نظري

◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄ المحاضرة : السابعة عشر ◄ عنوان المحاضرة : المجموع المباشر الداخلي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

1-مبرهنات

مبرهنة : إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R وكان N مودولا على الحلقة R فإن :

$$Hom\left(N,\prod_{i\in I} M_i\right)\cong\prod_{i\in I} Hom\,(N,M_i)$$

البرهان :

نأخذ العلاقة التالية :

$$\ominus: Hom\left(N,\prod_{i\in I} M_i\right)\to\prod_{i\in I} Hom\,(N,M_i)$$

المعرف كما يلي : $\ominus\,(f)=\left(P_{r_i} o f\right)_{i\in I}$

وذلك $\forall (f)\in Hom(N,\prod_{i\in I} M_i)$ حيث P_{r_i} الاسقاط القانوني

وعلينا أن نثبت أن $\ominus$ تماثل أي نثبت أن : $\ominus$ تطبيق ، تشاكل ،غامر ، متباين..

1- $\ominus$ تطبيق لأن $\forall f,g\in Hom(N,\prod_{i\in I} M_i)$ بحيث $f=g$ وينتج لكل i من I
$(P_{r_i} o f)=(P_{r_i} o g)$ ومنه $(P_{r_i} o f)_{i\in I}=(P_{r_i} o g)_{i\in I}$ ومنه

$$\ominus\,(f)=\ominus\,(g)$$

$\Leftarrow \ominus$ تطبيق ..

-2 $\ominus$ تشاككل زمري : $\forall f, g \in Hom(N, \prod_{i\in I} M_i)$ فإن

$$\ominus(f+g) = P_{r_i} o (f+g)_{i\in I}$$

$$\Rightarrow \left(P_{r_i} o f\right)_{i\in I} + \left(P_{r_i} o g\right)_{i\in I}$$

$$\ominus(f) + \ominus(g)$$

$$\Rightarrow (f+g) = \ominus(f) + \ominus(g)$$

ومنه $\ominus$ تشاكل زمري

-3 $\ominus$ غامر لأن :

$$\forall (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Hom\,(N, M_i)$$

فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: N \to \prod_{i\in I} M_i$ *يجعل المخطط التالي تبديلي*

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g_i"] \\
\prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "P_{r_i}"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

أي أنه $P_{r_i} o h = g_i$

وبالتالي : $\ominus(h) = \left(P_{r_i} o h\right)_{i\in I} = (g_i)_{i\in I}$

أي أن $\ominus$ غامر ..

-4 $\ominus$ متباين : $\forall \alpha \in Ker\,\ominus$

فإن $\ominus(\alpha) = 0$

ولكل $\left(P_{r_i} o \alpha\right)_{i\in I} = 0$ وذلك α التشاكل الوحيد الذي يجعل المخطط التالي تبديلي

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "0"] \\
\prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "P_{r_i}"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

أي أن: $0 = P_{r_i} o \alpha = P_{r_i}(\alpha)$

وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت $\alpha = 0$

وبالتالي $\ominus$ متباين

$\Leftarrow$من كل مما سبق نجد ان $\ominus$ تماثل

مبرهنة : لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R .. N مودولاً على R عندئذ:

$$Hom(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \cong \prod_{i\in I} M_i\,(M_i, N)$$

الإثبات :

لنأخذ العلاقة $\ominus : Hom(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \to \prod_{i\in I} Hom\,(M_i, N)$

المعرف كما يلي: $\ominus\,(f) = (foin_i)_{i\in I}$ حيث in_i التباين القانوني

و علينا إثبات أن $f \in Hom(\bigoplus_{i\in I} M_i, N)$:

$\ominus$ تطبيق، تشاكل ، غامر ، متباين ..

-1 $\ominus$ تطبيق لأن :

$\forall f, g \in Hom(\bigoplus_{i\in I} M_i, N)$ بحيث $f = g$

عندئذ : $(foin_i)_{i\in I} = (goin_i)_{i\in I}$ لكل $i \in I$

$\Rightarrow \ominus\,(f) = \ominus\,(g)$

$\Leftarrow$تطبيق

-2 $\forall f, g \in Hom(\bigoplus_{i\in I} M_i, N)$ فإن

$$\ominus\,(f+g) = \big((f+g)oin_i\big)_{i\in I}$$

$$\ominus\,(f+g) = (foin_i)_{i\in I} + (goin_i)_{i\in I} = \ominus\,(f) + \ominus\,(g)$$

أي أن $\ominus$ تشاكل زمري

-3 $\ominus$ غامر :

$\forall (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i\,(M_i, N)$: فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد :

$h : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$

يجعل المخطط التالي تبديلي :

أي : $hoin_i = g_i$

لكل $i \in I$

منه التالي : $\ominus\,(h) = (hoin_i)_{i\in I} = (g_i)_{i\in I}$

$\Leftarrow \ominus$ غامر ..

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "in_i"'] & N \\
\bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

4- $\ominus$ متباين

$$\ominus(\alpha) = 0 \quad \Leftarrow \forall \alpha \in \operatorname{Ker} \ominus$$

أي أن $(\alpha o in_i) = 0$ *وأن* α *التشاكل الوحيد الذي يجعل المخطط التالي تبديلي :*

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "in_i"'] & N \\
\oplus_{i\in I} M_i \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

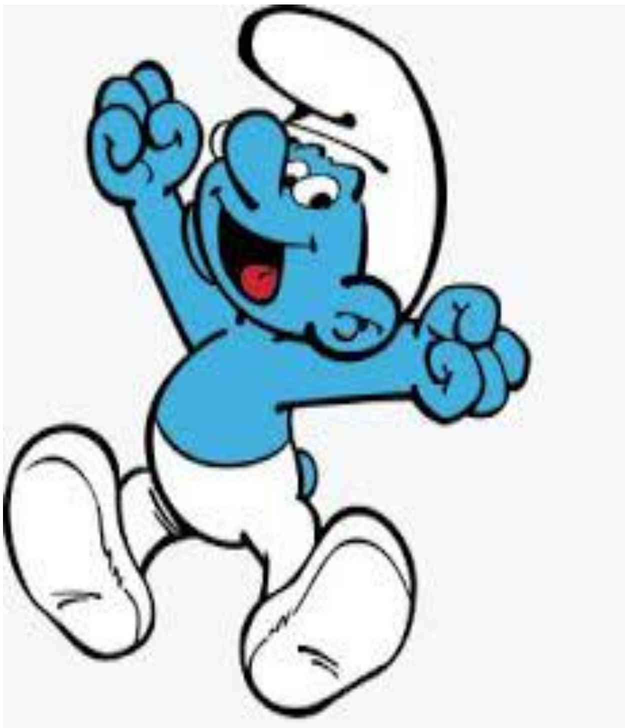
لأن المجموع $\oplus_{i\in I} M_i (in_i)_{i\in I}$

هو جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ وبالتالي

$\alpha = 0$

وبالتالي $\ominus$ متباين

نستنتج ان $\ominus$ تماثل ..



يجب أن يكون احساسك إيجابي مهما كانت الظروف

ومهما كانت التحديات

ومهما كان المؤثر الخرجي

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا همج – رغد جوده – بكر مشرف