نظري

◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄المحاضرة : الثالثة عشر ◄ عنوان المحاضرة:

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١-مبرهنات عن التشاكل

٢- جداء المودولات

مبرهنة: إذا كان $f: M \to N$ تشاكلا مودوليا وكان A مودولا جزئيا من M و B مودولا جزئيا من N

فإن : ١- $Kerf = A \Leftrightarrow A = \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right)$

٢- $B \subseteq Imf \Leftrightarrow B = \vec{f}(\overleftarrow{f}(B))$

البرهان :

١- نفرض أن $\overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) = A$ ولنبرهن $Kerf \subseteq A$ حسب مبرهنة سابقة (في محاضر الخامسة)

$$\overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right) = A = Kerf \Rightarrow Kerf \subseteq A$$

⇐بفرض أن $Kerf \subseteq A$ لنبرهن أن $A = \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right)$ بما ان $Kerf \subseteq A$

⇐وضوحا $A = \overleftarrow{f}\left(\vec{f}(A)\right)$

٢- نفرض أن $B = \vec{f}(\overleftarrow{f}(B))$ لنبرهن أن $B \subseteq Imf$ حسب مبرهنة سابقة (في المحاضرة الخامسة)

$$\vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) = B \cap Imf$$

نعوض في $B = \vec{f}(\overleftarrow{f}(B))$

$$\Rightarrow B = B \cap Imf$$

$$\Rightarrow B \subseteq Imf$$

⇐ نفرض أن $B \subseteq Imf$ حسب مبرهنة سابقة

$$\vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) = B \cap Imf$$

فرضا $B \subseteq Imf$

$$\Rightarrow \vec{f}\left(\overleftarrow{f}(B)\right) = B$$

مبرهنة : إذا كان A, B, C ثلاث مودولات على حلقة R وكان $f: B \to A$ و $g: C \to A$ تشاكلين مودوليين وكان f متباين عندئذ القضيتين التاليتين متكافئتين :

١- يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: C \to B$ بحيث $foh = g$

٢- $Img \subseteq Imf$ وأكثر من ذلك :

٣- h غامر $\Leftrightarrow Img = Imf$

الإثبات :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] & A \\
 & C \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dotted, "h"]
\end{tikzcd}$$

$(1) \Rightarrow (2)$ يوجد تشاكل مودولي

$$h: C \to B$$

بحيث $foh = g$ لنبرهن أن $Img \subseteq Imf$

لكل $\forall x \in C: g(x) \in Img$:

$$g(x) = (foh)(x) = f\big(h(x)\big) \in Imf$$

$$\Rightarrow Img \subseteq Imf$$

$(2) \Rightarrow (1)$ نفرض أن $Img \subseteq Imf$ لنبرهن أنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: C \to B$

بحيث $foh = g$

لنبرهن أن h تشاكل مودولي :

$$\forall x_1, x_2 \in C \quad , \qquad \forall \alpha, \beta \in R$$

لنبرهن $h(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha h(x_1) + \beta h(x_2)$

$$\Rightarrow f\big(h(\alpha x_1 + \beta x_2)\big) = (foh)(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

$$= g(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

كون g تشاكل مودولي

$$= \alpha g(x_1) + \beta g(x_2)$$

$$= \alpha (foh)(x_1) + \beta (foh)(x_2)$$

$$= \alpha f\big(h(x_1)\big) + \beta f\big(h(x_2)\big)$$

$$f\big(\alpha h(x_1) + \beta h(x_2)\big)$$

تحقق المطلوب كون f متباين وخو قابل للاختصار من اليسار ..

- لنثبت أن h وحيد :

$h: C \to B$

بحيث $foh = g$ ولنأخذ $K: C \to B$ بحيث $fok = g$

وإن $foh = fok$ كون f متباين وهو قابل للاختصار من اليسار

$\Rightarrow h = k$

- h غامر $\Leftrightarrow Img = Imf$

$\Leftarrow$ لنفرض أن h غامر ولنبرهن أن $Img = Imf$ حسب مبرهنة سابقة فإن :

$Img \subseteq Imf$

لنثبت الاحتواء المعاكس

$\forall f(b) \in Imf$ (٢) من أجل $b \in B$ يوجد $c \in C$

بحيث $f(c) = b$ كون h غامر

نعوض $h(c) = b$ في (٢)

$$f(b) = f\big(h(c)\big) = (foh)(c)$$

$$= g(c) \in Img$$

$\Leftarrow$ $Imf \subseteq Img$ إذا من الاحتوائين نجد : $Imf = Img$

$\Rightarrow$ نفرض ان $Imf = Img$ ولنبرهن أن h غامر من أجل $b \in B$

يوجد $c \in C$ بحيث $f(b) = g(c) = foh(c) = f\big(h(c)\big)$

كون f متباين فهو قابل للاختصار من اليسار

$$\Rightarrow h(c) = b$$

$\Leftarrow h$ غامر

جداء المودولات

الجداء الديكارتي : ليكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R ولتكن المجموعة

$$\prod M_i = \{(m_i)_{i\in I}; m_i \in M_i\}$$

تمثل الجداء الديكارتي للاسرة $(M_i)_{i\in I}$ ونزود هذه المجموعة $(\prod M_i)_{i\in I}$ بقانوني تشكيل :

أحدهما $(+)$ معرف كما يلي :

$$(m_i)_{i\in I} + (m_i')_{i\in I} = (m_i + m_i')_{i\in I}$$

والآخر $(.)$ بمقدار $\alpha \in R$ معرف كما يلي :

$$\alpha(m_i)_{i\in I} = (\alpha m_i)_{i\in I}$$

الإثبات:

أثبت ان $\prod_{i\in I} M_i$ تشاكل مودول على R بالنسبة ل $(+)$و$(.)$ المعرفين أعلاه

ملاحظة : من اجل $i \in I$ نعرف العلاقة

$$P_{r_j} : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$$

كما يلي $P_{r_j}(m_i)_{i\in I} = mj$

أثبت أن P_{r_j} تشكل مودول غامر ونسميه الإسقاط القانوني

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا همج – رغد جودة – بكر مشرف