نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄المحاضرة : الحادية والعشرون ◄ عنوان المحاضرة: اختبارات التقارب

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـاختبارات التقارب بإطلاق (١ـ اختبار المقارنة) .

٢ـالنهاية العليا والنهاية الدنيا لمتتالية حقيقية.

٣ـخواص النهاية العليا والنهاية الدنيا.

تكلمنا في المحاضرة السابقة عن التقارب بإطلاق للمتسلسلة الذي هو عبارة عن تقارب متسلسلة الطويلات لهذه المتسلسلة ،وهذه المتسلسلة حقيقية ذات حدود غير سالبة.

وقلنا أن كل متقاربة بالإطلاق تكون متقاربة إلا أن العكس غير صحيح ،فقد توجد متسلسلة متقاربة دون أن تكون متقاربة بالإطلاق ونسمي هذه المتسلسلات بالمتسلسلات المتقاربة شرطياً .

إذاً ودنا ثلاثة أنواع للتقارب: ١)التقارب ، ٢)التقارب بالإطلاق ، ٣)التقارب الشرطي .

وسنبدأ بمحاضرتنا :

اختبارات التقارب بإطلاق

١ اختبار المقارنة :

لتكن $\sum \mathfrak{Z}_n$ متسلسلة عقدية .

ولتكن $\sum \alpha_n$متسلسلة ذات حدود حقيقية غير سالبة ولنفرض وجود عدد Kبحيث يحقق المتراجحة : $|\mathfrak{Z}_n| \le k\alpha_n$ لأجل كل $N \le n$ عندئذ :

تقارب $\sum \alpha_n$ يقتضي التقارب بإطلاق لـ$\sum \mathfrak{Z}_n$.

الاثبات :بما أن $\sum \alpha_n$ متقاربة فإن $\sum k\alpha_n$ متقاربة أيضاً

كما أن $\sum \alpha_n$متسلسلة ذات حدود حقيقية غير سالبة.

$\overset{\text{حسب اختيار المقارنة}}{\Leftarrow}$ $\sum|З_n|$ متقاربة $\Leftarrow \sum З_n$ متقاربة بالإطلاق.

نتيجة: إذا وجد عدد حقيقي λ بحيث $|\lambda| \leq 1$ لأجل جميع قيم n باستثناء عدد منته منها فإن $\sum З_n$ متقاربة بالإطلاق.

الإثبات:لو أخذنا $an = \lambda^n$ ، $\sum \lambda^n$ عبارة عن متسلسلة هندسية ((حقيقية))

أساسها $|\lambda| = \lambda < 1$ فهي متقاربة $\overset{\text{حسب مبرهنة}}{\Leftarrow}$ $\sum З_n$ متقاربة بالإطلاق

مثال(1) : ما هي طبيعة المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n cis\, n}{n^2}$ حيث a ثابت عقدي و $|a| \leq 1$

الحل :

$$|З_n| = \left|\frac{a^n cis\, n}{n^2}\right| = \frac{|a^n||cis\, n|}{n^2} = \frac{|a^n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

وبما أن $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة (ريمانية $p = 2 > 1$)) فإنه :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n cis\, n}{n^2}$ متقاربة بإطلاق حسب اختبار المقارنة .

مثال (2) : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n cis\, n}{n^2 2} = \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^n cis\, n}{n^2}$

$$|З_n| = \left|\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^n cis\, n}{n^2}\right| = \frac{\left|\left(\frac{i}{2}\right)^n\right| |cis\, n|}{n^2} = \frac{\left|\left(\frac{i}{2}\right)^n\right|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n cis\, n}{n^2 2^n}$ متقاربة بإطلاق حسب اختبار المقارنة.

ما طبيعة كل من المتسلسلتين ؟

الحل: إما نتبع معيار المقارنة $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$

أو نأخذ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ الجزء الحقيقي للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cis\, n}{n^2}$ وهي متقاربة.

و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ الجزء التخيلي للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cis\, n}{n^2}$ وهي متقاربة .

فالمتسلسلة متقاربة.

النهاية العليا والنهاية الدنيا لمتتالية حقيقية

لتكن $\{x_n\}$ متتالية حقيقية ولنعرف المتتالية $\{a_n\}$ من $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$a_1 = \text{Sup}\{x_0, x_1, ..\}$$

$$a_2 = \text{Sup}\{x_1, x_2, ..\}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \text{Sup}\{x_n, x_{n+1}, ..\}$$

إن المتتالية $\{x_n\}$ متتالية في $\overline{\mathbb{R}}$ ((لأنه قد يكون الـ Sup هو ∞)) حيث $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup [-\infty, \infty]$ و من الواضح أن $a_{n+1} \le a_n \Leftarrow \{a_n\}$ متناقصة ((ليس بالضرورة تماماً)) ، بالتالي فلها نهاية في $\overline{\mathbb{R}}$ نسميها النهاية العليا للمتتالية $\{x_n\}$ ونرمز لها :

$$\lim Sup\, x_n \quad \text{أو} \quad \overline{\lim}\, x_n$$

أي أن $\overline{\lim}\, x_n = \lim a_n$

مبرهنة:

