٢٠١٨-١١-٢٨

نظري

◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄المحاضرة : الثامنة عشر ◄ عنوان المحاضرة: المثاليات المنشطرة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١-تعاريف تخص التشاكل المنشطر

٢- مبرهنة تبين شرط كون المتتالية منشطرة من اليسار

تعريف (١): لتكن المتتالية التامة :

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \dots . (1)$$

نقول إن (١) منشطر إذا وجد تشاكل مودولي $\rho: N \to M$ بحيث

$$\rho o f = I_M$$

ويسمى ρ التشاكل المنشطر

تعريف (٢): لتكن المتتالية التامة :

$$N \xrightarrow{g} P \to 0 \dots . (2)$$

نقول إن (٢) منشطرة إذا وجد تشاكل مودولي :

$$\pi: P \to N$$

بحيث $g o \pi = I_P$ ونسمي π التشاكل المنشطر

Syria Math Team

تعريف (٣) : لتكن المتتالية التامة :

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0 \ldots\ldots (3)$$

نقول إن (٣) منشطرة من اليسار إذا كانت $0 \to M \xrightarrow{f} N$ منشطرة

ونقول أن (٣) منشطرة من اليمين إذا كانت $N \xrightarrow{g} P \to 0$ منشطرة

ملاحظة : بما ان (١) تامة فان f متباين وبالتالي يوجد تطبيق $\rho: N \to M$ بحيث

$$\rho o f = I_M$$

وكذلك الأمر بالنسبة ل (٢) كونها تامة فإن g غامر ومنه يوجد تطبيق

$$\pi: P \to N$$

بحيث $g o \pi = I_P$

مبرهنة : إذا كانت

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0 \ldots\ldots (3)$$

متتالية تامة من التشاكلات المودولية فغن القضيتين متكافئتين

١- المتتالية (٣) منشطرة من اليسار

٢- Imf حد متكامل مباشر من المودول N

البرهان :

(1) $\Leftarrow$ (2) لنفرض أن (٣) منشطرة من اليسار ولتكن $\rho: N \to M$ *تشاكل منشطر أي :*

$$\rho o f = I_M$$

Syria Math Team

ولنبرهن أن $N = Imf \oplus Ker\rho \quad \forall n \in N$

فإن: $\rho(n - (fo\rho)_n) = \rho(n) - \rho(fo\rho)_n$

$$= \rho(n) - \underbrace{(\rho of)}_{=I_M} o\rho(n) = \rho(n) - (I_M o\rho)(n)$$

$$= \rho(n) - \rho(n) = 0_M$$

وبالتالي فإن : $n - (fo\rho)(n) \in Ker\rho$

ولكن $(fo\rho)(n) = f(\rho(n)) \in Imf$

ومنه $n \in Imf + Ker\rho$

أي أن: $N = Imf + Ker\rho \ldots . (*)$

ولنبرهن أن هذا المجموع المباشر: $\forall x \in Imf \cap Ker\rho$

فإن $x \in Imf \Leftarrow \exists m \in M$ بحيث $x = f(m)$

و $\rho(x) = 0 \Leftarrow x \in Ker\rho$

$$\rho(f(m)) = 0 \Leftarrow$$

ولكن $(\rho of)(m) = I_M = 0 \Leftarrow \rho of = I_M$

$$x = 0 \Leftarrow m = 0$$

$$Imf \cap Ker\rho = 0 \Leftarrow$$

وبالتالي فإن المجموع $(*)$ *مباشر أي*

$$N = Imf \oplus Ker\rho$$

(1) $\Leftarrow$ (2): *لنفرض ان* Imf *حد مكمل مباشر في* N *عندئذ يوجد مودول جزئي* B *من* N

Syria Math Team

بحيث $N = Imf \oplus B$ وبالتالي $\forall n \in N$ فإن n يكتب بصورة وحيدة

$$n = x + b \quad ; x \in Imf, b \in B$$

ولكن f تشاكل متباين (كون المتتالية (٣) تامة)

فإنه يوجد عنصر وحيد $m \in M$ وبالتالي فإنه يمكن كتابة m بالشكل $m = f^{-1}(x)$

وعليه يمكن تعريف تشاكل ما : $\rho: N \to M$ بالعلاقة

$$\rho(n) = \rho(x + b) = f^{-1}(x)$$

والذي من أجل : $(\rho o f)(m) = \rho\big(f(m)\big) = f^{-1}\big(f(m)\big) = m$

أي $\rho o f = I_M$ وهذا يعني أن ρ تشاكل منشطر من اليسار فإن (٣) منشطر من اليسار

الأمل ليس حلماً بل طريقة لجعل الحلم حقيقة

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا هج – رغد جوده – بكر مشرف

Syria Math Team