المحاضرة (23) و (24)

الإثنين
3/11/2018

◄ دكتور المادة: محمد مناف الحمد
◄ عنوان المحاضرة: حساب التحولات

نظري ☑
عملي ☐

ولإيجاد العلاقة بين القيم القصوى للداليات والتغير نورد المبرهنة التالية:

مبرهنة: إذا كان للدالي J المعرف على المجموعة الجزئية المفتوحة D من الفضاء المتري X قيمة قصوى عند $y_0 \in D$ وكان للدالي J تغيراً عند y_0 فإنّ:

$$\delta J(y_0, h) = 0$$

لكل $h \in X$

شرط أولر اللازم : في هذا الجزء سنهتم بتحديد الشرط الضروري المؤدي إلى ما يعرف بمعادلة أولر لاغرانج التي تؤدي إلى معرفة القيم الحرجة أو قيم الثبات للداليات إضافة لبعض التطبيقات.

مبرهنة: إذا كان للدالي: $J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$ حيث $y \in D$

وحيث: $y(a) = A$ ، $y(b) = B$

قيمة قصوى على المنحني $y(x)$ فإنّ:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \quad \dots (1)$$

أي أن الشرط الضروري لامتلاك $J(y)$ قيماً قصوى عند $y(x)$ هو تحقيق $y(x)$ المعادلة التفاضلية (1).

البرهان:

يكون للدالي $J(y)$ قيمة قصوى على المنحني $y(x)$ إذا كان

$$\delta J(y, \Delta y) = 0$$

وذلك حسب مبرهنة سابقة ولكن:

$$0=\delta J(y,\Delta y)=\int_a^b\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\Delta y'\right)dx$$

وذلك حسب تعريف سابق

$$=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\,dx+\underbrace{\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y'}\Delta y'\,dx}_{I}\quad\dots(*)$$

نحسب التكامل I بالتجزئة حيث:

$$u=\frac{\partial f}{\partial y'}\Rightarrow du=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right).dx$$

$$dv=\Delta y'.dx\Rightarrow v=\Delta y$$

$$\Rightarrow I=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y'}.\Delta y'.dx=\left[\frac{\partial f}{\partial y'}.\Delta y\right]_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\Delta y.dx$$

لكن كون:

$\Delta y(a)=0 \Leftarrow y(a)=A$

$\Delta y(b)=0 \Leftarrow y(b)=B$

$$\Rightarrow I=0-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right).\Delta y.dx$$

وبتعويض I في $(*)$ يكون:

$$0=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}.\Delta y.dx-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\Delta y.dx$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right].\Delta y.dx$$

وكون Δy دالة مستمرة نأخذ:

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0\quad\dots(**)$$

وذلك حسب التمهيدية (1) التي تنص على

" إذا كانت $\alpha(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$ وكان: $\int_a^b \alpha(x).f(x)\,dx=0$ حيث: $f(a)=f(b)=0$ عندئذٍ فإن $\alpha(x)=0$ "

تعرف المعادلة (1) بمعادلة أولر نسبة إلى الرياضي أولر.

ملاحظة: إن معادلة أولر لاغرانج هي:

$$F_{y'y'}.y''+F_{yy'}.y'+F_{xy'}-F_y=0$$

حيث تم استنتاجها من المعادلة أعلاه وحيث:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=F_{y'} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=F_y$$

حيث لدينا معادلة أولر لاغرانج تكتب بالشكل:

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

ونريد استنتاج الشكل الثاني لها حيث نلاحظ أنه:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=\frac{d}{dx}(F_{y'})=\frac{d}{dx}\left(F_{y'}(x,y,y')\right)$$

$$=\frac{\partial F_{y'}}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F_{y'}}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}.\frac{\partial y'}{\partial x}$$

$$=F_{xy'}+F_{yy'}.y'+F_{y'y'}.y''$$

وبالتعويض أعلاه نجد أنه:

$$F_y-F_{xy'}-F_{yy'}.y'-F_{y'y'}.y''=0$$

$$\Leftrightarrow F_{y'y'}.y''+F_{yy'}.y'+F_{xy'}-F_y=0$$

وهو المطلوب.

