* إيجاد النقاط الشاذة للمنحني الممثل بالتمثيل $\vec{r}$ وإيجاد نوعها

إنّ النقاط الشاذة بالنسبة للتمثيل $\vec{r}$ هي النقاط التي يكون عندها المشتقة $\vec{r}'$ غير موجود أو موجود ومعدوم.

بداية نبحث عن النقاط التي يكون عندها $\vec{r}'$ غير موجود ونقول انها نقاط شاذة ثم نبحث في بقية النقاط عن النقاط التي تعدم $\vec{r}'$ ونقول أيضاً انها نقاط شاذة

لتعيين نوعها نبحث عن أول مشتق غير معدوم عند كل نقطة من النقاط الشاذة اما مرتبة فردية شاذة غير اساسية أو مرتبة زوجية شاذة اساسية

5/25 * تمرين: أثبت أنّ النقاط $t_k = 2\pi k$ حيث k عدد صحيح هي نقاط شاذة اساسية للدويري وأنّ $t=0$ هي نقطة شاذة اساسية لـ $x=t^2 , y=t^3$

الحل: نعلم ان الدويري يمثل بـ $\vec{r}: R \longrightarrow R^3$

$$\vec{r}(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t), 0)$$

$$\vec{r}'(t) = (a(1-\cos t), a\sin t, 0)$$

$$\Longrightarrow \vec{r}'(t_k) = \vec{0}$$

t_k هي نقاط شاذة

اثبات انها اساسية

$$\vec{r}''(t) = (a\sin t, a\cos t, 0)$$

$$\vec{r}''(t_k) = (0, a, 0) \neq \vec{0}$$

بما ان مرتبة أول مشتق غير معدوم عند t_k مرتبة زوجية فإن النقاط t_k نقاط شاذة أساسية

بما ان $x=t^2 , y=t^3$ فإن ممثل المنحني هو:

$$\vec{r}: R \longrightarrow R^3$$

$$t \longmapsto (t^2, t^3, 0)$$

$$\vec{r}'(t) = (2t, 3t^2, 0)$$

$\vec{r}'(0) = \vec{0} \Rightarrow$ نقطة شاذة للمنحني $t = 0$ عندئذ

ا ، ب ، ج

$$\vec{r}''(t) = (2, 6t, 0)$$

$$\vec{r}''(t) = (2, 0, 0) \neq \vec{0}$$

وبما أن $\vec{r}''(t) \neq \vec{0}$ عندئذ $t = 0$ نقطة شاذة اساسية للمنحني المتمثل

بـ م (لكون مرتبة زوجية)

6 أوجد تمثيلاً وسيطياً لا يحوي جذور للمنحني الناتج عن تقاطع الاسطوانة ،
125

$$(1)\quad x^2 + y^2 = 1$$

مع المستوي $x + y + z = 1$ ---- (2)

*الحل : لنأخذ $x = t$ من المعادلة (1) نحصل على

$$y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - t^2}$$

من المعادلة الثانية

$$z = 1 - x - y = 1 - t - \sqrt{1 - t^2}$$

ولكن هذا التمثيل يحوي جذور نبحث عن تمثيل آخر

لنأخذ $x = \cos t$ ومنه $y = \sin t$ و $z = 1 - (\cos t + \sin t)$

وهذا التمثيل لا يحوي جذور

7 اثبت وجود دالة غامرة ومستمرة ومتزايدة للفترة $[a, b]$ على الفترة $[0, 1]$
125

حل: (اثبت ان منحني متراص له تمثيل على مجال مغلق $[0, 1]$)

لنأخذ $\phi : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$

$$\phi(t) = (b - a)t + a$$

هي دالة غامرة ومتزايدة ومستمرة .

$$\phi^{-1} : [a, b] \longrightarrow [0, 1]$$

هي دالة غامرة ومستمرة ومتزايدة

$$\phi^{-1}(t) = \frac{t - a}{b - a}$$

((مستمرة لانها كثيرة حدود من درجة الاولى ومتزايدة لان $\phi'(t) > 0$))
$= b - a > 0$

* مبرهنة (2) :

اذا كان $\vec{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ تمثيلاً وسيطياً نظامياً من الصف C^1 قطعياً فإن $\vec{r}$ طريق وان :

$$l(\vec{r}) = \int_a^b \|r'(t)\| \, dt$$

* مبرهنة (3) : اذا كان $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ طريقين نظاميين من الصف C^1 قطعياً وأيضاً متكافئين فإن لـ $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ طول ذاته.

* تعريف : اذا كان $\mathcal{L}$ منحنياً مراصاً ممثلاً بـ $\vec{r}$ كان $\vec{r}$ طريقاً نظامياً من صف C^1 قطعياً فإن طول $l(\mathcal{L}) = l(\vec{r})$

* الوسيط الطبيعي : ليكن $\vec{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ تمثيلاً نظامياً من الصف C_k قطعياً
$t \longmapsto \vec{r}(t)$

($k \geq 1$) لمنحني $\mathcal{L}$ عندئذ نستطيع ان نعرف وسيط جديد (ا بالتالي تمثيل وسيطي جديد) كمايلي :

$$S = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}'(u)\| \, du$$

حيث t_0 نقطة كيفية مثبتة من I و t كيفية من I

$$\|\vec{r}'(t)\| = (\| \ \| \circ \vec{r}')(t)$$

$$\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

من الصف C^∞ على $\mathbb{R} \setminus \{(0,0,0)\}$

ان $(\| \ \| \circ \vec{r}')(t)$ مستمرة قطعياً لان $\vec{r}'$ قد يكون غير مستمر او غير موجود وبالتالي فإن $\frac{ds}{dt}$ سيكون موجود

$$\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}'(t)\| \geq 0$$

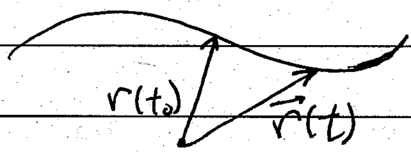
أيا كانت t من نقاط استمرار $\|\vec{r}'(t)\|$ هذه مساواة صحيحة لأجل جميع نقاط I باستثناء عدد منته منه

ماذا يمثل S هندسياً ؟؟

لنأخذ $\vec{r}_{[t_0,t]}$ اذا كانت $t_0<t$ $(t_0, t \in I)$ هو يحقق اذا كانت $r_{[t,t_0]}$

$t<t_0$

شروط مبرهنة ② يمثل القوس المحصور بين رأسي المتجهين $\vec{r}(t_0)$ و $\vec{r}(t)$



بالتالي فإن S يمثل القياس الجبري لطول القوس المذكور أعلاه

إذن $\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}'(t)\| > 0$

لأجل جميع نقاط I باستثناء عدد منته منها

- S مستمر وقابل للاشتقاق ومشتقه أكبر تماماً من الصفر اذاً سيكون متزايد تماماً على كل النقاط باستثناء النقاط المعزولة ((أي النقاط التي ينعدم عندها مشتقه))

