مبرهنة: ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي و T_2 عندئذٍ إذا كانت $K \subseteq X$ متراصة فإنها تكون مغلقة.

البرهان: لنثبت أن K^c مفتوحة

$\forall x \in X \; ; \exists U \in \tau \; , \; x \in U \subseteq K^c$

بما أن الفضاء X هو T_2 فإنه

$\exists U_x^{(y)} \in \mathcal{V}_x \; , \; V_y^{(x)} \in \mathcal{V}_y \; : \; V_x^{(y)} \cap V_y^{(x)} = \phi$

$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{y \in K} U_y^{(x)}$

$\Leftarrow \{ U_y^{(x)} : y \in K \}$ تغطية مفتوحة لـ K المتراصة

$\Rightarrow \exists y_1, y_2, \ldots, y_n \in K : K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}^{(x)}$

نأخذ $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_x^{(y_i)}$

ولنثبت أن $U \subseteq K^c$

ليكن $z \in K$

$z \in K \Rightarrow \exists y_i : z \in U_{y_i}^{(x)} \Rightarrow z \notin U_x^{(y_i)}$

$\Rightarrow z \notin U$

$\Rightarrow U \subseteq K^c$

ولما كانت x نقطة كيفية من K^c $\Leftarrow$ K^c مفتوحة $\Leftarrow$ K مغلقة.

Scanned by CamScanner

الفضاء البارا متراص:

تعريف: ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي و $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ و $(V_\beta)_{\beta\in B}$ تغطيتان مفتوحتان لـ X
نقول إن التغطية $(V_\beta)_{\beta\in B}$ أدق (أنا صغرة - تابعة) لـ $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ إذا تحقق:

$$\forall \beta\in B;\ \exists \alpha\in A: V_\beta \subseteq U_\alpha$$

تعريف:
ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي و $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ جماعة من المجموعات الجزئية في X، نقول عن هذه الجماعة إنه منتهية محلياً إذا تحقق التالي:
لأجل كل $x\in X$ يوجد $U\in \mathcal{V}_x$ يلاقي عدداً منتهية من عناصر الجماعة $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$

تعريف: الفضاء البارا متراص
نقول عن فضاء (X,τ) إنه بارا متراص إذا تحقق الشرطان:
1) (X,τ) فضاء هاوسدورف
2) لأي تغطية مفتوحة لـ X توجد تغطية مفتوحة لـ X أخرى فاصنة لها ومنتهية محلياً.

مبرهنة تيخونوف:
ليكن (X_1,τ_1) و (X_2,τ_2) فضائين متراصين عندئذٍ $X=X_1\times X_2$ متراص
سنبرهن أن X متراص باعتماد التعريف التالي
X متراص $\Longleftrightarrow$ كل مرشحة أعظمية عليه تكون متقاربة

البرهان:
لتكن $\mathcal{F}$ مرشحة أعظمية في X
عندئذٍ $Pr_i(\mathcal{F})=\mathcal{F}_i$ مرشحة على X_i وأعظمية لأن Pr_i غامر

Scanned by CamScanner

$$(\exists x_i \in X\ ,\ f_i \longrightarrow x_i)_{i=1,2} \Longrightarrow f \longrightarrow (x_1, x_2)$$

والاقتضاء السابق يحتاج لبرهان «يترك للقارئ»

$\Longrightarrow$

$$P_{r_i}(X) = X_i$$

لكون P_{r_i} غامر وبما أن P_{r_i} مستمر وصورة المتراصة وفق تطبيق مستمر متراصة فيتم المطلوب.

النهاية العليا لشبكة:

لتكن $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ شبكة، نعرف النهاية العليا لهذه الشبكة بالشكل:

$$\overline{\lim}\,(x_\alpha) = \inf_{\beta}\,(\sup_{\alpha \geq \beta}(x_\alpha))$$

تمرين: إذا كان (X, τ) فضاء تبولوجي و T_2 عندئذٍ لكل شبكة فيه نهاية واحدة على الأكثر

الحل:

لتكن $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ شبكة من عناصر X ولنفرض أنها متقاربة من x و y بحيث $x \neq y$ وعندها

$$\exists\, O_x, O_y \in \tau : O_x \cap O_y = \phi$$

ولما كان $O_x \in \tau$ و $S_\alpha \longrightarrow x$ عندها:

$$\exists\, \alpha_0 \in A : \forall\, \alpha \geq \alpha_0 \Longrightarrow S_\alpha \in O_x$$

ومن جهة أخرى:

$O_y \in \tau$ و $S_\alpha \longrightarrow y$ عندها

$$\exists\, \alpha_1 \in A : \forall\, \alpha \geq \alpha_1 \Longrightarrow S_\alpha \in O_x$$

