◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الثالثة والعشرون ◄ عنوان المحاضرة: اختبارات التقارب

نظري

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـاختبارات التقارب (اختبار ديريكليه).

٢ـتمارين.

- حل تمرين الوظيفة:

أثبت أن $|a|^{\frac{1}{2}}$, $|b|^{\frac{1}{2}}$ هما نقطتا تجمع وحيدتان للمتتالية $\sqrt[n]{|3_n|}$

((إن نقاط التجمع لمتتالية هي نهايات المتتاليات الجزئية المتقاربة منها))

لنأخذ متتالية جزئية اختيارية من المتتالية :

$$1 + a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$$

وسنميز ثلاث حالات :

(١) إذا كان ذيلها يشابه ذيل المتتالية : $* \quad |a|^{\frac{1}{2}}, |a|^{\frac{1}{2}}, \dots, |a|^{\frac{1}{2}}, \dots$

أي اعتماداً من حد ما سيصبح جميع حدودها مساوياً لحدود المتتالية الجزئية * .

(٢) أن يكون ذيلها مشابه ل : ** ونهايتها $|b|^{\frac{1}{3}}, |b|^{\frac{2}{5}}, \dots, |b|^{\frac{2}{2n+1}}, \dots$.

(٣) إن بقي في الذيل حدود من المتتالية * وحدود من المتتالية ** فهي لن تكون متقاربة أي لن يوجد نقاط تجمع جديدة .

اختبارات التقارب (هذا الاختبار لمعرفة فيما إذا كانت متباعدة أو متقاربة)

تمهيدية : لتكن $\{V_n\}, \{A_n\}$ متتاليتان عقديتان بحيث تكون :

$$\lim_{n\to\infty} V_n A_n = A$$

أي محدودة (يعني طويلته أصغر من ∞) عندئذ يكون للمتسلسلتين التاليتين :

١. $A_0V_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})V_n$ ....
٢. $\sum_{n=0}^{\infty}(V_n - V_{n+1})A_n$....

لهما طبيعة ذاتها (متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً)

الاثبات :

بفرض S_n المجموع النوني ل ١

بفرض σ_{n-1} المجموع النوني ل ٢

$$S_n = A_0V_0 + (A_1 - A_0)V_1 + (A_2 - A_1)V_2 + \cdots + (A_n - A_{n-1})V_n$$

$$= A_0V_0 + A_1V_1 - A_0V_1 + A_2V_2 - A_1V_2 + \cdots + A_nV_n - A_{n-1}V_n$$

$$\sigma_{n-1} = (V_0 - V_1)A_0 + (V_1 - V_2)A_1 + \cdots + (V_{n-1} - V_n)A_{n-1}$$

$$= V_0A_0 - V_1A_0 + V_1A_1 - V_2A_1 + \cdots + V_{n-1}A_{n-1} - V_nA_{n-1}$$

$$\Longrightarrow S_n - \sigma_{n-1} = A_nV_n$$

إن تقارب $\{S_n\}$ يكافئ تقارب $\{\sigma_{n-1}\}$

وهذا يعني أن للمتسلسلتين ١و٢ الطبيعة ذاتها

اختبار ديركليه

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_nV_n$ متسلسلة عقدية

إذا تحققت الشروط الثلاثة :

١- لـ $\sum a_n$ مجاميع جزئية محدودة
٢- $\sum(V_n - V_{n+1})$ متقاربة بالإطلاق
٣- $V_n \longrightarrow 0$

فإن المتسلسلة العقدية $\sum a_nv_n$ متقاربة .

البرهان :

لتكن $\{A_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum a_n$ أي :

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

هذه متتالية محدودة حسب (١)

ولدينا $V_n \longrightarrow 0$ حسب (٣)

وهذا يقتضي أن $A_n V_n \longrightarrow 0$ (لأنه جداء متتالية محدودة بمتتالية تسعى إلى الصفر هي متتالية تسعى إلى الصفر) فحسب التمهيدية للمتسلسلتين :

$$A_0V_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})V_n = a_0v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n \dots \dots \dots ١$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(V_n - V_{n+1})A_n \dots \dots \dots ٢$$

