العلاقة :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(o) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{oM}$$

في الجملة الثابتة

$$\vec{v}(M) = (x_0', y_0') + \begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \omega = \theta' \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}$$

في الجملة المتماسكة يكون قطب الحركة في المبدأ وتنطبق على الجملة الثابتة في بداية الحركة أي :

$$x_0 = 0, y_0 = 0$$

$$\vec{v}(M) = \big(V_x(0), V_y(0)\big) + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x - 0 & y - 0 & 0 \end{vmatrix}$$

تعيين تسارع النقطة (M)

إما عن طريق الاشتقاق المباشر لسرعة $\vec{v}(M)$

$$\vec{\Gamma}(M) = (x_1'', y_1'')$$

أو عن طريق العبارة التالية :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(o) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} - \omega^2\overrightarrow{oM}$$

في الجملة الثابتة :

$$\vec{\Gamma}(M) = (x_0'', y_0'') + \begin{vmatrix} \vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} - \omega^2(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

في الجملة المتماسكة :

$$\vec{\Gamma}(M) = \big(\Gamma_x(0), \Gamma_y(0)\big) + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} - \omega^2(x, y, z)$$

تعيين المركز الآني للدوران تحليلياً

بفرض (o) قطب الحركة و (I) المركز الآني للدوران فإن سرعة القطب تعطى كما يلي :

$$\vec{v}(o) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Io}$$

نضرب طرفي هذه العلاقة خارجياً بـ $\vec{\omega}$ ((شعاع الدوران الآني)) فنجد :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}(o) = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Io}\right)$$

باستخدام علاقة جيبس نجد :

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}(o) = -\omega^2 \overrightarrow{Io}$$

$$\Longrightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{v}(o) = \omega^2 \overrightarrow{oI}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{oI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}(o)}{\omega^2}$$

وبفرض احداثيات المركز الآني للدوران $I(X_1, Y_1)$, $o(x_0, y_0)$

على الجملة الثابتة نجد :

$$\overrightarrow{oI} = (X_1 - x_0, Y_1 - y_0) = \frac{1}{\omega^2} \begin{vmatrix} \vec{\imath}_1 & \vec{\jmath}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ x_0' & y_0' & 0 \end{vmatrix}$$

$$X_1 - x_0 = -\frac{y_0'.\omega}{\omega^2} = -\frac{y_0'}{\omega} \Longrightarrow X_1 = x_0 - \frac{y_0'}{\omega} \dots (1)$$

$$Y_1 - y_0 = \frac{x_0'.\omega}{\omega^2} = \frac{x_0'}{\omega} \quad \Longrightarrow Y_1 = y_0 + \frac{x_0'}{\omega} \dots (2)$$

المعادلين (1) و (2) هما المعادلتين الوسيطيتين للقاعدة .

على الجملة المتماسكة نجد :

لكن بحيث $I(X_I, Y_I)$ و $o(0,0)$ ومنه :

$$\overrightarrow{oI} = (X_I - 0, Y_I - 0) = \frac{1}{\omega^2} \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_x(o) & v_y(o) & 0 \end{vmatrix}$$

$$X_I = -\frac{v_y(o).\omega}{\omega^2} \Longrightarrow X_I = -\frac{v_y(o)}{\omega} \dots (1)$$

$$Y_I = \frac{v_x(o).\omega}{\omega^2} \Longrightarrow Y_I = \frac{v_x(o)}{\omega} \dots (2)$$

المعادلين (1) و (2) هما المعادلتين الوسيطيتين للمتدحرج .

