◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄ المحاضرة : السادسة عشر ◄ عنوان المحاضرة: الجداءات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١ـتعريف التباين القانوني

٢ـمبرهنة تربط الجداء المرافق بالتباين القانوني

إذا أخذنا العلاقة $in_j = M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ المعرفة على $in_j(x) = (m_i)_{i\in I}$ بحيث

$$\begin{cases} i \neq j & \text{عندما } m_i = 0 \\ i = j & \text{عندما } m_j = x \end{cases}$$

فنجد أن in_j تشاكل مودولي متباين يسمى التباين القانوني لـ M_j في $\bigoplus_{i\in I} M_i$

مبرهنة: إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R فإن $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\,,\left(in_j\right)_{i\in I}\right)$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

الإثبات :

ليكن M مودولا على حلقة R ولتكن $(g_i\colon M_i \to M)_{i\in I}$ أسرة تشاكلات مودولية ولنأخذ التطبيق :

$h\colon \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$ المعرفة ب $h((m_i)_{i\in I}) = \sum_{i=I} g_i(m_i)$

فيكون hتشاكل مودولي (يترك للطالب)

ومن جهة ثانية $\forall x \in M_i$ فإن $(hoin_i)(x) = h\big(in_i(x)\big) = g_i(x)$

وأن hوحيد لأنه لو وجد تشاكل آخر

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "in_j"'] & M \\ \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

$k\colon \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$

بحيث : $(koin_i) = g_i$

عندئذ يكون :

$$k\left(\left(in_j\right)_{i\in I}\right) = k\left(in_i(m_i)\right)$$

$$= \sum_{i\in I}\left(koin_j\right)(m_i) = \sum g_i(m_i) = h((m_i)_{i\in I})$$

أي أن $k = h$ أي h وحيد وبالتالي يكون :

$\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\,,\left(in_j\right)_{i\in I}\right)$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

المجموع المباشر الداخلي : لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M على الحلقة R نقول إن M مجموع مباشر داخلي للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ إذا كان التطبيق : $h: \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$ تماثلا

مبرهنة: إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M على حلقة R فإن M مجموعاً مباشراً داخلياً لهذه والأسرة إذا وفقط إذا : كلا $m \in M$ يكتب على الشكل الوحيد حيث

$$m = \sum_{i\in I} m_i \quad : m \in M_i$$

وحيث $m = 0$ باستثناء عدد منه

الإثبات :

لكي يكون M مجموعا مباشرا داخليا يجب أن يكون $h: \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$ تماثلا حيث نعلم أن h تشاكل مودولي فإذا كان hتماثلا معنى ذلك أن h غامر أي :

$$Im(h) = M = \sum_{i\in I} M_i \Leftrightarrow \text{غامر } h$$

وهذا يكافئ أيضا أن كل $m \in M$ يكتب بالشكل $m_i = \sum_{i\in I} M_i \quad : \quad m_i \in M_i$ وأن $m_i = 0$

باستثناء عدد منته ويكون h متباينا $\Leftrightarrow m = \sum_{i\in I} m_i$

وحيدا لان $\sum_{i\in I} m_i = h(m_i)_{i\in I}$ ..تحقق المطلوب ..

مبرهنة : إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ اسرة مودولات جزئية من مودول M على حلقة R فإن القضايا الآتية متكافئة :

١- $\sum_{i\in I} M_i$ مجموع مباشر للاسرة $(M_i)_{i\in I}$

٢- إذا كان $\sum_{i\in I} m_i = 0$ بحيث $m_i \in M_i$ فإن $m_i = 0 \quad (\forall i \in I)$

٣- $\forall i \in I$ فإن $\forall i,j \in I \quad M_i \cap \sum_{i\neq j} M_j = 0$

الإثبات :

$(1) \Leftarrow (2)$ إن $\sum 0_i = 0 = \sum_{i\in I} m_i$ وكون المجموع المباشر داخلي فحسب المبرهنة الأخيرة فإن $m_i = 0$ لكل $i \in I$

$(2) \Leftarrow (3)$ $\forall x \in M_i \cap \sum_{i\neq j} M_j \Leftarrow x \in M_i \wedge x \in \sum_{i\neq j} M_j$

وبالتالي من جهة $x = m_i$ $\boxed{1}$

ومن جهة أخرى $x = \sum_{i\neq j} m_j$ $\boxed{2}$

وبطرح ٢ من ١ $\Leftarrow 0 = m_i - \sum_{i\neq j} m_j$ وحسب الفرض (٢) $\Leftarrow m_i = 0$ يعطي

$x = 0$ أي أن $M_i \cap \sum_{i\neq j} M_j = 0$

$(3) \Leftarrow (1)$ لنفرض $\sum_{i\in I} m_i = \sum_{i\in I} m_i'$ وذلك $\forall i \in I$ وإن $\forall m_i, m_i' \in M_i$

فنجد ان $\sum_{i\in I} m_i - \sum_{i\in I} m_i' = 0$

$$\sum_{i\in I} M_i \Rightarrow \sum (m_i - m_i') = 0$$

أي أن $\sum (m_i - m_i') \in M_i \cap \sum_{i\neq j} M_j$ وبالتالي يكون $m_i' = 0$ لكل $i \in I$

أي أن $m_i = m_i'$ أي أن المجموع مباشر داخلي للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

تعريف : ليكن A, B مودولين جزئيين متكاملان إذا كان $M = A \oplus B$ نسمي كلا من المودلين الجزئيين A, B حداً مباشراً مكملاً في M

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا همج – رغد جوده – بكر مشرف