$\Longleftarrow$ S مستمرة ومتزايدة تماماً على I

ليكن $J = S(I)$

ان كانت الدالة متزايدة تماماً أو متناقصة تماماً ومستمرة فإن صورة المجال المفتوح عندها سيكون مجال مفتوح أي ان دالة $S : I \to J$ تقابل مستمر ومتزايد تماماً فله تقابل عكسي وحسب مبرهنة في تحليل سيكون التقابل العكسي له مستمر ومتزايد تماماً

لنرمز بـ $\varnothing$ لهذا التقابل العكسي فتكون $\varnothing : J \to I$

دالة مستمرة ومتزايدة تماماً وقاصرة

لنأخذ التمثيل التالي:

$\vec{r}^*$ المعرف على J بالمعادلة التالية:

$$\vec{r}^* = \vec{r}(\phi(s))$$

ان $\vec{r} \sim \vec{r}^*$ لوجود دالة ϕ مستمرة ومتزايدة تماماً وغامرة تجعل المعادلة السابقة محققة ((بداهةً)) وتكافؤ الاخير يعني ان $\vec{r}^*$ تمثيل مسموح به لـ f نسمي هذا التمثيل بالتمثيل الوسيطي الطبيعي لـ f الناتج انطلاقاً من التمثيل r كما نسمي وسيط هذا التمثيل وهو كوسيط طبيعي للمنحني f

نسمي رأس المتجه $\vec{r}(t)$ بـ مبدأ القياس لطول القوس.

اذا كان لدينا نقطة P بعد مبدأ القياس لطول القوس باتجاه المنحني فإن قيمة الوسيط الطبيعي مقابله له ستكون موجبة

اذا كانت نقطة قبل مبدأ قياس طول القوس بالنسبة لجهة المنحني فإن قيمة وسيط الطبيعي مقابلة له ستكون سالبة والقيمة المطلقة له ستكون مساوية لطول قوس.

* لذلك البعض يسمي الوسيط الطبيعي كـ طول القوس او دالة منحنية لنقطة.

★ ★ ★ انتهت محاضرة ★ ★ ★

* إيجاد طول طريق الذي تمثيله $\vec{r}$ على المجال $[a,b]$

$$L(\vec{r}) = \int_a^b \|r'(t)\|\,dt$$

* تمرين:

أوجد طول قوس واحد $0 \leq t \leq 2\pi$ الدويري.

اوجد طول الدويري بين النقطتين التي تقابلات القيمتين 0 و t للوسيط.

الحل:

$$\vec{r}(t) = (a(t-\sin t), a(1-\cos t), 0)$$

$$\vec{r}'(t) = (a(1-\cos t), a\sin t, 0)$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{a^2(1-\cos^2 t + \sin^2 t) + \cos^2 t} =$$

$$= a\sqrt{(1-\cos^2 t + \sin^2 t) + \cos^2 t}$$

$$= a\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}} = a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

$$L = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$\Rightarrow \left[-4a\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4a + 4a = 8a$$

ان طول قوس واحد $0 \leq t \leq 2\pi$ هو نفسه سيكون طول القوس بين اي نقطتين شاذتين متتاليتين.

تمرين: اوجد طول الطريق $\vec{r}(t) = (3ch2t, 3sh2t, 6t)$ بحيث $0 \leq t \leq \pi$

* الحل:

$$\vec{r}'(t) = (6sh2t, 6ch2t, 6)$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(6sh2t)^2 + (6ch2t)^2 + 6^2} = \sqrt{6^2(sh^2 2t + ch^2 2t + 1)}$$

$$= 6\sqrt{ch^2 2t + ch^2 2t} = 6\sqrt{2ch^2 2t} = 6\sqrt{2}\, ch\, 2t$$

$$L = \int_0^{\pi} 6\sqrt{2}\, ch\, 2t\, dt = 6\sqrt{2}\, \frac{1}{2}\left[sh\, 2t\right]_0^{\pi} = 3\sqrt{2}\left[sh\, 2\pi - 0\right]$$

$$= 3\sqrt{2}\, sh\, 2\pi$$

سؤال دورة :

ليكن L منحنياً ممثلاً بـ $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$ حيث $t \in]-\infty, \infty[$ المطلوب

ماذا يسمى المنحني L والى اي صنف ينتمي ؟

اثبت ان L منحني نظامي ؟ احسب طول القوس L المحصور بين النقطتين

الموافقتين $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$

*الحل : منحني اللولب وينتمي للصنف C_∞ لأنه كذلك على $\mathbb{R}$:

منحني نظامي لأنه مشتقه لا ينعدم $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 2) \neq (0,0,0)$$

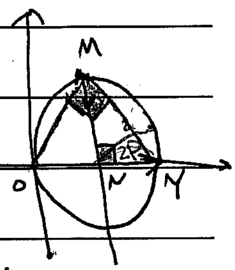
لأن طول القوس هو

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 4} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \neq 0$$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5}\, dt = \left[\sqrt{5}\, t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi - 0 = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi$$

كيف ننشأ نقطة من قطع مكافئ ذروته O ووسيطه $2P$ /للاطلاع/

$$y^2 = 2P x$$



نأخذ نقطة كيفية N

ونأخذ نقطة ثانية N' بحيث تبعد عن N مسافة $2P$ ثم نرسم دائرة

قطرها هو ON' ثم نرسم عمود من N يقطع الدائرة في نقطة M هذه نقطة هي

من القطع المكافئ ، لأنّ $NM^2 = ON + NM_1$

$$y^2 = x + 2P$$

*** تذكرة: التمثيل الوسيطي الطبيعي:**

$\vec{r} : I \to \mathbb{R}^3$ تمثيل نظامي من الصف C^k قطعياً ، $(k \geq 1)$ و $\mathcal{L}$ منحني ممثل بـ $\vec{r}$

عرفنا وسيط جديد

$$S = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}'(u)\| du$$

t_0 كيفية مثبتة من I ، t كيفية من I

سبق برهنة أن S دالة مستمرة على I وأن $\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}'(t)\| > 0$

هذا صحيح لأجل

نقاط I باستثناء عدد منتهٍ منها.

((عند نقاط التجزئة على الأكثر)) سيكون المشتق غير موجود أو معدوم))

وهنا سيكون المشتق مستمر وموجود

S دالة متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ، و $S(I) = J$

فإن الدالة $S : I \to J$ تصبح دالة مستمرة وغامرة ومتزايدة ستكون دالة

$$t \mapsto s(t)$$

دالة عكسية مستمرة ومتزايدة تماماً وغامرة

لنرمز لها بـ ϕ أي أن $\phi = S^{-1}$ وهي

$$\phi : J \to I$$

$$S \mapsto t = \phi(S)$$

كيف نوجد $\phi(s)$ من $S = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}'(u)\| du$

وأن $\vec{r}^* : J \to \mathbb{R}^3$ و $\vec{r}^* = \vec{r} \circ \phi$ ($\vec{r}^*$ تمثيل مكافئ لـ $\vec{r}$) فهو تمثيل مسموح به لـ $\mathcal{L}$:

سمينا $\vec{r}^*$ التمثيل الطبيعي لـ $\mathcal{L}$ الناتج انطلاقاً من $\vec{r}$

سمينا رأس المتجه $\vec{r}(t_0)$ مبدأ قياس طول القوس

سمينا s وسيطاً طبيعياً لـ L أو طول القوس L أو الفاصلة المنحنية لنقاط L أو وسيطاً قوسياً لـ L.

