المحاضرة الحادية والعشرون (21)

نظري
عملي

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: تمارين

تتمة حل التمرين الموجود بمحاضرة ((18)) :

$\boxed{4}$ لنأخذ $\exists \phi : ]-\pi,\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow tg\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

بحيث $-\pi < x < \pi \Leftarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ وبالتالي

$\cos\frac{x}{2}$ لن تنعدم على $]-\pi,\pi[$ وبالتالي $\phi$ مستمرة

أي $\phi$ غامرة $\phi(]-\pi,\pi[) = tg(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$

$$\phi'(x) = \frac{1}{2}(1+tg^2\frac{x}{2}) > 0 \quad \forall x \in ]-\pi,\pi[$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

ولدينا أيضاً $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

نستنتج أنّ $(\vec{r}_1 \circ \phi)(u) = \vec{r}_3(u)$

أي $\vec{r}_1 \sim \vec{r}_3$ (وهو المطلوب)

* تمرين :

أثبت أن التمثيل التالي $x(t) = a(\ln t + \frac{1-t^2}{1+t^2})$

$0 < t < \infty$ $\quad y(t) = \frac{2at}{1+t^2}$

هو تمثيل آخر للسبي (سيحل في محاضرة قادمة)

* مرتبة أول مشتق غير معدوم عند $t_0$ زوجية ⟸ لنثبت أن $P_0$ شاذة أساسية لـ $\ell$

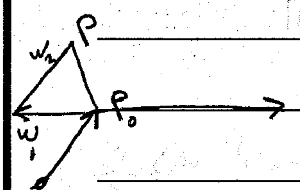
لنفرض جدلاً أن $P_0$ ليست شاذة أساسية لـ $\ell$ ⟸ $P_0$ نظامية في التمثيل الطبيعي $\vec{r}^*$ لنشر $\vec{r}^*$ في جوار $S_0$ (($S$ وسيط طبيعي لـ $P_0$))

$$\vec{r}^* = \vec{r}^*(S_0) + (S-S_0)\underset{\neq 0}{\vec{r}^{*\prime}(S_0)} + \vec{o}(S-S_0)$$

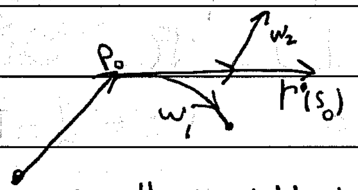
$$\overrightarrow{P_0P} = \vec{r}^*(S) - \vec{r}^*(S_0) = \underbrace{(S-S_0)\vec{r}^{*\prime}(S_0)}_{w_1} + \underbrace{\vec{o}(S-S_0)}_{w_2}$$

$$\vec{r}^{\,\prime}(S_0) \parallel \vec{r}(2\ell)$$

لنميز حالتين:




1 $P$ قبل $P_0$ على $\ell$ ⟸ $S<S_0$ ⟸ $S-S_0<0$




2 في حال $P$ بعد $P_0$ على $\ell$ ⟸ $S>S_0$ ⟸ $S-S_0>0$

فرعا المنحني قبل وبعد $P_0$ سيقعان باتجاهين مختلفين بالنسبة للمستوي المار من $P_0$ والمعامد للماس عند $P_0$ (الموازي $\vec{r}^{2\ell}(t_0)$ و $\vec{r}'(S_0)$) ⟸ هذا تناقض ⟸ $P_0$ هي شاذة أساسية لـ $\ell$

2 مرتبة أول مشتق لـ $\vec{r}$ غير معدوم عند $t_0$ فردية ⟸ فرعا المنحني سيقعان في جهتين مختلفتين بالنسبة للمستوي المار من $P_0$ العمودي على المماس عند $P_0$

- نستطيع في هذه الحالة أن نثبت أن هذه نقطة شاذة غير أساسية

ملاحظة: يتحكم نشر تايلور بانتقال نقطة $P$ إلى $P_0$.

*تذكرة :

$h$ الوسيط الطبيعي المقابل لـ $p$ باعتبار $p_0$ مبدأ القياس اطوال الاقواس

$$h = \int_0^b \| r'(u) \| \, du$$

محور ox موجود ضمن هذا المستوي

اللولب

- هل يوجد تلامس بين المنحني $\ell$ الممثل بـ $r$ والمستوي $\Pi$ الذي معادلته $az - by = 0$ ؟
عند النقطة $p_0 = (a,0,0)$ ومن اي مرتبة ؟ " $r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ "

*الحل :

التمثيل الوسيطي للولب هي : $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $a > 0$ $b \neq 0$

$$a\cos t = a \; , \; a\sin t = 0 \; , \; bt = 0 \Rightarrow t = 0$$

بما أنّ $\vec{r}(0) = (a,0,0)$ فإن قيمة الوسيط المقابلة لـ $p$ هي $t = 0$

$$h = \int_0^t \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2} \, dt = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2} \, dt = \sqrt{a^2+b^2}\, t$$

$$t \to 0 \Leftrightarrow h \to 0$$

$$dh = \frac{|a z_p - b y_p|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|abt - ba\sin t|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a.b}{\sqrt{a^2+b^2}} |t - \sin t|$$

$$\frac{dh}{h} = \frac{a.b}{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{|t - \sin t|}{t} \qquad |\sin t| \leq |t|$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{t - \sin t}{t} \overset{H}{=} \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{1} = 0 \Longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{dh}{h} = 0$$

$$\frac{dh}{h^2} = \frac{a.b}{\sqrt{a^2+b^2}\,(a^2+b^2)} \frac{|t - \sin t|}{t^2}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{dh}{h^2} = \lim_{t \to 0} \frac{t - \sin t}{t^2} \overset{H}{=} \lim \frac{1 - \cos t}{2t} = 0$$

$$\frac{d_h}{h^3} = \frac{ab}{(a^2+b^2)^2} \; \frac{t-\sin t}{t^3} \xrightarrow{?}$$

$$\lim \frac{d_h}{h^3} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{3t^2} \overset{0}{\underset{0}{=}} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{6t} = \frac{1}{6} \neq 0$$

اللولب والمستوي تلامس عند $(a,0,0)$ من المرتبة الثانية على الأقل

ملاحظة:

اذا كان $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ مستوٍ فإن بعد النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ عن المستوي $\Pi$ يعطى بالدستور التالي:

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

- نقول ان للمنحني تلامس من المرتبة $n$ على الأقل مع المستوي اذا كان

بعد النقطة عن مستوي

$$\frac{d_h}{h^n} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

تلامس من المرتبة $n$ على الأقل

الوسيط الطبيعي المقابل لـ $P$ باعتبار $P_0$ مبدأ القياس

★★ انتهت محاضرة ★★