◄دكتور المادة: رشا بعاج

◄المحاضرة: الثامنة عشر　　عنوان المحاضرة: التفاضل العددي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتعريف التفاضل

٢ـصيغة المشتق(تقدمية ـ تراجعية .....)

ولنبدأ .... ^_^:

يعرف التفاضل العددي بأنه اجرائية عددية لحساب قيمة المشتق لدالة ما عند نقاط محدودة

لدينا الدّالة f نريد أن نحسب مشتق هذه الدالة عند نقطة مفروضة ولتكن (x_0)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

حيث (h) هي المسافة بين نقطتين

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow F(x) = p_1 + E_1$$

$$f(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(\theta_x)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0+x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_0+x_1} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(\theta_x)$$

وتكون المسافة بين النقطتين هي h　　$x_i = x_0 + h$

$$\Rightarrow f(x) = f(x)\frac{x-x_0-h}{-h} + f(x_0+h)\frac{x-x_0}{h} + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!} f''(\theta_x)$$

$$f'(x) = \frac{-f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0+h)}{h} + D_x\left[\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!} f''(\theta_x)\right]$$

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{x-x_0-h}{2!}f''(\theta_x) + \frac{(x-x_0)}{2!}f''(\theta_x) + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!}D_x f''(\theta_x)$$

ايجاد المشتق عند نقطة محدودة $f'(x_0) = \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{p_i \text{ تقدمية}} - \underbrace{\frac{h}{2!}f''(\theta_x)}_{E}$

وفيما يلي نورد جدولاً يحوي قوانين لإيجاد المشتق وذلك تبعاً لعدد النقاط علماً أنَّ المعطيات وشكل المسألة يدلّك على معرفة القانون السليم، وكلّ شيء سيتوضح بالأمثلة

الخطأ	قانون المشتق $f'(x)$	عدد النقاط
$E = \left\lvert\frac{h}{2}f''(\theta_x)\right\rvert$	تقدمية $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	2
$E = \left\lvert\frac{h}{2}f''(\theta_x)\right\rvert$	تراجعية $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$	2
$E = \left\lvert\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_x)\right\rvert$	تقدمية $f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$	3
$E = \left\lvert\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\theta_x)\right\rvert$	مركزية $f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[-f(x_0-h)+f(x_0+h)]$	3
$E = \left\lvert\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\theta_x)\right\rvert$	تراجعية $f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[f(x_0-2h)-4f(x_0-h)+3f(x_0)]$	3
$E = \left\lvert\frac{h^4}{5}f^{(5)}(\theta_x)\right\rvert$	مركزية $f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$	5
$E = \left\lvert\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\theta_x)\right\rvert$	تقدّمية $f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}[-25f(x_0)+48f(x_0+h)-36f(x_0+2h)+16f(x_0+3h)-3f(x_0+4h)]$	5

مثال: أوجد المشتق للدّالة f عند $x_0 = 0.2$ علماً أنَّ:

x_i	0.1	0.2	0.4
$f(x_i)$	2.11	3.04	5.12

الحل: لدينا:

$$h_1 = 0.4 - 0.2 = 0.2$$

$$h_2 = 0.2 - 0.1 = 0.1$$

نلاحظ أنَّ النّقاط ليست متساوية البعد لذلك لا نطبّق قانون مشتق الدّالة عند ثلاث نقاط

لذلك نلجأ لقانون الاشتقاق الّذي يحوي نقطتين

وهنا لدينا المشتق المطلوب عندما $x = 0.2$ ومنه فسوف نعتبر النقطتان هما:

$$x_0 = 0.2 \quad , \qquad x_1 = x_0 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4 \quad ; h = 0.2$$

نطبّق قانون التقدّميّة لنقطتين لأنّنا أخذنا النّقطة الّتي تليها...

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx \frac{5.12 - 3.04}{0.2} \approx 10.4$$

ثمَّ نعتبر النقطتان هما:

$$x_0 = 0.2 \quad , \qquad x_1 = x_0 - h = 0.2 - 0.1 = 0.4 \quad ; h = 0.1$$

نطبّق قانون التّراجعيّة لنقطتين لأنّنا أخذنا النّقطة الّتي قبلها...

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \approx \frac{3.04 - 2.11}{0.1} \approx 9.3$$

تنويه: " في مثل هذا السؤال لن يطلب حساب قيمة الخطأ لأنّه لم يعطى f بنص السؤال "

مثال آخر: استخدم أفضل الصّيغ لإتمام الجدول التالي:

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0.1	2.11	
0.2	3.56	
0.3	1.02	

نستخدم ثلاث نقاط للصيغة التقدمية والمركزية والتراجعية

الحل:

نلاحظ أن النقاط الثلاث متساوية البعد $h = x - x_0 = x_2 - x_1 = 0.1$
نطبّق القوانين الّتي تحوي ثلاث نقاط لأنَّ النقاط متساوية البعد.

❖ لنوجد المشتق عند $x_0 = 0.1$:
نلاحظ أنّ 0.1 هي أوّل نقطة أي سنطبّق قانون التقدّميّة لثلاث نقط

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h]$$

$$\Rightarrow f'(0.1) = \frac{1}{2(0.1)}[-3(2.11) + 4(3.56) - 1.02] = 34.45$$

❖ لنوجد المشتق عند $x_0 = 0.2$:
نلاحظ أنّ 0.2 هي نقطة المنتصف(المركز) أي سنطبّق عليها قانون المركزية لثلاث نقط

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-f(x_0 - h) + f(x_0 + h)]$$

$$\Rightarrow f'(0.2) = \frac{1}{2(0.1)}[-(2.11) + 1.02] = -5.45$$

❖ لنوجد المشتق عند $x_0 = 0.3$:
نلاحظ أنّ 0.3 هي آخر نقطة أي سنطبّق عليها قانون التراجعيّة لثلاث نقط

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)]$$

$$\Rightarrow f'(0.3) = \frac{1}{2(0.1)}[(2.11) - 4(3.56) + 3(1.02)] = -45.35$$

مثال وظيفة: أوجد مشتق الدالة f عند $x = 0.5$ علماً أن :

x_i	0.5	1	1.5	2
$f(x_i)$	3.65	6.80	9.90	12.15

لكل الصيغ الممكنة لحساب المشتق الأول الدالة $f(x)$ عند $x = 0.7$ مستفيداً من البيانات.

مثال وظيفة: استخدم أفضل الصيغ لإتمام الجدول الآتي :

x_i	0	0.5	1
$f(x_i)$	1	1.8987	3.7183
$f'(x_i)$			

إعداد: دعاء الرحيل & مرح غريب & ماريا عيد