وهي معادلة أولر لاغرانج وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تسمى منحنيات تكاملها $y = y(x, c_1, c_2)$ المنحنيات الحرجة أو منحنيات إيجتنف التي قد تكون منحنيات مثلى للدالي $J(y)$.

مثال: أوجد المنحنيات التي تكون للدالي $J(y(x)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2)\, dx$ مثلى وتحقق الشرط حيث:

$y(0) = 0$ و $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ ثم اوجد بعد ذلك المحقق

الحل: إن: $F(x, y, y') = y'^2 - y^2$ وبالتالي:

- $\frac{\partial f}{\partial y'} = 2y'$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$

وبالتالي فإن معادلة أولر لاغرانج هي:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = -2y - 2y''$$

أي:

$$-2y - 2y'' = 0$$

$$\Rightarrow y'' + y = 0$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية والمعادلة المميزة لها هي:

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i$$

فيكون:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

ويتم تعيين الثوابت من الشروط الحدية:

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$$

أي أن $y(x) = \sin x$

هو المنحني الذي توجب عليه القيم القصوى للدالي المفروض، وحساب هذه القيمة
نجد:

$$J(y(x)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1+\cos 2x}{2} - \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) \right] . dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \,. dx = 0$$

أي القيمة القصوى للدالي تساوي الصفر

مثال (2) على أي منحني يمكن للدالي التالي

$$J(y(x)) = \int_0^1 (y'^2 + 12xy)\, dx$$

أن يحصل على قيمة قصوى حيث أن $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

الحل: إن معادلة أولر لاغرانج هي:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

ولما كانت

فإن: $F(x,y,y') = y'^2 + 12xy$

$$F_y = 12x \quad , \quad F_{y'} = 2y'$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} F_{y'} = 2y''$$

وبالتالي فإن: $12x - 2y'' = 0$

$$\Rightarrow y'' = 6x$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية أمثال ثابتة وغير متجانسة ويكون
حلها هو:

$$y = y_c + y_p$$

حل عام   حل خاص

أو نوجد الحل مباشرة من خلال التكامل مرتين

$$y' = 3x^2 + c_1$$
$$y = x^3 + c_1 x + c_2$$

ويتم تعيين الثوابت باستخدام الشروط الحدية فنجد أن $c_1 = c_2 = 0$

إذاً يمكن الحصول على القيم القصوى على المنحني $y = x^3$

مثال: أوجد معادلة المنحني الواصل بين النقطتين $(0,0)$ و $(1,e)$ الذي يجعل الدالي $J(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2 + 2ye^x)$ محققة توقف

الحل:

$$F(x,y,y') = y^2 + y'^2 + 2ye^x$$
$$y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = e$$

المنحني يحقق معادلة أولر لاغرانج:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

حيث أن:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 2y' \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 2y''$$

بالتعويض بمعادلة أولر لاغرانج يكون:

$$2y + 2e^x - 2y'' = 0$$
$$\Rightarrow y + e^x - y'' = 0 \Rightarrow y'' - y = e^x$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية حلها العام هو:

$$y = y_c + y_p$$

حل عام للمتجانسة   حل خاص لغير المتجانسة

$$y'' - y = 0$$

فالمعادلة المميزة $r^2 - 1 = 0$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \pm 1$$

$$y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

وسنوجد الحل الخاص بطريقة المؤثرات التفاضلية:

نفرض $\frac{d^2}{dx^2} = D^2$ فيكون $\frac{d^2}{dx^2} y - y = e^{x}$

$$D^2 y - y = e^{x} \Rightarrow (D^2 - 1) y = e^{x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{e^{x}}{D^2 - 1}$$

$$y = \frac{1}{F(D)} e^{\alpha x}$$ حيث يكون $[F(D) = D^2 - 1$

وحسب المؤثرات التفاضلية α جذر مكرر m مرة لـ $F(D)$ أي يكون:

$$F(D) = (D - \alpha)^m \cdot R(D)$$

فإنّ: $\left[\frac{1}{F(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{R(\alpha)} \cdot \frac{x^m}{m!} e^{\alpha x} \right.$

ولما كانت $F(D) = D^2 - 1$

ولدينا المعادلة من الشكل $F(D) = (D - 1)(D + 1)$ أي $y = \frac{e^{x}}{D^2 - 1}$

لدينا هنا $\alpha = 1$ (أمثال المتغير في الدالة الأسية)