حتى يتم المطلوب يجب أن نثبت أن ٢ متقاربة (حتى يكون لهما الطبيعة ذاتها و هي التقارب)

$\{A_n\}$ محدودة $\Longleftarrow$ يوجد M بحيث $\forall n$ فإن $|A_n| < M$ ومنه

$$|(V_n - V_{n+1})A_n| \leq M|V_n - V_{n+1}|$$

بما أن $\sum M|V_n - V_{n+1}|$ متقاربة (لأن $\sum V_n - V_{n+1}$ متقاربة بإطلاق حسب ٢) فإن

$\sum|(V_n - V_{n+1})A_n|$ متقاربة (حسب معيار المقارنة) ومنه فإن $\sum(V_n - V_{n+1})A_n$ متقاربة بإطلاق فهي متقاربة (لأن كل متقاربة بإطلاق تكون متقاربة) و هو المطلوب .

ملاحظة :

إذا اختل أحد الشروط فلا أستطيع أن أقول عن المتسلسلة أنها متقاربة أو متباعدة

تمرين: أثبت أن $\sum \frac{i^n}{n}$ متقاربة

الحل: $a_n = i^n \qquad V_n = \frac{1}{n}$

إن : $A_n = i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n$

و هي متسلسلة هندسية مجاميعها الجزئية :

$$S_n = \frac{b - ba^n}{1 - a}$$

$$\longrightarrow A_n = \frac{i - i(i^n)}{1 - i}$$

$$\Longrightarrow |A_n| \leq \frac{1 + 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$\Leftarrow$ محدودة $\Leftarrow$ الشرط الاول من ديركليه محقق .

كما أن $V_n \longrightarrow 0 \Leftarrow$ الشرط الثالث من ديركليه محقق .

ثم أن $\quad \sum_{n=1}^{\infty} |(V_n - V_{n+1})| = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

وهي متسلسلة متقاربة لأن :

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$$

بالنتيجة $\sum (V_n - V_{n+1})$ متقاربة بالإطلاق والشرط الثاني محقق

تحقق الشروط الثلاثة لديركليه $\Leftarrow \sum \frac{i^n}{n} = \sum a_n v_n$ متقاربة

تمرين: ادرس حسب القيم $\mathfrak{z}$ تقارب المتسلسلة : $\sum_{n=1}^{\infty} Sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \mathfrak{z}_n$

الحل :

نميز حالتين :

١) - $\mathfrak{z} = 0 \Leftarrow$ متقاربة بإطلاق

٢) - $\mathfrak{z} \neq 0$ لنطبق معيار دالامبير

$$n \geq 2 : \left|\frac{\mathfrak{z}_{n+1}}{\mathfrak{z}_n}\right| = \left|\frac{Sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \mathfrak{z}^{n+1}}{Sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \mathfrak{z}^n}\right| = |\mathfrak{z}| \frac{Sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

لأن $n \geq 2 \Leftarrow 0 < \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2}$

($\frac{\pi}{n}$ زاوية في الربع الأول و لـ Sin لها يكون موجب)

الآن لنأخذ نهاية

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\frac{Sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{\frac{\pi}{n+1}}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{Sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)} . \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} . \lim 1 = 1.1 = 1$$

$$\Leftarrow L_z = \lim \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 1.|z| = |z|$$

نميز ثلاث حالات :

$\boxed{١}$ - $|z| < 1 \Leftarrow L_z < 1 \longleftarrow$ المتسلسلة متقاربة بالإطلاق

$\boxed{٢}$ - $|z| > 1 \Leftarrow L_z > 1 \longleftarrow$ المتسلسلة متباعدة

$\boxed{٣}$ - $|z| = 1 \Leftarrow L_z = 1 \longleftarrow$ حالة شك (يفشل المعيار)

نميز في الحالة الثالثة حالتين :

a) $z = 1$, تصبح المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} Sin\ \frac{\pi}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Sin\ \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi \neq 0 < \infty$$

$\Leftarrow$ للمتسلسلتين $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{\pi}{n}$ الطبيعة ذاتها ولما كانت $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة بالتالي $\sum Sin\ \frac{\pi}{n}$ متباعدة

b) $|z| = 1\ ,\ z \neq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(Sin\ \frac{\pi}{n}\right) z^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} Sin\ \frac{\pi}{n}$$