ان $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t)$

إذا أردنا أن نشتق هذا التمثيل بالنسبة للوسيط الطبيعي فنستخدم رمز

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}(s)$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \neq 0$$

$$\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}'(t)\|$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

محققة لأجل جميع نقاط I باستثناء عدد منته منها

(سيكون محققاً عند كل نقطة نظامية لـ L من $\vec{r}$)

أي المشتق موجود وغير معدوم و $\vec{r}$ مستمر عندها و $\vec{r}'$ مستمر عند قيمة الوسيط t المقابلة)

ملاحظة:

إن قيمة الوسيط الطبيعي تتعلق بالنقطة P_0 أي ترتبط بمبدأ قياس طول القوس فلو أخذنا النقطة P_1 الموافقة لـ t_1 من I فإن التكامل:

$$S_1 = \int_{t_1}^{t} \|\vec{r}'(u)\| du = \underbrace{\int_{t_1}^{t_0} \|r'(u)\| du}_{C} + \int_{t_0}^{t} r'(u)\, du$$

وسيط طبيعي باعتبار P_1 مبدأ طول القوس

$$\Rightarrow S_1 = C + S$$

وسيط الطبيعي باعتبار P_0 (رأس متجه) مبدأ قياس طول القوس

$$\Rightarrow \frac{ds_1}{dt} = 0 + \frac{ds}{dt}$$

قيمة المشتق الوسيط الطبيعي لا تتغير تبقى ثابتة بتغير مبدأ القياس للقوس

② التمثيل الطبيعي للانسحاب بالتمثيل الوسيطي الذي تنطلق منه لتعيين الوسيط الطبيعي

* تعريف :

طول القوس من المنحني ℓ هو طول التمثيل الوسيطي لـ ℓ في المجال المغلق الذي صورته ذلك القوس وفق ذلك التمثيل ((عندما يكون التمثيل منتظماً في ذلك مجال مغلق)) وهو مستقل عن التمثيل لـ ℓ .

ملاحظة :

ان طول التمثيل الوسيطي للانسحاب بالجملة الاحداثية المنسوب لها الفضاء

$$\vec{r}(t) = \overset{\text{ثابت}}{\vec{OO'}} + \vec{r^*}(t)$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \|\vec{r^*}'(t)\|$$

*** انتهت المحاضرة ***

المحاضرة الخامسة 5

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: تمارين والتمثيل الوسيطي الطبيعي

نظري ■ عملي ■

* إيجاد التمثيل الطبيعي لمنحني:

الوسيط الطبيعي $s(t)=\int_{t_0}^{t}\|\vec{r}'(u)\|du$ حيث t_0 نقطة مثبتة

التمثيل الطبيعي هو تركيب لمركبات $\vec{r}$ مع الدالة $t(s)$ معكوسة الدالة $s(t)$

$$\vec{r}(s)=\left(x(t(s)),\ y(t(s)),\ z(t(s))\right)$$

* تمرين: الـ 126

أوجد طول المنحني الممثل في $\vec{r}(t)=\left(a\left(\cos t+\ln\left(tg\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right), a\sin t, 0\right)$ حيث $0<t<\pi$ بين النقطتين اللتين تقابلان القيمتين $t, \frac{\pi}{2}$

عين الوسيط الطبيعي للمنحني ثم مثله تمثيلاً وسيطاً طبيعياً له.

* الحل:

$$L=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\|\vec{r}'(u)\|du$$

$$x(t)=a\left(\cos t+\ln tg\left(\frac{t}{2}\right)\right),\quad x'(t)=a\left(-\sin t+\frac{1}{\sin t}\right)$$

$$y(t)=a\sin t,\quad y'(t)=a\cos t$$

$$z(t)=0,\quad z'(t)=0$$

$$\|\vec{r}'(t)\|=\sqrt{a^2\left(-\sin t+\frac{1}{\sin t}\right)^2+a^2\cos^2 t+0}$$

$$=a\sqrt{\left(\sin^2 t-2+\frac{1}{\sin^2 t}+\cos^2 t\right)}$$

$$=a\sqrt{-1+\frac{1}{\sin^2 t}}=\sqrt{\frac{-\sin t+1}{\sin^2 t}}=a\sqrt{\cot^2 t}$$

$$= a \operatorname{Cotg} t$$

$$\ln\left(tg\left(\tfrac{t}{2}\right)\right) = \frac{tg\left(\frac{t}{2}\right)}{tg\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}}}{\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}} = \frac{1}{\sin t}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = a\,|\operatorname{Cotg} t|$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \begin{cases} a \operatorname{Cotg} t & 0 < t \leq \frac{\pi}{2} \\ -a \operatorname{Cotg} t & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

عندما $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$

$$S(t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} a \operatorname{Cotg}(u)\, du = a\left[\ln \sin u\right]_{\frac{\pi}{2}}^{t}$$

$$= a \ln \sin t$$ عندما $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$

وفي الحالة الثانية بنفس الاسلوب نجد ان

$$S(t) = -a \ln(\sin t) \qquad \frac{\pi}{2} \leq t < \pi$$

وهو مرفوض لان طول لا يمكن ان يكون سالب

ولإيجاد تمثيل وسيط طبيعي نأخذ معكوس

$$\frac{S(t)}{-a} = \ln(\sin(t)) \iff e^{-\frac{S(t)}{a}} = \sin(t)$$

$$\Longleftrightarrow \arcsin\left(e^{\frac{S(t)}{a}}\right) = t$$

$$t(s) = \begin{cases} -\arcsin\left(e^{-\frac{S(t)}{a}}\right) & : -\infty < S(t) < 0 \\ \arcsin\left(e^{\frac{S(t)}{a}}\right) & 0 < S(t) < \infty \end{cases}$$

$$\vec{r} \circ (S(t)) = \vec{r}(t(s))$$

* تمرين أوجد تمثيل طبيعي للمنحني $\vec{r}(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$ حيث $-\infty < t < \infty$

الحل: سيحل بمحاضرة قادمة

* التمثيل الوسيطي الطبيعي:

تذكرة: $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^3$ تمثيل وسيطي نظامي C_k نظامياً لمنحني $\mathcal{L}$ و t_0 كيفية مثبتة من I لنعرف دالة S على I بالمساواة

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}'(u)\|\, du$$

$S(I) = J$ (S دالة مستمرة ومتزايدة تماماً)

أصبحت الدالة $S : I \to J$ دالة مستمرة ومتزايدة تماماً وغامرة فلها دالة عكسية مستمرة ومتزايدة تماماً وغامرة لتكن $\varnothing$ عندئذ:

$$\varnothing = S^{-1} : J \to I$$

إن التمثيل $\vec{r}^* = \vec{r} \circ \varnothing$ تمثيل مكافئ لـ $\vec{r}$ بالتالي تمثيل المسموح به لـ $\mathcal{L}$ سمينا هذا التمثيل الطبيعي لـ $\mathcal{L}$ و سمينا وسيطه S وسيطاً طبيعياً ، وسيطاً قوسياً أو فاصلة منحنية أو طول القوس لـ $\mathcal{L}$ سمينا النقطة الموافقة لـ t_0 (رأس المتجه $\vec{r}(t_0)$) بمبدأ قياس طول القوس.