وكون $\alpha = 1$ جذر مكرر مرة واحدة لـ $F(D)$ فإنّ:

$$\frac{1}{F(D)}\cdot e^{x}=\frac{1}{(D+1)}\Big|_{D=1}\frac{x^{1}}{1!}e^{x}$$

$$=\frac{1}{1+1}\cdot\frac{x^{1}}{1!}e^{x}=\frac{1}{2}xe^{x}$$

أي الحل الخاص يكتب بالشكل الآتي:

$$y_p(x)=\frac{1}{F(D)}e^{x}=\frac{1}{2}xe^{x}$$

وبالتالي يكون حل المعادلة التفاضلية $y''-y=e^{x}$ هو $y=y_p+y_c$

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^{x}$$

ويقوم ... الثوابت بالإستفادة من الشروط الحدية:

$$0=y(0)=c_1+c_2\Rightarrow c_2=-c_1$$

$$e=y(1)=c_1e+c_2e^{-1}+\frac{1}{2}e$$

$$\Rightarrow e=c_1e-c_1e^{-1}+\frac{1}{2}e$$

$$\frac{1}{2}e=c_1e-c_1e^{-1}\Rightarrow\frac{1}{2}e=c_1(e-e^{-1})$$

$$\Rightarrow c_1=\frac{e^{2}}{2(1-e^{2})}$$

$$c_2=\frac{e^{2}}{2(e^{2}-1)}$$

$$\Rightarrow y=\frac{e^{2}}{2(e^{2}-1)}\left(e^{x}-e^{-x}\right)+\frac{1}{2}xe^{x}$$

$$y = \frac{e^2}{e^2-1}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) + \frac{1}{2} x e^x$$

$$y = \frac{e^2}{e^2-1} \sinh x + \frac{1}{2} x e^x$$

وهو المطلوب

مثال: على أي منحني يمكن للدالي أن يحصل على قيم قصوى:

$$J(y(x)) = \int_0^{\ln 2} [y'^2 e^{2x} + 3y^2 e^{2x}]\, dx$$

$$y(0) = 0 \quad ; \quad y(\ln 2) = \frac{15}{8}$$

الحل:

$$F(x,y,y') = y'^2 e^{2x} + 3y^2 e^{2x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6e^{2x} y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' e^{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y'' e^{2x} + 4y' e^{2x}$$

نعوض في معادلة أولر لاغرانج فنجد أنه:

$$6e^{2x} y - 2y'' e^{2x} - 4y' e^{2x} = 0$$

$$(6y - 2y'' - 4y') e^{2x} = 0 \quad ; \quad e^{2x} \neq 0$$

$$6y - 2y'' - 4y' = 0 \Rightarrow y'' + 2y' - 3y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وذات أمثال ثابتة ومتجانسة والمعادلة المميزة لها:

$$k^2+2k-3=0$$

$$(k+3)(k-1)=0 \Rightarrow k_1=-3,\quad k_2=+1$$

ومنه يكون حل المعادلة هو: $y(x)=c_1e^{-3x}+c_2e^{x}$

ويتم تحديد الثوابت بالاعتماد على الشروط الحدية:

$$0=y(0)=c_1+c_2$$

$$\frac{15}{8}=y(\ln 2)=c_1e^{-3\ln 2}+c_2e^{\ln 2}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{8}=c_1e^{\ln 2^{-3}}+2c_2$$

$$\Rightarrow \frac{15}{8}=2^{-3}c_1+2c_2$$

$$\frac{15}{8}=\frac{1}{8}c_1+2c_2$$

$$\Rightarrow c_2=1,\quad c_1=-1$$

$$y(x)=-e^{-3x}+e^{x}$$

تمهيدية أولى للاغرانج:

إذا كانت $\alpha(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ وكانت $\int_a^b \alpha(x).f(x)\,dx=0$ لكل $f\in\mathcal{F}$ حيث: $f(a)=f(b)=0$ عندئذٍ فإنّ $\alpha(x)=0$ لكل $x\in[a,b]$

البرهان: إذا أثبتنا أنّ $\alpha(x)=0$ لكل $x\in(a,b)$ عندئذٍ وكون $\alpha(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$ فيؤدي ذلك إلى أنّ $\alpha(x)=0$ لكل $x\in[a,b]$