تمرين

ليكن (AB) قضيب طوله (2ℓ) يتحرك في المستوي الثابت (x_1y_1) بحيث تنزلق النقطة (A) من القضيب على (o_1x_1) بسرعة ثابتة قيمتها (v) وتتحرك النهاية (B) منه في المستوي (x_1y_1) بحيث تبقى قيمة سرعتها ثابتة $\vec{v}(\mathrm{B}) = v$, كان القضيب في لحظة البدء منطبقا على (o_1y_1) **والمطلوب** :

1- عين معادلات الحركة

2- أوجد مسار النقطة (B)

3- عين القاعدة والمتدحرج والمركز الآني للدوران **((تحليلياً))**

4- عين المركز الآني للدوران **((هندسياً))**

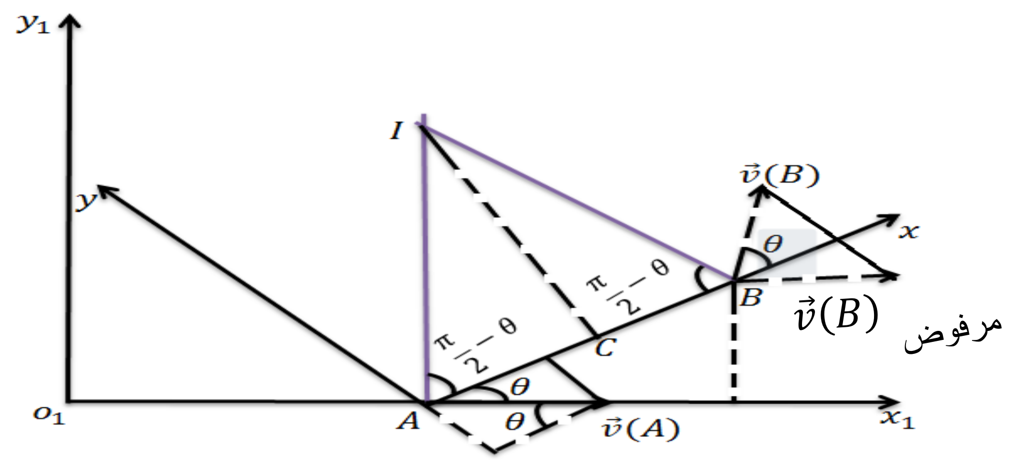
5- أوجد تسارع النقطة (B)

6- أوجد مركز التسارع المعدوم .

7- عين النقطة من القضيب ذات السرعة الصغرى في اللحظة المذكورة .

الحل :

نلاحظ أن الحركة هي حركة مستوية من نص المسألة (وتتحرك النهاية (B) منه في المستوي (x_1y_1))



1) تعيين معادلات الحركة

نختار النقطة $A(x_A, y_A)$ قطب للحركة لأن منحاها معروف ونختار θ الزاوية بين المحور ox_1 والقضيب AB المحمول على المحور ox .

وبما أن : $|\vec{v}(A)| = v$

$$x_A = \int v\,dt = vt + c$$

بتعويض شروط البدء $t = 0$ كانت $x_A = 0$ ومنه نجد $c = 0$ وبالتالي :

$$x_A = vt \ldots (1) \quad , \quad y_A = 0 \ldots (2)$$

لإيجاد الزاوية θ نستفيد من علاقة السرعة للنقطة B :

$$\vec{v}(\mathrm{B}) = \vec{v}(A) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

حيث نعلم أن الزاوية θ بين المستقيم المتماسك والمستقيم الثابت ، ولدينا من علاقة سرعة B السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ التي لها علاقة بالزاوية θ .

وإن $\overrightarrow{AB} = 2\ell.\cos\theta.\overrightarrow{\imath_1} + 2\ell.\sin\theta.\overrightarrow{\jmath_1}$

$$\Rightarrow \vec{v}(B) = v\overrightarrow{\imath_1} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath_1} & \overrightarrow{\jmath_1} & \overrightarrow{k_1} \\ 0 & 0 & \omega = \theta' \\ 2\ell.\cos\theta & 2\ell.\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(B) = (v - 2\ell\theta'.\sin\theta)\overrightarrow{\imath_1} + 2\ell\theta'.\cos\theta\,\overrightarrow{\jmath_1}$$

