نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: السادسة عشر

◄ عنوان المحاضرة: التكاملات المعتلة من النوع الثاني

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ التكاملات المعتلة من النوع الثاني (تعريف +أمثلة).

٢ـ معايير تقارب المتتاليات المعتلة من النوع الثاني .

٣ـ تكاملي أولر .

٤ـ تكاملات أولر من النوع الأول (التكامل البتاوي).

التكاملات المعتلة من النوع الثاني:

ليكن $f(x)$ تابع معرف على $]a,b]$ لنفرض وجود التكامل $I(t)=\int_t^b f(x)\,dt \;:\; a<t\le b$

نسمي هذا التكامل بالتكامل المعتل من النوع الثاني إذا وجدت النهاية

$$\lim_{t\to a} I(t)=\lim_{t\to a}\int_t^b f(x)\,dx \ldots\ldots(*)$$

وتكون $=\int_{a^+}^b f(t)\,dx$

نقول أن التكامل متقارب وقيمته A أي : $\int_{a^+}^b f(t)\,dx=A$

أما إذا كانت النهاية في (*) غير موجودة أو غير محدودة نقول أن التكامل متباعداً

كذلك نعرف التكامل المعتل من النوع الثاني

$$\lim_{t\to b} I(t)=\lim_{t\to b}\int_a^t f(t)\,dt=\int_a^{b^-} f(x)\,dx$$

حيث $f(x)$ معرفاً على المجال $[a,b[$ $\quad a \le t < b$

ويمكن أن يكون التكامل من الشكل :

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx = \int_{a^+}^{t \text{ أو } c} f(x)\,dx + \int_{t \text{ أو } c}^{b^-} f(x)\,dx$$

ومنه $x \in [a,b]$ تكامل محدد $\int_a^b f(x)\,dx$

مثال ١ : ادرس تقارب التكامل : $s > 0$: $\quad I = \int_{0^+}^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$

الحل :

نلاحظ أن $x = 0$ نقطة شاذة لأنه عندما تكون $0 < s < 1$ سيصبح الأس سالب وعندها تكون x في المقام ومنه $x = 0$ تعدم المقام فهي نقطة شاذة.

و أن التكامل المعطى يكتب بالشكل :

$$I = \int_{0^+}^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx = \int_{0+}^{1} e^{-x}x^{s-1}dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$$

وجدنا في المحاضرة السابقة أن التكامل $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ متقارب لأنه لو طبقنا معيار نهاية النسبة للتكامل السابق مع التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ فنجد :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}x^{s-1}}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0$$

و لما كان التكامل $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ متقارب يكون التكامل $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ متقارباً

بقي لكي يتقارب التكامل المعطى أن ندرس تقارب تكامل $\int_{0+}^{1} e^{-x}x^{s-1}dx$ كما يلي :

لنضع $x = \frac{1}{u}$ عندئذٍ $dx = -\frac{du}{u^2}$ كما أن $x = 0 \Rightarrow u = \infty$ و $x = 1 \Rightarrow u = 1$

$$\int_{0+}^{1} e^{-x}x^{s-1}dx = -\int_{\infty}^{1} e^{-\left(\frac{1}{u}\right)}\left(\frac{1}{u}\right)^{s-1}\frac{du}{u^2} = \int_{1}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{u}\right)}u^{-s-1}du$$

إن التابع المكامل هنا يكتب بالشكل $\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}\,u^{s+1}}$ و لنطبق نعيار نهاية النسبة مع التكامل $\int_1^{\infty}\frac{1}{u^{s+1}}du$ فنجد أن

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}\,u^{s+1}}}{\frac{1}{u^{s+1}}}=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}}=1>0:$$

و لما كان التكامل $\int_1^{\infty}\frac{1}{u^{s+1}}du$ متقارباً ((من الشكل $\left(\left(\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx : p>1\right.\right.$ فإن

التكامل $\int_1^{\infty}e^{-\left(\frac{1}{u}\right)}u^{-s-1}du$ متقارب

مما سبق نخلص إلا أن التكامل $I=\int_{0^+}^{\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$ متقارب.

مثال ٢ : ادرس تقارب التكامل $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

نلاحظ أن التكامل المعطى يعاني انقطاعاً عند طرفي المجال و بالتالي لنقسمه إلى تكاملين كما يلي :

$$\mathrm{I}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{t\to1}\left(\int_{-t}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_0^t\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\lim_{t\to1}\left([arcsinx]_{-t}^{0}+[arcsinx]_0^t\right)$$

$$=\lim_{t\to1}\left(-arcsin(-t)+arcsin(t)\right)=\left(-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

التكامل متقارب ونهايته π .

مثال ٣ : ادرس تقارب التكامل

$$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{t\to1}\int_0^t(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx=\lim_{t\to1}\left[-2(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^t=\lim_{t\to1}\left[-2(1-t)^{\frac{1}{2}}+2(1-t)^{\frac{1}{2}}\right]=2$$

إذا I متقارب وقيمته ٢

وظيفة : $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$

معايير تقارب التكاملات المعتلة من النوع الثاني:

هي نفسها المستخدمة في النوع الأول مع مراعاة حدود التكامل أو المجالات.

تكاملي أولر:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\, x)dx$$

لِـ J نقطة شاذة عند $x = \frac{\pi}{2}$

لِـ I نقطة شاذة عند $x = \frac{\pi}{2}$

يمكن رد J إلى التكامل I بالتحويل $\boxed{x = \frac{\pi}{2} - 4}$ ثم نجد أن $I = J$.

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ln(cos\, x) + ln(sin\, x))dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [ln(cos\, x).(sin\, x)]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(\frac{\sin 2x}{2})\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\, 2x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(2)\, dx$$

$$2x = t \quad \Rightarrow \quad 2dx = dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} ln(sin\, t)dt - \frac{\pi}{2}ln(2)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\, t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}ln(sin\, t)dt - \frac{\pi}{2}ln(2)$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\, t)dt + -\frac{\pi}{2}ln(2)$$

$$2I = J - \frac{\pi}{2}ln(2)$$

بما أن $I = J$

$$2I - I = -\frac{\pi}{2}ln(2)$$

بمساعدة التكامل السابق يمكن إيجاد قيمة التكامل الآخر.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin\, t)dt = -\frac{\pi}{2}ln(2)$$

بالتجزئة $u = ln\, sinx$, $dv = dx$

$$I = [x.ln\, sin\, x\,]\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\, x}{sin\, x}\, dx$$

$$\Rightarrow \ -\frac{\pi}{2}ln(2) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{tan\, x}dx$$

وجدنا قيمة التكامل الجديد

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{tan\, x}dx = \frac{\pi}{2}ln(2)$$

◄ **تكامل أولر من النوع الأول ((التكامل البتاوي)):**

تعريف: نسمي التكامل المعتل $B(p,q) = \int_{0^+}^{1^-} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

تكامل أولر من النوع الأول أو التكامل البتاوي وهو يمثل تابع يتعلق بوسيطين (أي يتبع لمتغيرين) هما $p\,,q$ التابع $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ معرف على $]0,1[$ نكتب:

$$B(p,q) = \int_{0^+}^{a} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int_{a}^{1^-} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

بفرض $0 < a < 1$.

إن التكامل البتاوي موجود و متقارب من أجل $p,q > 0$

وظيفة :

$$I = \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$I = \int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

((الإنسان هو نتيجة تفكيره ، ما يفكر فيه يتحقق)) مهاتما غاندي

انتهت المحاضرة

إعداد: وفاء شيخ سالم – باسل أبو عيسى – ناريمان جلو