- S تمثل القياس الجبري لطول القوس Γ الذي بدايته النقطة الموافقة لـ t_0 ونهايته النقطة الموافقة لـ t

((ملاحظة: اذا طلب ايجاد وسيط طبيعي أي ايجاد الوسيط الطبيعي))

* مبرهنة:

اذا كانت P_0 نقطة من منحني Γ موافقة لـ t_0 في تمثيل $\vec{r}$ لـ $\mathcal{L}$ وكان $\vec{r}'$ مستمراً عند t_0 وغير معدوم عندها

$\Leftarrow$ P_0 نظامياً عندئذٍ ستكون P_0 نظامياً في التمثيل الوسيط الطبيعي.

نتيجة: اذا كانت النقاط شاذة أساسية لمنحني $\mathcal{L}$ هي النقاط الشاذة للتمثيل الوسيطي الطبيعي لـ $\mathcal{L}$

- الاثبات:

P شاذة أساسية $\Leftarrow$ شاذة في كل التمثيلات المسموح بها لـ $\mathcal{L}$

$\Leftarrow$ P_0 شاذة في التمثيل الطبيعي

P شاذة في التمثيل الوسيطي الطبيعي، لنفرض جدلاً انها نظامية في تمثيل $\vec{r}$ لـ $\mathcal{L}$ عندئذٍ حسب مبرهنة سابقة $\Leftarrow$ P_0 نظامي التمثيل الوسيطي الطبيعي وهذا تناقض $\Leftarrow$ P_0 شاذة في الطبيعي.

*ملاحظة: اذا كان لدي تمثيل وسيطي طبيعي واردت ان أوجد نقاط شاذة لذلك تمثيل الطبيعي نظامي بـ طبيعي غير نظامي بتمثيلات أخرى.

هل يوجد نقاط شاذة للمنحني في تمثيلات أخرى؟ نعم لكنها لن تكون شاذة أساسية

*مبرهنة: اذا كان $\vec{r}$ تمثيلاً وسيطاً نظامياً من صف C_k قطعياً لمنحني $\mathcal{L}$ و $k>0$ فإن التمثيل الوسيطي الطبيعي لـ $\mathcal{L}$ سيكون نظامياً من الصف C_k قطعياً

*ملاحظة: اذا كان $\vec{r}$ تمثيلاً من صف C_∞ لمنحني $\mathcal{L}$ فليس من ضروري ان يكون تمثيل الوسيطي طبيعي من صف C_∞

مبرهنة:

ان مشتق لتمثيل الوسيطي الطبيعي ((بالنسبة للوسيط الطبيعي)) سيكون متجهاً

واحداً في حال وجوده

* الإثبات :

$$\frac{d\vec{r}(s_0)}{ds} = \frac{\vec{r}\,'(t_0)}{\|\vec{r}\,'(t_0)\|}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}}{ds}(s_0) \right\| = \frac{\|\vec{r}\,'(t_0)\|}{\|\vec{r}\,'(t_0)\|} = 1$$

* نتيجة : ان النقاط الشاذة للتمثيل الوسيطي الطبيعي هي نقاط التي لا يكون مشتق التمثيل الوسيطي الطبيعي عندهم الوسيط الطبيعي لكن نظيرها غير موجود.

★ ★ ★ انتهت المحاضرة ★ ★ ★

المحاضرة السادسة عشر (16)

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: تلاقي منحنيين

نظري

عملي

لقد قامت المعيدة بتصحيح نهاية التمرين في المحاضرة ((15)) صفحة (3) كما يلي:

$$S(t) = \begin{cases} a \ln \sin t < 0 & 0 < t \leq \frac{\pi}{2} \\ -a \ln \sin t > 0 & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

$$L = |S(t)| = \begin{cases} -a \ln \sin t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ -a \ln \sin t & \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

$$= -a \ln \sin t \qquad 0 < t < \pi$$

التمثيل الوسيطي الطبيعي:

$$S(t) = \begin{cases} a \ln \sin t & ; 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ -a \ln \sin t & ; \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

$$S(]0,\pi[) =]-\infty, \infty[$$

لنا الحالة الأولى:

$$S(t) = a \ln \sin t \qquad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{S(t)}{a} = \ln \sin t \qquad -\infty < S(t) \leq 0$$

$$0 < e^{\frac{S(t)}{a}} \leq 1 \quad ; \quad e^{\frac{S(t)}{a}} = \sin t \quad ; \quad \text{Arc} \sin x : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{Arc} \sin e^{\frac{S(t)}{a}} = t \quad ; \quad -\infty < S(t) \leq 0$$

$$\Longrightarrow t = \text{Arc} \sin (e^{\frac{S}{a}}) \qquad -\infty < S \leq 0$$

لنأخذ الحالة الثانية $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$

$$S(t) = -a \ln \sin t$$

$$\frac{S(t)}{-a} = \ln \sin t$$

$$e^{-\frac{s(t)}{a}} = \sin t$$

لو أخذنا Arc Sin للطرفين

$$\text{Arc Sin}(\sin t) = \text{Arc Sin}\, e^{-\frac{s}{a}}$$

$$t = \text{Arc Sin}^{-\frac{s}{a}}$$

هنا نلاحظ ان $t \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ اي ان هنا يوجد غلط اذاً الحل هو :

ليكن لدينا

$$f : [-1, +1] \longrightarrow \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$f(\sin t) = t \qquad \forall t \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\sin t = e^{-\frac{s}{a}} \Longrightarrow f(\sin t) = f\left(e^{-\frac{s}{a}}\right) \quad : \frac{\pi}{2} \leq t < \pi$$

$$t = f\left(e^{(-\frac{s}{a})}\right)$$

$$\Longrightarrow t = \begin{cases} \text{Arc Sin}\, e^{(\frac{s}{a})} & -\infty < s \leq 0 \\ f\left(e^{-\frac{s}{a}}\right) & 0 < s < \infty \end{cases}$$

حيث f تابع عكسي لتابع Sin

* حل تمرين محاضرة سابقة 9 !
126

أوجد تمثيل طبيعي للمنحني $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ حيث $-\infty < t < \infty$

*الحل :