لنفرض جدلاً أنّ $\alpha(x)\neq 0$ وذلك أياً كانت $x\in(a,b)$ وبالتالي فإن $\alpha(x)>0$ أو $\alpha(x)<0$ يكفي أن نثبت القضية عندما $\alpha(x)>0$

وبالتالي فإن $\alpha(x)>0$ لكل $x\in(c,d)$ حيث c,d أعداد حقيقية تحقق $a<c<x<d<b$

ولنعرف الدالة f بالشكل التالي

$$f(x)=\begin{cases}(x-c)(d-x) & ; x\in[c,d]\\ 0 & ; x\in[a,b]-[c,d]\end{cases}$$

فإن $f\in \mathcal{F}$ كما أنّ $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=0$

وبالتالي يكون

$$0=\int_a^b f(x).\alpha(x).dx=\int_a^c \alpha(x)f(x)dx+\int_c^d \alpha(x)f(x)dx+\int_d^b \alpha(x)f(x).dx$$

$$=0+\int_c^d \alpha(x)f(x).dx+0$$

$$=\int_c^d \alpha(x)\,(x-c)\,(d-x)$$

ولكن: $(x-c)(d-x)>0$ لأجل كل $x\in[c,d]$ وأيضاً $\alpha(x)>0$ من أجل $x\in(c,d)$ ومنه نصل إلى تناقض أي الفرض الجدلي خاطئ ومنه يكون $\alpha(x)=0$ لأجل كل $x\in[a,b]$ وذلك عندما $\int_a^b \alpha(x)f(x).dx=0$ و $f(a)=f(b)=0$

ملاحظة: لتكن $y=y(x)$ دالة مشتقاتها الأولى مستمرة كما أنها تحقق معادلة أولر-لاغرانج فإذا كانت المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة $F(x,y,y')$ بالنسبة لكل من x, y, y' مستمرة وكان $F_{y'y'}\neq 0$

فإن $y''(x)$ موجودة ومستمرة عند كل النقاط (x,y)

البرهان: بما أن

$$\Delta F_{y'} = F_{y'}(x+\Delta x, y+\Delta y, y'+\Delta y') - F_{y'}(x,y,y')$$

تذكرة: نعلم أن:

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t).dt \quad \ldots (*)$$

حيث f دالة مستمرة على المجال $[x, x+\Delta x]$ وبالتالي بالاعتماد على مبرهنة القيمة الوسطى التي تقول:

"لتكن f دالة مستمرة على المجال المغلق $[a,b]$ عندئذٍ يوجد c في $]a,b[$ حيث أن $\int_a^b f(x).dx = f(c)(b-a)$ "

بالاعتماد على هذه المبرهنة يمكن كتابة التكامل في العلاقة $(*)$ بالشكل:

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t).dt = f(c)\,\Delta x$$

حيث: $F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c)$

وكون $x < c < x+\Delta x$ فإن:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} c = x$ وذلك لأن:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} x = x$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} x+\Delta x = x$

وبالاعتماد على مبرهنة الإحاطة أي أن:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$$

بالاعتماد على مبرهنة ذكرت بالمحاضرة الأولى حالة يمكننا أن نكتب:

$$\Delta F_{y'} = F_{y'}(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ y'+\Delta y') - F_{y'}(x, y, y')$$

$$\Delta F_{y'} = \bar{F}_{y'x}(c)\cdot\Delta x + \bar{F}_{y'y}(c)\,\Delta y + \bar{F}_{y'y'}(c)\cdot\Delta y' \quad \ldots (*.*)$$

حيث أنّ:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \bar{F}_{y'x}(c) = F_{y'x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \bar{F}_{y'y}(c) = F_{y'y}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \bar{F}_{y'y'}(c) = F_{y'y'}$$

بالقسمة على (Δx) :

$$\frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = \bar{F}_{y'x} + \bar{F}_{y'y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \bar{F}_{y'y'}\frac{\Delta y'}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta F_{y'}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\bar{F}_{y'x} + \bar{F}_{y'y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \bar{F}_{y'y'}\frac{\Delta y'}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\bar{F}_{y'x} + \bar{F}_{y'y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \bar{F}_{y'y'}\frac{\Delta y'}{\Delta x}\right]$$