(١) كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى متقاربة من حدها الأعلى.
(٢) وكل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى متقاربة من حدها الأدنى.
(٣) كل متتالية متناقصة ستسعى الى نهاية في $\overline{\mathbb{R}}$

*و بالمثل لنعرف المتتالية $\{b_n\}$ كما يلي :

$$b_0 = \inf\{x_0, x_1, ..\}$$

$$b_1 = \inf\{x_1, x_2, ..\}$$

$$\vdots$$

$$b_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, ..\}$$

هذه المتتالية في $\overline{\mathbb{R}}$ وهي متزايدة في $\overline{\mathbb{R}}$ فلها نهاية في $\overline{\mathbb{R}}$ نسميها النهاية الدنيا لِـ $\{x_n\}$ ونرمز لها ب

$$\lim\inf x_n \quad \text{أو} \quad \underline{\lim} x_n$$

أي أن $\underline{\lim} x_n = \lim b_n$

مثال(١) : لنأخذ المتتالية $\{x_n = \sin n\}$ وهي متتالية حقيقية غير متقاربة لعدم وجود نهاية لها.

$$a_n = \sup\{\sin(n)\ ,\sin(n+1)\,, ...\} = 1 \ \to 1$$

$$\Rightarrow \ \overline{\lim} \sin n = 1$$

$$b_n = \inf\{\sin(n)\ ,\sin(n+1)\,, ...\} = -1 \ \to -1$$

$$\Rightarrow \ \underline{\lim} \sin n = -1$$

مثال(٢) : المتتالية $\{(-1)^n\}$ متتالية حقيقية متباعدة (لأنها متناوبة)

$$\overline{\lim}(-1)^n = 1 \qquad , \qquad \underline{\lim}(-1)^n = -1$$

تذكرة: نقطة تجمع لمتتالية: نقول عن a أنها نقطة تجمع للمتتالية $\{3_n\}$ إذا حوى أي جوار ل a عدد غير منته من الحدود للمتتالية $\{3_n\}$ ، ونهاية المتتالية المتقاربة هي نقطة التجمع الوحيدة لها ، والعكس غير صحيح بالضرورة ، وأي متتالية تملك أكثر من نقطة تجمع تكون متباعدة .

خواص النهاية العليا و النهاية الدنيا: لتكن $\{x_n\}$ متتالية حقيقية عندئذٍ :

١) $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$

2) إن $\overline{\lim}\, x_n$ هي أكبر نقطة تجمع للمتتالية $\{x_n\}$.

٣) إن $\underline{\lim}\, x_n$ هي أصغر نقطة تجمع للمتتالية $\{x_n\}$.

تذكرة: نقول عن a أنها نقطة تجمع لِـ متتالية $\{3_n\}$ إذا وفقط إذا حوى أي جوار لِـ a عدد غير منته من حدود المتتالية $\{3_n\}$.

ونهاية متتالية متقاربة هي نقطة التجمع الوحيدة ولكن العكس غير صحيح بالضرورة ، وأي متتالية تملك أكثر من نقطة تجمع تكون متباعدة.

مثلاً: للمتتالية $\{i^n\}$ أربع نقاط تجمع وهي $\{i\,,-i\,,1\,,-1\}$

وأن نقطة تجمع متتالية ليست بالضرورة أن تكون نقطة تجمع لمجموعة قيمها .

إن نقاط التجمع لِـ $\{i^n\}$ هي $+1,-1$.

- لأن أي جوار ل -1 سيحوي عدد غير منته من حدود المتتالية ((كل الحدود المساوية لل (-1)))

أي الحدود التي تكون n عدد فردي ، بالتالي ستكون موجودة في ذلك الجوار.

- وأن كل الحدود التي تساوي الـ 1 ((أي أن n زوجي)) ستكون موجودة في أي جوار للـ١ ،
- و بالتالي هذه المتتالية متباعدة لأنها تملك أكثر من نقطة تجمع .

٤ إذا كان للمتتالية $\{x_n\}$ نهاية ((محدودة أو غير محدودة)) إذا كانت:

$$\underline{\lim}\, x_n \le \lim x_n \le \overline{\lim}\, x_n$$

وبشكل خاص ، إذا كانت متقاربة فلها نقطة تجمع وحيدة: $\lim x_n = \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$

ملاحظة: إن $+\infty\,,-\infty$ يُمكننا تسميتهم بنقاط تجمع لِـ متتالية .

٥ نهاية أي متتالية جزئية متقاربة من متتالية هي نقطة تجمع لها .

ملاحظة: النهاية العليا و النهاية الدنيا تُعرَّف فقط من أجل المتتاليات الحقيقية .

٦ النهاية الدنيا هي أصغر نقطة تجمع.

النهاية العليا هي أكبر نقطة تجمع .

انتهت المحاضرة