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}'(u)\|\, du$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{cases} x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t \\ y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t \\ z'(t) = e^t \end{cases}$$

$$\|\vec{r}'(t)\|^2 = \left((e^t\cos t - e^t\sin t)^2 + (e^t\sin t + e^t\cos t)^2 + (e^t)^2\right)$$

$$= e^{2t}\cos^2 t \cancel{- 2e^{2t}\sin t\cos t} + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}\sin^2 t \cancel{+ 2e^{2t}\sin t\cos t} +$$

$$+ e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}$$

$$\Rightarrow \|\vec{r}'(t)\|^2 = e^{2t}[\cos^2 t + \sin^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t + 1]$$

$$\Rightarrow \|\vec{r}'(t)\|^2 = 3e^{2t}$$

$$\Rightarrow \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{3}\, e^t$$

نأخذ مبدأ القياس $t = 0 \in]-\infty, \infty[$

$$S(t) = \int_0^t \|\vec{r}'(u)\|\,du = \int_0^t \sqrt{3}\, e^u\,du = [\sqrt{3}\, e^u]_0^t$$

$$= \sqrt{3}\, e^t - \sqrt{3} = \sqrt{3}\,(e^t - 1)$$

$$\frac{S(t)}{\sqrt{3}} + 1 = e^t$$

$$t(s) = \ln\left(\frac{S(t)}{\sqrt{3}} + 1\right)$$

$$\vec{r}(t(s)) = \left(e^{\ln(\frac{S(t)}{\sqrt{3}}+1)}\cos\left(\ln\frac{S(t)}{\sqrt{3}} + 1\right), e^{\ln(\frac{S(t)}{\sqrt{3}}+1)}\sin\left(\ln\left(\frac{S(t)}{\sqrt{3}}+1\right)\right),\right.$$

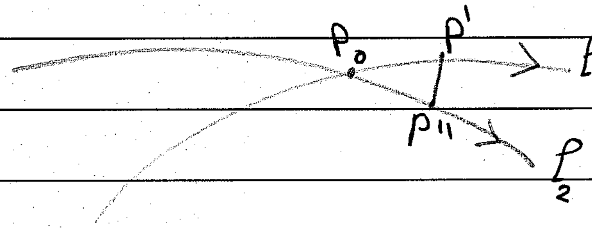
$$\left., e^{\ln(\frac{S(t)}{\sqrt{3}}+1)}\right)$$

$$= \left(\left(\frac{S(t)}{\sqrt{3}} + 1\right)\cos\left(\ln\left(\frac{st}{\sqrt{3}} + 1\right)\right), \left(\frac{S(t)}{\sqrt{3}} + 1\right)\sin\left(\frac{S(t)}{\sqrt{3}} + 1\right),\right.$$

$$\left., \frac{S(t)}{\sqrt{3}} + 1\right)$$

* تلامس منحنيين :

ليكن ℓ_1 و ℓ_2 منحنيين و p_0 نقطة مشتركة لهما وليكن $\vec{r}_1(s)$ حيث s تمثيلاً وسيطاً طبيعياً لـ ℓ_1 و $\vec{r}_2(\sigma)$ حيث σ تمثيلاً وسيطاً طبيعياً لـ ℓ_2 و s_0 الوسيط الطبيعي لـ p_0 في $\vec{r}_1$ $(\overrightarrow{op_0} = \vec{r}_1(s_0))$
و σ_0 الوسيط الطبيعي لـ p_0 في $\vec{r}_2$ $(\overrightarrow{op_0} = \vec{r}_2(\sigma_0))$ ولتكن p' نقطة من ℓ_1 وسيطها الطبيعي s بحيث يكون $h = s - s_0 = \sigma - \sigma_0$



ان p' تأتي بعد p_0 على ℓ_1 بحيث أن تكون p'' بعد p_0 على ℓ_2
وعندما $h>0$ فإن p' و p'' تأتيان بعد p_0 على ℓ_1 و ℓ_2 على ترتيب
اما اذا كانت $h<0$ فإن p' و p'' تأتيان قبل p_0 على ℓ_1 و ℓ_2 على ترتيب

* تعريف :

نقول ان للمنحنيين ℓ_1 و ℓ_2 تلامس من مرتبة n $(n \geq 0)$ عند نقطة p_0 اذا وفقط اذا تحقق العلاقتان الآتيتان :

$$\begin{cases} \overrightarrow{p'p''} = \overrightarrow{o(h^n)} \\ \overrightarrow{p'p''} \neq \overrightarrow{o(h^{n+1})} \end{cases}$$

في جوار $h=0$ أو عندما $p', p'' \to p_0$

* للتوضيح معنى h^n :

$$\lim_{h\to 0} \frac{p'p''}{h^n} = 0 \iff \overrightarrow{p'p''} = \vec{o}(h^n)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{p'p''}{h^{n+1}} \neq 0 \Leftarrow \overrightarrow{p'p''} \neq \vec{o}(h^{n+1})$$

* ملاحظة : $p'p''$ في جوار الصفر مهمل امام h^n

★★★ انتهت محاضرة ★★★

المحاضرة السابعة عشر (١٧)

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة:

نظري
عملي

* تمرين:

ليكن P منحنياً معطى بـ $\vec{r}(t) = \left(a\left(\cos t + \ln tg\left(\frac{t}{2}\right)\right), a\sin t, 0\right)$

حيث $0 < t < \infty$ ، والمطلوب:

1) ادرس نوعية هذا المنحني ؟؟ هل تمثيله منحني مفتوح ؟؟ وهل يمكن أن يكون قوس بسيطاً ؟

2) هل هذا المنحني منحني نظامي، وإن لم يكن كذلك عين النقاط الشاذة في التمثيل وبين نوعها.

3) عين الوسيط الطبيعي للمنحني ثم تمثيلاً طبيعياً له، إذا كانت P نقطة الموافقة لـ $t = \frac{\pi}{2}$ مبدأ القياس طول القوس فهل مشتقة التمثيل الطبيعي عند الصفر موجود أم لا

*(تم حل قسم من هذا التمرين في محاضرات سابقة سنقوم بإكمال ما تبقى منه)::

* الحل:

1) إن $y(t) = a\sin t$ تحليلي على كامل R وبالتالي على أي مجال جزئي منه وبالتالي على $]0,\pi[$

بالنسبة لـ ($x(t) =$ مجموع تابعين):

• $\cos t$ هو تحليلي على كامل R وبالتالي فهو تحليلي على أي مجال جزئي منه $]0,\pi[$

• $tg\frac{t}{2} = \frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}$ هو حاصل قسمة التابعين sin و cos وهما تحليليان على R

وبالتالي $tg\frac{t}{2}$ تحليلي على R فوق القيم التي تعدم المقام.

$$\cos\frac{t}{2} = 0 \Rightarrow \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$
$$\Rightarrow t = \pi + 2\pi k$$

وبالتالي $tg\frac{t}{2}$ تحليلي على $]0,\pi[$

• و $\ln$ تحليلي على $]0,\infty[$ وبالتالي $\ln(tg\frac{t}{2})$ تحليلي على $]0,\pi[$

اعتماداً على برهنة التالية

((* مبرهنة :

اذا كان g تحليلي عند a على G ، h تحليلي عند $g(a)$ فإن hog تحليلي عند a على G.))