وحل معادلة أولر - لاغرانج يكون:

$$F_y = \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)$$ بالتعويض في العلاقة الأخيرة

$$\Rightarrow F_y = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\bar{F}_{y'x} + \bar{F}_{y'y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \bar{F}_{y'y'}\frac{\Delta y'}{\Delta x}\right]$$

وكون F_y موجودة فإن الطرف في الطرف اليمين موجودة أيضاً ، وكون y' موجودة أيضاً فإن العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل :

$$F_y = F_{yx} + F_{yy'} \cdot y' + F_{yy'} \cdot y''$$

أي أنه : $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = y''$ موجودة أيضاً ويكون :

$$y'' = F_y - F_{yx} + F_{y'y} \cdot y'$$

تمارين على تغير دالي :

1- احسب $\delta J(y, \Delta y)$ عندما : $J(y) = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2} \cdot dx$

الحل : في تمرين سابق أثبتنا أنه عندما يكون الدالي من الشكل :

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') \cdot dx$$

عندئذٍ فإن تغير الدالي يكون بالشكل :

$$\delta J(y, \Delta y) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \Delta y'\right] \cdot dx \quad \dots (*)$$

وفي حالة تمريننا فإن $F(x, y, y') = 2\pi\, y\sqrt{1+y'^2}$ ، وبالتالي فإن :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2\pi\sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2\pi\, y\, y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

وبالتعويض في العلاقة (*) يكون :

$$\delta J(y, \Delta y) = \int_a^b \left[2\pi\sqrt{1+y'^2} \cdot \Delta y + \frac{2\pi\, y\, y'}{1+y'^2} \cdot \Delta y'\right] \cdot dx$$

وهو المطلوب...

2- ا ب عندما $\delta J(y, \Delta y)$ عندما $J(y) = \int_a^b x^2 y'^2 \, dx$

الحل: أيضاً بالاعتماد على تعريف سابق فإنّ عندما يكون الدالي بالشكل.

عندئذٍ فإنّ تغير الدالي بالشكل: $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') \, dx$

$$\delta J(y, \Delta y) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \Delta y' \right] dx$$

ويكون في حالة تمريننا $F(x, y, y') = x^2 y'^2$ فإنّ:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 2x^2 y'$$

ومنه فإنّ: $\delta J(y, \Delta y) = \int_a^b (2x^2 y' \cdot \Delta y') \, dx$

وهو المطلوب..

تمرين: على أي منحني يمكن للدالي $J(y) = \int_1^3 (x^2 y'^2 - y y') \, dx$ أن نحصل على تمّ تصوي حيث أنّ $y(1) = 1$ و $y(3) = 2$

الحل: إن شرط الضروري لاعتلائه $J(y)$ حتم تصويري عند $y(x)$ هو تحقيق $y(x)$ لمعادلة أولر - لاغرانج.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

حيث أنّ: $F(x, y, y') = x^2 y'^2 - y y'$ فإنّ:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -y' \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = 2x^2 y' - y$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 4xy' + 2x^2y'' - y'$$

ومنه تكون معادلة أولر - لاغرانج:

$$-y' - 4xy' - 2x^2y'' + y' = 0$$

$$x^2y'' + 2xy' = 0$$

ومنه المعادلة الأخيرة هي إلى معادلة كوشي أولر، وللحل نفرض أن $y(x) = x^m$

وبالتالي فإن $y'(x) = mx^{m-1}$

$$y''(x) = m(m-1)x^{m-2}$$

وبالتعويض في المعادلة:

$$m(m-1)x^{m-2}x^2 + 2mx^{m-1}.x = 0$$

$$m(m-1)x^m + 2mx^m = 0$$

$$[m(m-1) + 2m]x^m = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - m + 2m = 0 \Rightarrow m^2 + m = 0$$

$$m(m+1) = 0 \Rightarrow \text{إما } m_1 = 0$$

$$\text{أو } m_2 = -1$$

فيكون حل المعادلة من الشكل:

$$y(x) = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$$

$$y(x) = c_1 + \frac{c_2}{x}$$

ويتم تحديد الثوابت من الشروط الحدية:

$$1 = y(1) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1 - c_1$$

$$2 = y(3) = c_1 + \frac{c_2}{3} \Rightarrow 2 = c_1 + \frac{1-c_1}{3} \Rightarrow 2 = \frac{3c_1 + 1 - c_1}{3}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{2c_1 + 1}{3} \Rightarrow 2c_1 + 1 = 6$$