لكن حسب الفرض : $|\vec{v}(B)| = v \Rightarrow v^2 = |\vec{v}(B)|^2$

$$v^2 = (v - 2\ell\theta'.\sin\theta)^2 + (2\ell\theta'.\cos\theta)^2$$

$$\Rightarrow v^2 = v^2 - 4\ell.v.\theta'.\sin\theta + 4\ell^2{\theta'}^2.\sin^2\theta + 4\ell^2.{\theta'}^2.\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow 0 = -4\ell v\theta'.\sin\theta + 4\ell^2{\theta'}^2$$

$$\Rightarrow v.\sin\theta = \ell\theta' \quad \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\ell}.\sin\theta$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{v}{\ell}dt \dots\dots(*)}$$

تذكرة : نجري تغيير متحول

$$\tan\frac{\theta}{2} = u \quad ,\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2} \,,\sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}, d\theta = \frac{2du}{1+u^2}$$

بتعويض قيمة $d\theta$, $\sin\theta$ في المعادلة $(*)$ نجد :

$$\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}} = \frac{v}{\ell}dt \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{v}{\ell}dt$$

ومنه بالمكاملة نجد :

$$\Rightarrow \int\frac{d\theta}{\sin\theta} = \int\frac{du}{u} = \ln|u| \Rightarrow \boxed{\int\frac{d\theta}{\sin\theta} = \ln|\tan\frac{\theta}{2}|}$$

ممكن في الامتحان ان نعتبره تكامل شهير

$$\Rightarrow \ln\tan\frac{\theta}{2} = \frac{v}{\ell}t + c$$

بتعويض شروط البدء $t = 0$ كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ ومنه نجد $c = 0$ وبالتالي :

$$\Rightarrow \ln\tan\frac{\theta}{2} = \frac{v}{\ell}t \Rightarrow v.t = \ell.\ln\tan\frac{\theta}{2} \dots\dots(*)$$

$$\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = e^{\frac{v}{\ell}t} \Rightarrow \theta = 2arc\tan e^{\frac{v}{\ell}t} \dots\ (3)$$

ومنه يكون $(1),(2),(3)$ هي معادلات الحركة .

2) إيجاد مسار النقطة B

$$\overrightarrow{o_1B} = \overrightarrow{o_1A} + \overrightarrow{AB}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1B} = v.t\,\vec{\imath_1} + 2\ell.\cos\theta\,\vec{\imath_1} + 2\ell.\sin\theta\,\vec{\jmath_1}$$

$$x_1(B) = \underbrace{v.t}_{\text{نعوض في*}} + 2\ell.\cos\theta \quad , \qquad y_1(B) = 2\ell.\sin\theta$$

$$x_1(B) = \ell.\ln\tan\frac{\theta}{2} + 2\ell.\cos\theta$$

$$y_1(B) = 2\ell.\sin\theta$$

3) تعيين القاعدة والمتدحرج والمركز الآني للدوران (تحليلياً)

بفرض احداثيات المركز الآني للدوران

في جملة ثابتة $I(X_1, Y_1)$ هو :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{\omega^2}.\vec{\omega}\wedge\vec{v}(A) \Longrightarrow (X_1 - x_A, Y_1 - y_A) = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix}\vec{\imath_1} & \vec{\jmath_1} & \vec{k_1}\\ 0 & 0 & \omega\\ v & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$X_1 - vt = 0 \Longrightarrow X_1 = vt = \ell.\ln\tan\frac{\theta}{2}$$

$$Y_1 - 0 = \frac{v}{\omega} \Longrightarrow Y_1 = \frac{v}{\theta'} = \frac{\ell}{\sin\theta}$$

المعادلات الوسيطية للقاعدة

ومنه احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة هو $I\left(\ell.\ln\tan\frac{\theta}{2}, \frac{\ell}{\sin\theta}\right)$

في جملة متماسكة $I(X, Y)$ هو :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{\omega^2}.\vec{\omega}\wedge\vec{v}(A)$$