وبالتالي f من الصف E^{ω} على $]0,\pi[$ لوجود التمثيل $\vec{r}$ من الصف C^{ω} على $]0,\pi[$

- المنحني L مفتوح لوجود التمثيل $\vec{r}$ المعرف على المجال المفتوح $]0,\pi[$

- المجموعة النقطية للمنحني L لن تكون قوساً بسيطاً

2) $\vec{r}'(t) = (a(-\sin(t) + \frac{1}{\sin t}), a\cos(t), 0)$

لا يوجد نقاط شاذة سببها عدم وجود مشتقة من المرتبة الأولى على المجال $]0,\pi[$

وبالتالي النقاط الشاذة لـ $\vec{r}$ في حال وجوده هي :

النقاط التي توافق حلول المعادلة $\vec{r}'(t) = \vec{0}$

$$\vec{r}'(t) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sin t + \frac{1}{\sin t} = 0 \\ \cos(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos^2(t)}{\sin(t)} = 0 \\ \cos(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos(t) = 0 \Leftrightarrow t_k = \frac{\pi}{2} + \pi k \ ; k \in \mathbb{Z}$$

$\Leftarrow$ النقطة الشاذة الوحيدة للمنحني هي الموافقة لـ $t_1 = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, a, 0)$$

$$x'(t) = -\sin(t) + \frac{\left(tg\frac{t}{2}\right)'}{tg\left(\frac{t}{2}\right)} = -\sin(t) + \frac{\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}}{\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}}$$

$$= -\sin(t) + \frac{1}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\sin(t) + \frac{1}{\sin(t)}$$

$$= \frac{-\sin^2(t) + 1}{\sin(t)} = -\frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}$$

$$\vec{r}''(t) = \left(a\left(-\cos(t) - \frac{\cos t}{\sin^2(t)}\right), -a\sin t, 0\right)$$

$$\vec{r}''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -a, 0) \neq \vec{0}$$

مرتبة أول مشتق غير معدوم زوجية.

$\Leftarrow$ $\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ نقطة شاذة أساسية.

★ مبرهنة:

ليكن $s \longrightarrow \vec{r}_1(s)$ و $\sigma \longrightarrow \vec{r}_2(\sigma)$ تحليلين وسيطين من الصف C_{n+1} لمنحنيين ℓ_1 و ℓ_2 على الترتيب، عندئذ يكون ℓ_1 و ℓ_2 تلامس من المرتبة n إذا وفقط إذا وجدت قيمتان s_0 و σ_0 بحيث تحقق العلاقات التالية:

$$\bigstar \begin{cases} \vec{r}_1(s_0) = \vec{r}_2(\sigma_0) \text{ و } \vec{r}_1{}'(s_0) = \vec{r}_2{}'(\sigma_0) \text{ و } \cdots\cdots \text{ و} \\ \cdots \text{ و } \vec{r}_1^{\,n}(s_0) = \vec{r}_2^{\,n}(\sigma_0) \text{ و } \vec{r}_1^{\,n+1}(s_0) = \vec{r}_2^{\,n+1}(\sigma_0) \end{cases}$$

★ الإثبات:

بما أن $\vec{r}_1$ من الصف C_{n+1} فيمكن نشره وفق تايلور نشراً محدوداً من المرتبة $n+1$ في جوار s_0:

$$\vec{r}_1(s) = \vec{r}_1(s_0) + (s-s_0)\vec{r}_1{}'(s_0) + \frac{(s-s_0)}{2!}\vec{r}_2{}''(s_0) + \cdots\cdots$$
$$\cdots + \frac{(s-s_0)^n}{n!}\vec{r}_1^{\,n}(s_0) + \frac{(s-s_0)^{n+1}}{n+1!}\vec{r}_1^{\,n+1}(s_0) + \vec{o}(s-s_0)^{n+1}$$

ان $\vec{o}(s-s_0)^{n+1}$ دالة متجهية مهملة اما $(s-s_0)^{n+1}$ لان

$$\lim_{s \to s_0} \frac{\vec{o}(s-s_0)^{n+1}}{(s-s_0)^{n+1}} = 0$$

- $\vec{r}_2$ من الصف C_{n+1} فيمكن نشره وفق منشور تايلور من المرتبة $n+1$ في جوار σ :

$$\vec{r}_2(\sigma) = \vec{r}_2(\sigma_0) + (\sigma-\sigma_0)\dot{\vec{r}}_2(\sigma_0) + \frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{2!}\ddot{\vec{r}}_2(\sigma_0) + \dots$$

$$+ \frac{(\sigma-\sigma_0)^n}{n!}\vec{r}_2^{\,n}(\sigma_0) + \frac{(\sigma-\sigma_0)^{n+1}}{(n+1)!}\vec{r}_2^{\,n+1}(\sigma_0) + \vec{o}(\sigma-\sigma_0)^{n+1}$$

لتكن p' نقطة من ℓ_1 وسيطها الطبيعي $s = s_0 + h$

و p'' نقطة من ℓ_2 وسيطها الطبيعي $\sigma = \sigma_0 + h$

$$\vec{op'} = \vec{r}_1(s_0+h) = \vec{r}_1(s_0) + h\dot{\vec{r}}_1(s_0) + \frac{h^2}{2!}\ddot{\vec{r}}_1(s_0) + \dots +$$

$$+ \frac{h^n}{n!}\vec{r}_1^{\,n}(s_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\vec{r}^{\,(n+1)}(s_0) + \vec{o}(h^{n+1})$$

$$\vec{op''} = \vec{r}_2(\sigma_0+h) = \vec{r}_2(\sigma_0) + h\dot{\vec{r}}_2(\sigma_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}\vec{r}_2^{\,n}(\sigma_0) + \dots$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\vec{r}_2^{\,n+1}(\sigma_0) + \vec{o}(h^{n+1})$$

$$\vec{p'p''} = \vec{op''} - \vec{op'} = (\vec{r}_2(\sigma_0) - \vec{r}_1(s_0)) + h(\dot{\vec{r}}_2(\sigma_0) - \dot{\vec{r}}_1(s_0)) + \dots +$$

$$+ \frac{h^n}{n!}(\vec{r}_2^{\,n}(\sigma_0) - \vec{r}_1^{\,n}(s_0)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}(\vec{r}_2^{\,n+1}(\sigma_0) - \vec{r}_1^{\,n+1}(s_0)) + \vec{o}(h)^{n+1}$$

$\Leftarrow$ لنفرض أن ℓ_1 و ℓ_2 تلاصس من المرتبة n وهذا يعني وجود s_0 و σ_0 بحيث يتحقق ما يلي :

$$\vec{r}_1(s_0) = \vec{r}_2(\sigma_0)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overrightarrow{p'p''}}{h^{n+1}}\neq\vec{0} \quad , \quad \lim_{h\to 0}\frac{\overrightarrow{pp''}}{h^{n}}=0$$