وبما أن A مجموعة موجهة فإن:

$$\exists\, \gamma \in A : \gamma \geq \alpha_1 \text{ و } \gamma \geq \alpha_0$$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \forall \alpha \geq \gamma \text{ , } S_\alpha \in \theta_x \wedge S_\alpha \in \theta_y$$

$$\Rightarrow \theta_x \cap \theta_y = \phi$$

وهذا خلف

ملاحظة: إذا كانت A, B مجموعتان موجهتان فإن $A \times B$ مجموعة موجهة.

$$\forall (a,b), (a',b') \in A \times B \text{ ; } (a,b) \geq (a',b')$$

$$\Leftrightarrow a \geq a' \text{ , } b \geq b'$$

تذكر:

ليكن (X,d) فضاء متري، نقول عنه إنه محدود كلياً إذا وجدت $A = \{x_1, x_2, \text{---}, x_n\} \subseteq X$ بحيث $X = \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i, \varepsilon)$

تمرين:

أثبت أن كل فضاء متري متراص هو فضاء محدود كلياً

الحل:

ليكن $\varepsilon > 0$ وإن $\{N(x,\varepsilon) : x \in X\}$ تغطية مفتوحة لـ X

ولما كان X فضاء متراص عندئذٍ يمكن استخراج تجزئة جزئية منتهية ولتكن:

$$\{N(x_i, \varepsilon) : x_i \in X \text{ ; } i = 1, 2, \text{---}, n\}$$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i, \varepsilon)$$

تمرين: أثبت أن $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_3)$ غير مترابط

الحل:

لنأخذ $A =]1,3] \in \mathcal{T}_3$ عندها

$$A^c =]-\infty, 1] \cup]3, \infty[$$

Scanned by CamScanner

الشبكة الجزئية:

تعريف 1: ليكن $f:(A,\leq)\longrightarrow(B,\leq)$ نقول إن f متزايد إذا تحقق أنه من أجل أي عنصرين $a,b\in A$ بحيث $a\leq b$ فإن $f(a)\leq f(b)$

تعريف 2: ليكن $f: X\longrightarrow(B,\leq)$ نقول إن f محدود إذا:

$$\exists\, \gamma\in B : f(x)\leq \gamma \,,\ \forall x\in X$$

تعريف الشبكة الجزئية:

لتكن الشبكة $S:(A,\leq)\longrightarrow X$

$$\alpha\longmapsto S_\alpha$$

ولتكن الشبكة $\sigma:(B,\leq)\longrightarrow X$

$$\beta\longmapsto \sigma_\beta$$

ولنفترض وجود تابع متزايد

$$\varphi: B\longrightarrow A$$

وبحيث يكون $\varphi(B)\subseteq A$ وغير محدودة في A

ويجعل المخطط التالي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{S} & X \\ \uparrow{\scriptstyle\varphi} & \nearrow{\scriptstyle\sigma} & \\ B & & \end{array}$$

$$\sigma = S\circ\varphi$$

عندئذٍ نقول إن $(\sigma_\beta)_{\beta\in B}$ شبكة جزئية من $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$

$$\sigma_\beta = S_{\varphi(\beta)}$$

بكلمات أخرى:

نقول عن $(y_\beta)_{\beta\in B}$ إنها شبكة جزئية من $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ إذا تحقق ما يلي:

$\exists\, \varphi : B \longrightarrow A$

بحيث يكون متزايد و $\varphi(B) \subseteq A$ غير محدودة في A أي:

$\forall \gamma \in A ; \exists \beta \in B \quad \varphi(\beta) \geq \gamma$

وبحيث يكون:

$y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$

مثال:

$S : A \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$n \longmapsto n^2 = x_n$

$\sigma : B = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\beta = (m, n) \longmapsto (m+n)^2 = \sigma_\beta$

نلاحظ أنه:

$\exists\, \varphi : B \longrightarrow A$

$(m, n) \longrightarrow m + n$

ومحقق مايلي

$\forall (m,n), (m',n') \in B : \left\{ \begin{array}{l} m \geq m' \\ n \geq n' \end{array} \right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} m + n \geq m' + n' \\ \varphi(m,n) \geq \varphi(m',n') \end{array}$

$\Leftarrow$ φ متزايد

$\forall \gamma \in A ; \exists \beta (\gamma, \gamma) : \varphi(\beta) = 2\gamma \geq \gamma$

$\Leftarrow$ φ غير محدود في A

$\Leftarrow$ σ_β جزئية من S_α

END

إعداد:

ندى تيناوي ☺ رشا رويس

WhatsApp : 0997378154 Facebook_Page : IOM

تطلب ورقيا من المكتبة الجامعية

المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية

Scanned by CamScanner