هنا يجب اسقاط سرعة النقطة A من الجملة الثابتة الى الجملة المتحركة

$$\vec{v}(A) = v\vec{\imath_1} \Longrightarrow \vec{v}(A) = v(\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath})$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{\omega^2}.\vec{\omega}\wedge\vec{v}(A) \Longrightarrow (X - 0, Y - 0) = \frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ v.\cos\theta & -v.\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$X = \frac{v}{\omega}.\sin\theta = \ell$$ المتدحرج هو محور القضيب

$$Y = \frac{v}{\omega}.\cos\theta$$

ومنه احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة هو $I\left(\ell, \frac{v}{\omega}.\cos\theta\right)$

4) تعيين المركز الآني للدوران (هندسياً)

نقوم أولاً بتعيين منحى شعاع سرعة النقطة B وذلك باستخدام نظرية المساقط على النقطتين A, B

$$\vec{v}(A).\overrightarrow{AB} = \vec{v}(B).\overrightarrow{AB}$$

$$|\vec{v}(A)|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\theta = |\vec{v}(B)|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\varphi$$

$$\cos\theta = \cos\varphi \Longrightarrow \varphi = \begin{cases} \theta & \text{مقبولة} \\ -\theta & \text{مرفوضة} \end{cases}$$

$\varphi = -\theta$ مرفوضة لأنها تحقق أن $\vec{v}(A)$ توازي $\vec{v}(B)$ ، كما أنه لدينا $|\vec{v}(A)| = |\vec{v}(B)|$
وبالتالي فإن $\vec{v}(B) = \vec{v}(A)$ أي أن الحركة انسحابية وهذا مرفوض .
وبفرض احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة هي $I(X_1, Y_1)$ عندئذٍ :

$$\left.\begin{aligned} X_1(I) &= o_1A = vt = \ell.\ln\tan\frac{\theta}{2} \\ Y_1(I) &= AI = \frac{\ell}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{\ell}{\sin\theta} \end{aligned}\right\}$$

المعادلات الوسيطية للقاعدة هندسيا

وبفرض احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة المتماسكة هي $I(X, Y)$ عندئذٍ :

$$\left.\begin{aligned} X &= Ac = \ell \\ Y = cI = AI.\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &\Longrightarrow Y = \frac{\ell}{\sin\theta}.\cos\theta = \ell.\cot\theta \end{aligned}\right\}$$

المعادلات الوسيطية للمتدحرج هندسيا

أي المركز الآني للدوران هندسياً في الجملة المتماسكة هي $I(\ell, \ell.\cot\theta)$

5) لإيجاد تسارع النقطة (B) من العلاقة التالية :

$$\vec{\Gamma}(B) = \vec{\Gamma}(A) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega^2\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{\Gamma}(B) = 0 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \theta'' \\ 2\ell & 0 & 0 \end{vmatrix} - \theta'^2 2\ell.\vec{i}$$

$$\vec{\Gamma}(B) = -\theta'^2 2\ell.\vec{i} + 2\theta''\ell\vec{j}$$

أو من الاشتقاق المباشر مرتين للعلاقة :

$$\overrightarrow{o_1B} = v.t\,\vec{\imath_1} + 2\ell.\cos\theta\,\vec{\imath_1} + 2\ell.\sin\theta\,\vec{\jmath_1}$$

6) إيجاد مركز التسارع المعدوم
إن النقطة A هي مركز التسارع المعدوم لأنها نقطة من المتماسكة ينعدم تسارعها بالنسبة للجملة الثابتة .

7) تعيين نقطة من القضيب ذات السرعة الصغرى في اللحظة المذكورة

$$\overrightarrow{Ic} = \frac{1}{\omega^2}.\vec{\omega} \wedge \vec{v}(c)$$

$$\vec{v}(c) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{Ic}$$

إن السرعة الصغرى تقابل أقل بعد عن المركز الآني للدوران
إذا مركز القضيب c هي نقطة ذات سرعة أصغرية وهي أقل بعد عن المركز الآني للدوران I
ويكون $Ic \perp AB$.

إعداد: محمد علي فليون ** هديل سعيد ** خديجة الرفاعي

انتهت المحاضرة