* تمرين :

$\vec{r}(t) = \left(a\left(\cos t + \ln\left(tg\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right), a\sin t, 0\right) \quad 0<t<\pi$

هل سيكون التمثيل الوسيطي الطبيعي من الصنف C^{∞} أي هل مشتق التمثيل الوسيطي الطبيعي عند p موجود أم لا ؟؟

*الحل : النقاط الشاذة الأساسية لمنحنٍ هي بالضبط النقاط الشاذة للتمثيل الوسيطي الطبيعي له، في التمثيل الطبيعي النقطة الشاذة سببها عدم وجود المشتق لأنه ان كان موجود سيكون نظيمه = 1 بالتالي الجواب لا لأن المشتق في المرتبة الأولى لن يكون موجود.

* تمرين : $\boxed{\frac{1}{125}}$ لتكن $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ ثلاث تمثيلات وسيطية معرفة كما يلي : $a,b \neq 0$

$\vec{r}_1(t) = \left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2at}{1+t^2}, 2b\, Arc\,tg\, t\right) \quad -\infty<t<\infty$

$\vec{r}_2(\tau) = (a\cos\tau, a\sin\tau, b\tau) \quad -\infty<\tau<\infty$

$\vec{r}_3(u) = (a\cos u, a\sin u, bu) \quad -\pi<u<\pi$

والمطلوب :

1) هل $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ تمثل منحنيات هندسية ؟؟؟

2) الى اي صنف ينتمي كلاً من التمثيلات السابقة ؟؟

3) هل $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ تمثل أقواس بسيطة ؟؟

4) هل $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ متكافئان / علل اجابتك / هل $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ يمثلان المنحني ذاته ؟ / هل $\vec{r}_1$ تمثيل مسموح به للمنحني الممثل بـ $\vec{r}_2$ ؟

5) اثبت ان $\vec{r}_1, \vec{r}_3$ متكافئان ؟؟

*الحل: الدالة $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}$ كل منها مستمر على منطلقه كما أن هذه الدوال كل منها دالة متباينة لأن $\vec{r_2}$ بما المركبة الثالثة متباينة

$$(2b\,Arc\,tg\,t)' = \frac{2b}{1+t^2} \begin{cases} <0 & : b<0 \\ >0 & b>0 \end{cases}$$ لأن $\vec{r_1}$

المركبة الثالثة لـ $\vec{r_1}$ مطردة تماماً على R $\Leftarrow$ هذه المركبة متباينة على R ومنه فإن $\vec{r_1}$ دالة متباينة وبالتالي $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}$ دوال مستمرة على منطلقها وهي دوال متباينة موضعياً فإنها تمثل منحنيات الهندسية المجموعات النقطية لكل منها منحنٍ هندسياً))

$\boxed{2}$ من الصف C^∞ بل وتحليلية $\vec{r_2}, \vec{r_3}$ وحدهما

$x(t), y(t)$ حاصل قسمة كثيرحدود والبسط والمقام تحليلي على R فحاصل مستمرهي دالة تحليلية على R نزت النقاط التي تعدم المقام ولا يوجد نقاط تعدم المقام

أن المركبة الثالثة $(Arc\,tg\,t)' = \frac{1}{1+t^2}$ دالة تحليلية على R

فإن تكاملها دالة تحليلية على R

$$Arg\,tg\,t = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$\boxed{3}$ لا لأن المنطلق مجالات مفتوحة.

$\boxed{4}$ لا، لأن: $-\frac{\pi}{2} < Arc\,tg\,t < \frac{\pi}{2}$

$$-2b\frac{\pi}{2} < 2b\,Arc\,tg\,t < 2b\frac{\pi}{2}$$ حيث $0<b$

لتكن p_0 نقطة من $\mathbb{R}^3$ مركبتها الثالثة $z_0 = 2b\pi$

عندئذ فإن p_0 ستكون منتمية للمجموعة النقطية لـ $\vec{r_2}$ لأن :

$$\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_2(2\pi)$$

ولكنها ليست من المجموعة النقطية لـ $\vec{r}_1$ لأن أي من المجموعة النقطية لـ $\vec{r}_1$ يجب أن يكون للأصداثي لها أصغر من 2π وبالتالي $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ غير متكافئين

* تمرين : ليكن: $\vec{r}_1(s) = (1+\cos s, \sin s)$ لأجل $0 \leq s \leq 2\pi$

$\vec{r}_2(\sigma) = \left(4 + 4\cos\frac{\sigma}{4}, 4\sin\frac{\sigma}{4}\right)$ لأجل $0 \leq \sigma \leq 8\pi$

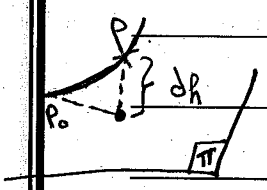
تمثيلان وسيطين لمنحنين: ℓ_1 , ℓ_2 على الترتيب المطلوب :

1. ماذا يمثل ℓ_1 , ℓ_2 هندسياً ؟؟ وإلى أي صنف ينتمي كل من ℓ_1 , ℓ_2 ؟
2. ما هما قيمتا الوسيط الطبيعي للبدء في التمثيلين $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ ؟
3. هل هناك تلامس بين ℓ_1 , ℓ_2 وعين مرتبة هذا التلامس في حال وجودها ؟؟

((سيحل في محاضرة القادمة))

* تلامس منحني مع مستو (أو كرة) :

* تعريف : لتكن P_0 نقطة مشتركة بين مستو π ومنحني ℓ ولتكن P نقطة من ℓ و d_h بعد هذه نقطة عن مستوي π حيث h هو مقياس الجبري لطول القوس $\overset{\frown}{P_0P}$ عندئذ نقول أن للمنحني ℓ والمستوي π تلامس عند نقطة P_0 من المرتبة n على الأقل إذا وفقط إذا كان :



$$d_h = o(h^n)$$

في جوار $h = 0$ أي أن

$$\lim_{h\to 0} \frac{d_h}{h^n} = 0$$

$$(P \to P_0 \Longleftrightarrow h \to 0)$$

عندها نقول أن هناك تلامس .

★ ★ انتهت محاضرة ★ ★