ولنثبت صحة العلاقة ★ :

$$\overrightarrow{p'p''}=h\left(\vec{r}_2^{\,\cdot}(\sigma_0)-\vec{r}_1^{\,\cdot}(s_0)\right)+\frac{h^2}{2!}\left(\vec{r}_2^{\,\cdot\cdot}(\sigma_0)-\vec{r}_1^{\,\cdot\cdot}(s_0)\right)+\dots\dots+\dots\dots+$$

$$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left(\vec{r}_2^{\,(n+1)}(\sigma_0)-\vec{r}_1^{\,(n+1)}(s_0)\right)+\vec{o}(h^{n+1})$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\vec{o}(h^{n+1})}{h^{n+1}}=0\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{\vec{o}(h^{n+1})}{h^{n+1}}=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{o}(h^{n+1})}{h^{n+1}}=\dots$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{o}(h^{n+1})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{o}(h^{n+1})}{1}=0$$

بتقسيم طرفي المساواة الأخيرة على h :

$$\vec{0}=\lim_{h\to 0}\frac{\overrightarrow{p'p''}}{h}=\vec{r}_2^{\,\cdot}(\sigma_0)-\vec{r}_1^{\,\cdot}(s_0)+\vec{0}+\vec{0}$$

$$\Rightarrow\vec{r}_2^{\,\cdot}(\sigma_0)=\vec{r}_1^{\,\cdot}(s_0) \quad ★★★$$

وبعد الاستفادة من المساواة ★★★ ثم تقسيم الطرفين على h^2 وأخذ النهاية عندما h تسعى إلى الصفر :

$$\vec{0}=\lim_{h\to 0}\frac{\overrightarrow{p'p''}}{h^2}=\frac{1}{2!}\left(\vec{r}_2^{\,\cdot\cdot}(\sigma_0)-\vec{r}_1^{\,\cdot\cdot}(s_0)\right)$$

$$\Rightarrow\vec{r}_2^{\,\cdot\cdot}(\sigma_0)=\vec{r}_1^{\,\cdot\cdot}(s_0)$$

بالمتابعة بنفس الأسلوب نستطيع إثبات كامل المساويات في العلاقة ★ وتصبح $\overrightarrow{p'p''}$ مساوية لـ

$$\overrightarrow{p'p''}=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left(\vec{r}_2^{\,(n+1)}(\sigma_0)-\vec{r}_1^{\,(n+1)}(s_0)\right)+\vec{o}\,h^{n+1}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overrightarrow{p'p''}}{h^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}\left(\vec{r}_2^{\,(n+1)}(\sigma_0)-\vec{r}_1^{\,(n+1)}(s_0)\right)+0$$

لإثبات العكس ($\Leftarrow$) :

سنفرض أن العلاقات في * محققة ولنثبت وجود تلامس بين Γ_1 و Γ_2 من المرتبة n من تحقق العلاقات في * نجد

$$\overrightarrow{P'P''} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left(\vec{r}_2^{\,(n+1)}(\sigma_0) - \vec{r}_1^{\,(n+1)}(s_0) + o(h^{n+1})\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\overrightarrow{P'P''}}{h^n} = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{h}{(n+1)!}\left(\quad // \quad\right)}_{=0} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\vec{o}(h^{n+1})}{h^n}}_{=0} = \vec{0}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(\vec{r}_2^{\,(n+1)}(\sigma_0) - \vec{r}_1^{\,(n+1)}(s_0)\right) + 0 \neq \vec{0}$$

إذاً يوجد تلامس بين Γ_1 و Γ_2 من المرتبة n عند النقطة المشتركة التي وسيطها الطبيعي s_0 من Γ_1 و σ_0 من Γ_2

* نتيجة: لتكن $f_1(x)$ و $f_2(x)$ دالتين حقيقيتين من الصف C_{n+1} ولتكن Γ_1 ، Γ_2 بياني f_1 و f_2 على الترتيب:

عندئذ يكون لـ Γ_1 و Γ_2 تلامس من المرتبة n إذا وجدت x_0 بحيث تتحقق العلاقات التالية:

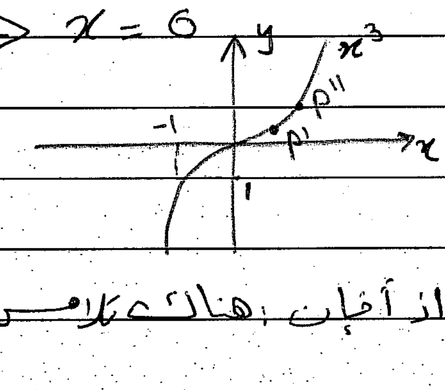
$$f_1(x_0)=f_2(x_0)$$

$$f_1'(x_0)=f_2'(x_0) \text{ و } \ldots\ldots \text{ و } f_1^{(n)}(x_0)=f_2^{(n)}(x_0) \text{ و } f_1^{(n+1)}(x_0)\neq f_2^{(n+1)}(x_0)$$

* مثال: هل يوجد تلامس بين بيان منحني التابع: $f(x)=x^3$ وبين المحور ox ومن أي رتبة في حال وجوده؟

إن المحور ox هو بيان للدالة $g(x)=0$

$$f(x)=g(x) \iff x^3=0 \iff x=0$$



* $f'(x)=3x^2$ ، $f'(0)=0=g'(0)$
* $f''(x)=6x$ ، $f''(0)=0=g''(0)$
* $f'''(x)=6$ ، $f'''(0)=6\neq g'''(0)$

إذاً فإن: هناك تلامس بينهما من المرتبة الثانية عند المبدأ.

** انتهت المحاضرة **

المحاضرة التاسعة (9)

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ عنوان المحاضرة: مستقيم مماس لمنحني وبعض الملاحظات

نظري
عملي

★ مستقيم مماس لمنحني:

- تعريف: ليكن ℓ منحنياً و P نقطة منه نسمي المستقيم الذي له تلامس مع ℓ من المرتبة الأولى على الأقل عند نقطة P (في حال وجودها) مستقيم المماس لـ ℓ عند P

* مبرهنة:

يوجد في أي نقطة نظامية من منحني ℓ من صف C^1 مستقيم مماس لـ ℓ. وإذا كان $s \longrightarrow \vec{r}(s)$ تمثيلاً طبيعياً لـ ℓ فإن $\frac{d\vec{r}}{ds}$ متجه واحدة موازياً للمستقيم مماس لـ ℓ عند نقطة نظامية P_0 التي وسيطها الطبيعي s_0.

* الإثبات:

نعلم سابقاً أن $\frac{d\vec{r}}{ds}(s)$ متجه واحدة لأن النقطة التي وسيطها الطبيعي s_0 نظامية.