$\Rightarrow 2c_1 = 5 \Rightarrow c_1 = \frac{5}{2} \Rightarrow c_2 = 1 - c_1 = -\frac{3}{2}$

ومنه حل المعادلة هو:

$$y(x) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{x}$$

وهو المنحني الذي على عليه الدالي $J(y)$ قيمة قصوى

تذكرة

حل معادلة تفاضلية بأمثال ثابتة باستخدام المؤثرات التفاضلية.

لتكن: $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = q(x) \quad \dots (1)$

في حال كانت: $q(x) \neq 0$ نقول عنها معادلة تفاضلية غير متجانسة

$q(x) = 0$ نقول عنها معادلة تفاضلية متجانسة.

في حال كانت متجانسة يكون الحل العام من الشكل:

$$y_c = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

حيث: c_i ثوابت

y_i هي n حل مستقل خطياً للمعادلة (1)

وفي حال كانت المعادلة غير متجانسة فيكون الحل بالشكل:

$$y = y_c + y_p$$

حل عام للمتجانسة — حل خاص لغير المتجانسة

نرمز بـ $\frac{d}{dx} = D$ مؤثر تفاضلي وبالتالي يكون:

$$[D^n + p_1 D^{n-1} + \dots + p_n]\, y = q(x)$$

$$\underbrace{p(D)}_{\text{حدودية بـ } D}\, y = q(x)$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{p(D)}\, q(x)$$

وحيث أن المؤثر التفاضلي يتمتع بالخواص الآتية:

1- الجمع:

$$[p(D)+q(D)]u = p(D)u + q(D)u$$

2- الخطية:

$$p(D)[c_1u_1+c_2u_2] = c_1p(D)u_1 + c_2p(D)u_2$$

3- $$p(D).e^{ax} = p(a)e^{ax}$$

4- $$p(D).[e^{ax}.u(x)] = e^{ax}p(D+a)u(x)$$

مثال على 4:

$$D^3(e^{-x}\sin x) = e^{-x}(D-1)^3\sin x$$

$$= e^{-x}(D^3-3D^2+3D-1)\sin x$$

$$= e^{-x}[D^3(\sin x)-3D^2(\sin x)+3D(\sin x)-\sin x]$$

وحيث أن:

$$D(\sin x) = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$D^2(\sin x) = \frac{d^2}{dx^2}(\sin x) = -\sin x$$

$$D^3(\sin x) = \frac{d^3}{dx^3}(\sin x) = -\cos x$$

وبالتعويض نجد أن:

$$D^3(e^{-x}\sin x) = e^{-x}[-\cos x+3\sin x+3\cos x-\sin x]$$

$$= e^{-x}(2\sin x+2\cos x)$$

وجدنا أن المؤثر $\frac{1}{P(D)}$ يتمتع بالخواص التالية:

$\boxed{1}$. $\frac{1}{P(D)} e^{ax} =$
- $\rightarrow \frac{e^{ax}}{P(a)}$ في حال a ليس جذر لـ $P(D)$
- $\rightarrow \frac{x^s . e^{ax}}{P^{(s)}(a)}$ في حال a جذر مكرر s مرة لـ $P(D)$

$\boxed{2}$. $\frac{1}{P(D)} (\cos ax) = Re\left[\frac{1}{P(D)} e^{iax}\right]$

$\boxed{3}$. $\frac{1}{P(D)} (\sin ax) = Im\left[\frac{1}{P(D)} e^{iax}\right]$

$\boxed{4}$. $\frac{1}{P(D)} [V(x) \cos ax] = Re\left[\frac{1}{P(D)} e^{iax} V(x)\right]$

$\boxed{5}$. $\frac{1}{P(D)} [V(x) \sin ax] = Im\left[\frac{1}{P(D)} e^{iax} V(x)\right]$

بعض التمارين على طريقة المؤثرات التفاضلية:

مثال: أوجد حل المعادلة $y'' + 2y' + 2y = 10e^x$

الحل: $(D^2 + 2D + 2) y = 10e^x$

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{P(D)} (10e^x)$; $P(D) = D^2 + 2D + 2$

وكون $\alpha = 1$ لم يعد جذراً لـ $P(D)$ فإن:

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{P(1)} (10e^x)$

$P(1) = 1 + 2 + 2 = 5$

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{5} . 10e^x = 2e^x$

وهو الحل الخاص للمعادلة أما الحل العام للمعادلة فنوجده عن طريق المعادلة المميزة

$$\lambda^2+2\lambda+5=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=-1-2i \quad , \quad \lambda_2=-1+2i$$

أي جذران عقديان مترافقان والحل يكون من الشكل:

$$y_c=e^{-x}\left(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right)$$

ومنه حل المعادلة المعطاة هو:

$$y=y_c+y_p$$

$$\Rightarrow y(x)=e^{-x}\left(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right)+2e^{x}$$

مثال (2) أوجد حلاً خاصاً للمعادلة:

$$y'''-y''-y'+y=40e^{x}$$

الحل:

$$(D^3-D^2-D+1)y=40e^{x}$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{1}{p(D)}40e^{x} \quad ; \quad p(D)=D^3-D^2-D+1$$

ولاحظ أن $\alpha=1$ هو جذر لـ $p(D)$ مكرر مرتين لأنه:

$$p(D)=D^3-D^2-D+1$$
$$=D^2(D-1)-(D-1)$$
$$=(D^2-1)(D-1)$$

ومنه يأتي:

$$y_p=\frac{x^2\,(40e^{x})}{p''(1)}$$

$$p'(D)=3D^2-2D-1$$

$$p''(D)=6D-2$$

$$\Rightarrow p''(1) = 4 \Rightarrow y_p = \frac{x^2\,(40e^x)}{4} = 10x^2e^x$$

مثال (3): أوجد حلاً خاصاً للمعادلة الآتية:

$$y'' - y' + y = e^{2x}\cos x$$

الحل:

$$(D^2 - D + 1)\,y = e^{2x}\cos x$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{p(D)}\left[e^{2x}\cos x\right] \quad ; \quad p(D) = D^2 - D + 1$$

$$\Rightarrow y_p = Re\left[\frac{1}{p(D)}\, e^{2x}\cdot e^{ix}\right]$$

$$= Re\left[\frac{1}{p(D)}\, e^{(2+i)x}\right]$$

ولما كانت $2+i$ ليست جذراً لـ $p(D)$ فإن:

$$\frac{1}{p(D)}\, e^{(2+i)x} = \frac{1}{p(2+i)}\, e^{(2+i)x}$$

$$= \frac{e^{(2+i)x}}{2+3i} = \frac{(2-3i)}{13}\, e^{2x}(\cos x + i\sin x)$$

$$\Rightarrow y_p = Re\left[\frac{(2-3i)}{13}\, e^{2x}(\cos x + i\sin x)\right]$$

$$= \frac{2}{13}\, e^{2x}\cos x + \frac{3}{13}\, e^{2x}\sin x$$

مثال: أوجد حلاً خاصاً للمعادلة الآتية $y'' + y = 8\sin x$

$$(D^2+1)y = 8\sin x$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{p(D)}(8\sin x) \;;\; p(D) = D^2-1$$

$$= Im\left[\frac{1}{p(D)}(8e^{ix})\right]$$

وكون i جذر لـ $p(D)$ مكرر مرة واحدة فإن:

$$p'(D) = 2D$$

$$p'(i) = 2i$$

$$\Rightarrow y_p = Im\left[\frac{x(8e^{ix})}{2i}\right]$$

$$= Im\left[\frac{(-2i)x(8e^{ix})}{4}\right]$$

$$= Im\left[-4i\,x\,e^{ix}\right]$$

$$= Im\left(-4i\,x(\cos x + i\sin x)\right) = Im\left(-4i\,x\cos x + 4x\sin x\right)$$

$$\Rightarrow y_p = -4x\cos x$$

انتهت المحاضرة .. ♥

"كافة نفسك على أصغر الإنجازات
وأصغر الخطوات لا تتحرها لأنها هي من
ستصنع الإنجاز الأكبر ..."

إعداد: إيناس دليل ..