

دكتور الملائكة محمد بنيسر قاتيل

عنوان المحاضرة:

المحاضرة
24 + 23

<input checked="" type="checkbox"/>	نظري
<input type="checkbox"/>	عملي

مبرهنة: ليكن (X, T) فضاء توبولوجي و T_2 عندئذ إذا كانت $K \subseteq X$ مترابطة فإنها تكون مغلقة.

البرهان: لنثبت أن K^c مفتوحة

$$\forall x \in X ; \exists U \in T, x \in U \cap K^c$$

بما أن الفضاء X هو T_2 فإنه

$$\exists U_x^{(y)} \in \mathcal{V}_x, \exists V_y^{(x)} \in \mathcal{V}_y : U_x^{(y)} \cap V_y^{(x)} = \emptyset$$

$$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{y \in K} U_y^{(x)}$$

$$\Leftarrow \{ U_y^{(x)} : y \in K \} \text{ تغطية مفتوحة لـ } K \text{ المترابطة}$$

$$\Rightarrow \exists y_1, y_2, \dots, y_n \in K : K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}^{(x)}$$

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}^{(x)} \text{ نأخذ}$$

ولنثبت أن $U \subseteq K^c$ ليكن $z \in K$

$$z \in K \Rightarrow \exists y_i : z \in U_{y_i}^{(x)} \Rightarrow z \notin U_x^{(y_i)}$$

$$\Rightarrow z \notin U$$

$$\Rightarrow U \subseteq K^c$$

ولما كانت x نقطة كيفية من $K^c \Leftarrow K^c$ مفتوحة $\Leftarrow K$ مغلقة.

المضاد البارامتري:

تعريف: ليكن (X, τ) مضاد تيولوجي و (U_α)

و (V_β) تغطيتان مفتومتان لـ X

نقول إن التغطية (V_β) أدق (ناضجة - تابعة)

لـ (U_α) إذا تحقق:

$$\forall \beta \in B; \exists \alpha \in A : V_\beta \subseteq U_\alpha$$

تعريف:

ليكن (X, τ) مضاد تيولوجي و (U_α) جماعة من المجموعات

الجزئية في X ، نقول عن هذه الجماعة إنه منتهية محلياً

إذا تحقق التالي:

لأجل كل $x \in X$ يوجد $U_\alpha \in \mathcal{U}$ يلاقي عدداً منتهية

من عناصر الجماعة $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$

تعريف: المضاد البارامتري

نقول إن مضاد (X, τ) إنه بارامتري إذا تحقق الشرطان:

1] (X, τ) مضاد هاوسدورف،

2] لأي تغطية مفتومة لـ X توجد تغطية مفتومة لـ X

أخرى ناضجة لها ومنتهية محلياً.

مرهنة ليخونوف:

ليكن (X, τ_1) و (X, τ_2) مضادين متراصين عندئذٍ

$$X = X_1 \times X_2$$

سنبرهن أن X متراص باعتماد التعريف التالي

X متراص \iff كل مرشحة أعظمية عليه تكون متقاربة

البرهان:

ليكن \mathcal{F} مرشحة أعظمية في X

عندئذٍ $P_i(f) = P_i$ مرشحة على X_i وأعظمية لأن P_i غامر

$$(\exists x_i \in X, \bigcap_{i=1,2} P_i \rightarrow x_i) \Rightarrow f \rightarrow (x_1, x_2)$$

واللافتضاء السابق يحتاج لبرهان «بترك للقارئ»

⇒

$$P_{r_i}(X) = X_i$$

لكون P_{r_i} غامر وبما أن P_{r_i} مستمر وصورة المتراسة
وفق تطبيق مستمر متراسة فيتم المطلوب.

النهاية العليا لشبكة:

تكن $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ شبكة، نعرف النهاية العليا لهذه الشبكة
بالشكل:

$$\overline{\lim} (x_\alpha) = \inf_{\beta} (\sup_{\alpha \geq \beta} (x_\alpha))$$

تمرين: إذا كان (x_α) متناقصاً متوالياً و T_2 عند α
لكل شبكة فيه نهاية واحدة على الأكثر

الكلية:

تكن $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ شبكة متناصرة X ولنعرف أنها متقاربة

من x و y بحيث $x \neq y$ وعندها

$$\exists \theta_x, \theta_y \in T : \theta_x \cap \theta_y = \emptyset$$

ولما كان $\exists \theta_x \in T$ و $S_\alpha \rightarrow x$ عندها:

$$\exists \alpha_0 \in A : \forall \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow S_\alpha \in \theta_x$$

ومن جهة أخرى:

$\theta_y \in T$ و $S_\alpha \rightarrow y$ عندها

$$\exists \alpha_1 \in A : \forall \alpha \geq \alpha_1 \Rightarrow S_\alpha \in \theta_y$$

وبما أن A مجموعة موجبة فإن:

$$\exists \alpha_0 \geq \alpha_1, \alpha_0 \geq \alpha_1 : \alpha_0 \geq \alpha_1$$

$$\Rightarrow \forall \alpha \Rightarrow \alpha \text{ و } S_\alpha \in \mathcal{O}_x \wedge S_\alpha \in \mathcal{O}_y$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset$$

وهذا خلف

علاقة: إذا كانت مجموعتان موجّهتان فإن $A \times B$ مجموعة موجّهة

$$\forall (a, b) \text{ و } (a', b') \in A \times B ; (a, b) \succ (a', b')$$

$$\iff a \succ a' \text{ و } b \succ b'$$

تذكر:

ليكن (X, id) فضاء متري، نقول عنه أنه محدد كلياً

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$$

$$X = \bigcup_{i=1}^n N(x_i, \epsilon)$$

تمرين:

أثبت أن كل فضاء متري متراس هو فضاء محدد كلياً

اكتب:

$$\{N(x, \epsilon) : x \in X\}$$

تغطية مفتوحة لـ X

ولما كان X فضاء متراس عندئذ يمكن استخراج جزئية جزئية منتهية ولكن:

$$\{N(x_i, \epsilon) : x_i \in X ; i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{i=1}^n N(x_i, \epsilon)$$

تمرين: أثبت أن (\mathbb{R}, T_3) غير مترابط

اكتب:

$$\text{لنأخذ } A =]1, 3[\in T_3 \text{ عندها}$$

$$A^c =]-\infty, 1] \cup]3, \infty[$$

الشبكة الجزئية:

تعريف 1: ليكن $f: (A, \leq) \rightarrow (B, \leq)$ نقول إن f

متزايد إذا تحقق أنه من أجل أي عنصرين $a, b \in A$

حيث $a \leq b$ فإن $f(a) \leq f(b)$

تعريف 2: ليكن $f: X \rightarrow (B, \leq)$ نقول إن f محدود

إذا:

$$\exists x \in B : f(x) \leq x, \forall x \in X$$

تعريف الشبكة الجزئية:

ليكن الشبكة $S: (A, \leq) \rightarrow X$

$$\alpha \mapsto S_\alpha$$

وليكن الشبكة $\sigma: (B, \leq) \rightarrow X$

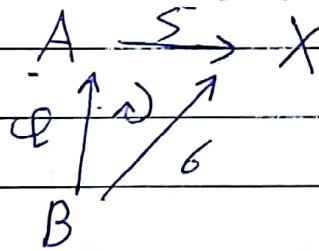
$$\beta \mapsto S_\beta$$

ولنفترض وجود تابع متزايد

$$\varphi: B \rightarrow A$$

بحيث يكون $\varphi(B) \subseteq A$ وغير محدود في A

ويجعل المخطط التالي تبديلي:



$$\sigma = S \circ \varphi$$

عندئذ نقول إن $(\sigma_\beta)_{\beta \in B}$ شبكة جزئية من $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$

$$\sigma_\beta = S_{\varphi(\beta)}$$

بعض أمثلة:

نقول عن $(y_\beta)_{\beta \in B}$ إنها شبكة جزئية من $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ إذا تحقق ما يلي:

$$\exists \varphi : B \rightarrow A$$

حيث يكون متزايد و $\varphi(B) \subseteq A$ غير موجودة في A أي:

$$\forall x \in A; \exists \beta \in B \quad \varphi(\beta) \geq x$$

وحيث يكون:

$$y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$$

$$S : A \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

مثال:

$$n \mapsto n^2 = x_n$$

$$\sigma : B = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\beta = (m, n) \mapsto (m+n)^2 = \sigma_\beta$$

نلاحظ أنه:

$$\exists \varphi : B \rightarrow A$$

$$(m, n) \mapsto m+n$$

والمحقق بايلي

$$\forall (m, n), (m', n') \in B : \left\{ \begin{array}{l} m \geq m' \\ n \geq n' \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(m, n) \geq \varphi(m', n')$$

← φ متزايد

$$\forall x \in A; \exists \beta(x, x) : \varphi(\beta) = 2x \geq x$$

← φ غير موجود في A

← β جزئية من α

END

اعداد:



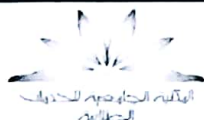
رسا رويين

ندى تيناوي

6

WhatsApp : 0997378154

Facebook_Page : IOM



تطلب ورقيا من المكتبة الجامعية