و هي متباعدة كما رأينا :

فالمتسلسلة $\sum Sin\ \frac{\pi}{n}\ z^n$ ليست متقاربة بإطلاق عندما $|z| = 1\ ,\ z \neq 1$

لنطبق ديدكند: $|s_n| = \left|\frac{z.z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \left|\frac{z+.z^{n+1}}{1-z}\right| = \frac{2}{1-z}$, $v_n = Sin\ \frac{\pi}{n} \to 0$, $a_n = z^n$

ثم أن $|A_n| \le \frac{|3|+|3|^{n+1}}{|1-3|} \le \frac{2}{|1-3|}$

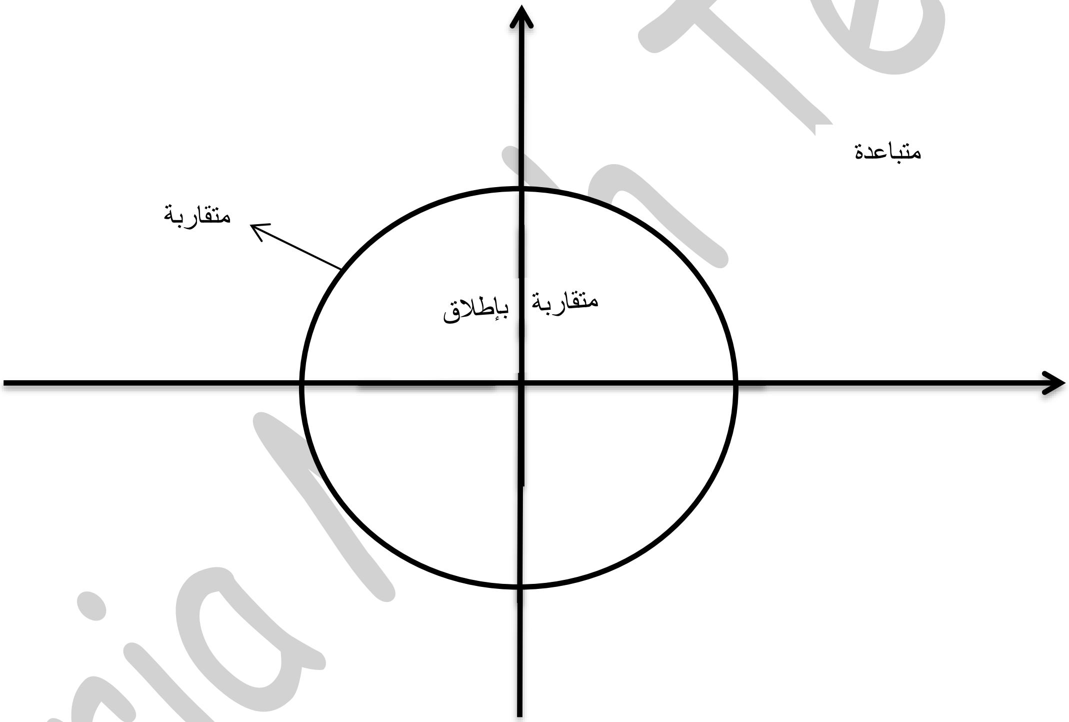
كما أن: $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(Sin\ \frac{\pi}{n} - Sin\ \frac{\pi}{n+1}\right)\right|$

متقاربة بإطلاق لأن:

$$\sigma_n = \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{3}\right) + \left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\right) + \cdots + \left(\sin\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \sin\frac{\pi}{n+1} \to 1$$

$\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} Sin\ \frac{\pi}{n}\ 3^n$ متقاربة .

بالنتيجة فهي تمثل قرص تقارب متسلسلة القوى المدروسة ونصف قطر تقارب هذه المتسلسلة ١



قد يأتي السؤال بالشكل :

عين قرص تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} Sin\ \frac{\pi}{n}\ 3^n$ و هنا فقط نميز الحالتين $|3| < 1$ ، $|3| > 1$.

أو قد يأتي : ادرس التقارب على محيط قرص الواحدة ، أي $|3| = 1$.

انتهت المحاضرة