سنثبت أن المستقيم D الممثل وسيطياً بالتمثيل الطبيعي التالي:

$$\vec{R}(\sigma) = \vec{r}(s_0) + \sigma \frac{d\vec{r}}{ds}(s_0)$$

سنثبت أن هذا المستقيم هو مستقيم مماس لـ ℓ عند نقطة النظامية P_0 التي وسيطها الطبيعي s_0 أن $\sigma = s_0$ هي قيمة الوسيط الطبيعي لـ P_0 في التمثيل $\vec{R}$ حيث أن $\vec{R}(0) = \vec{r}(s_0) = \vec{op_0}$

$$\frac{d\vec{R}}{d\sigma}(0) = \frac{d\vec{r}}{ds}(s_0)$$

← هناك تلامس من المرتبة الأولى على الأقل المستقيم D مع ℓ عند P_0 و D مستقيم مماس لـ ℓ عند P_0

وليكن D_1 مستقيماً مماساً لـ ℓ عند P_0 عندئذ سيكون

$$\vec{R}_1(u) = \vec{r}(s_0) + u\,\vec{a}$$

يمثل خطياً لـ D_1 وحيث $\vec{a}$ متجه واحدة من التعريف لـ D_1 تلامس مع ℓ

من المرتبة الأولى على الأقل عند P_0 $\Leftarrow$

$$\frac{d\vec{R}_1(0)}{du} = \frac{d\vec{r}}{ds}(s_0)$$

ولكن $\frac{d\vec{R}_1}{du} = \vec{a}$ ((لأن $\vec{o} = (\vec{r}(s_0))'$ ثابت))

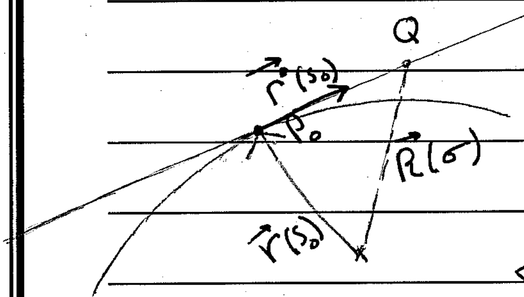
$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{r}}{ds}(s_0)$$

$\Leftarrow$ $\vec{R}_1 = \vec{R}$ ومنه D_1 فنطبق على D ((تم مطلوب))

* ملاحظة:

المستقيم المماس لمنحنٍ في حال وجوده يكون وحيداً

* ليكن لدينا منحنٍ ونقطة P_0 ومستقيم مماس في P_0 نلاحظ



$\vec{P_0Q} \parallel$ مماس D عند P_0

$\vec{OQ} - \vec{OP_0} \parallel$ مماس لـ ℓ عند P_0

$$= \vec{R} - \vec{r}(s_0) \parallel \frac{d\vec{r}}{ds}(s_0)$$

$$\Leftrightarrow (\vec{R} - \vec{r}(s_0)) \wedge \frac{d\vec{r}}{ds}(s_0) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X - x(s_0) & Y - y(s_0) & Z - z(s_0) \\ \dot{x}(s_0) & \dot{y}(s_0) & \dot{z}(s_0) \end{vmatrix}$$

المعادلات الديكارتية للمماس عند P_0 التي وسيطها الطبيعي هي

$$\frac{X - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{Y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{Z - z_0}{\dot{z}_0}$$

معادلة متجهية للمماس

$$\dot{x}(s_0) = x'(s_0)$$

حيث
$$\vec{r}(s_0) = (x_0, y_0, z_0)$$
$$\vec{r}^{\,\cdot}(s_0) = (x_0^{\cdot}, y_0^{\cdot}, z_0^{\cdot})$$

* نتائج و ملاحظات :

(1) يكون لمنحني تلامس من مرتبة عليا مع مماسه في نقطة منه اذا كانت مرتبة التلامس بينهما من مرتبة ثانية على الأقل .

+ وإذا كان ℓ منحنياً من صف C_n (حيث $n \geq 2$) فإن لـ ℓ تلامساً أي مرتبة عليا عند نقطة نظامية منه مع مماسه في تلك النقطة اذا وفقط اذا وجد عدد k يحقق متراجحة $2 \leq k \leq n$ بحيث تكون مشتقات

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2},\ \frac{d^3\vec{r}}{ds^3},\ \dots\dots,\ \frac{d^k\vec{r}}{ds^k}$$

معدومة عند وسيط طبيعي لتلك نقطة وإذا كان التلامس من مرتبة عليا فإن مرتبة التلامس ستكون مساوية لمرتبة أول مشتق لـ $\vec{r}$ بالنسبة لـ s غير معدوم عند وسيط النقطة مطروح منها واحد .

* الإثبات :

ان التمثيل الوسيطي الطبيعي للمماس عند نقطة P_0 ((وهي نقطة نظامية)) التي وسيطها طبيعي

$$\vec{R}(\sigma) = \vec{r}(s_0) + \sigma \frac{d\vec{r}}{ds}(s_0)$$

لـ ℓ تلامس من مرتبة عليا عند P_0 مع مماسه D في P_0 $\xLeftrightarrow{\text{تعريفاً}}$ لـ ℓ و D تلامس من مرتبة الثانية على الأقل عند P_0

$\Longleftrightarrow$
$$\vec{R}(0) = \vec{r}(s_0)$$
$$\frac{d\vec{R}(0)}{d\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds}(s_0)$$
$$\frac{d^2\vec{R}}{d\sigma^2} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}(s_0)$$

لكن

$$\frac{d^2R}{d\sigma^2} = \frac{d}{d\sigma}\underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}(s_0)\right)}_{\text{شعاع ثابت}} = 0$$

وهذا يعني $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}(s_0) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ وجود عدد K يحقق $2 \leq K < n$ بحيث المشتقات

$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}(s_0), \ldots\ldots, \frac{d^K\vec{r}}{ds^K}(s_0)$

معدومة

★ لنفرض ان مرتبة أول مشتق لـ $\vec{r}$ غير معدوم عند s_0 هي l

$$\Rightarrow \frac{d^2r}{ds^2} = \ldots\ldots = \frac{d^{l-1}\vec{r}}{ds^{l-1}}(s_0) = 0 \wedge \frac{d^l\vec{r}}{ds^l} \neq \vec{0}$$

وبما أن $\frac{d^d\vec{R}}{d\sigma^d} = \vec{0} \quad \forall d \geq 2$

وهذا يعني $\Rightarrow \frac{d^2\vec{R}}{d\sigma^2}(0) = \frac{d^2r}{ds^2}(s_0) = \vec{0}$

$$\frac{d^{l-1}\vec{R}}{d\sigma^{l-1}}(0) = \frac{d^{l-1}\vec{r}}{ds^{l-1}}(s_0) = \vec{0}$$

$$\frac{d^l\vec{R}}{d\sigma^l}(0) = \vec{0} \neq \frac{d^l r}{ds^l}(s_0)$$

$\Leftarrow$ مرتبة التلامس بين l ومماسه عند p_0 هي $l-1$

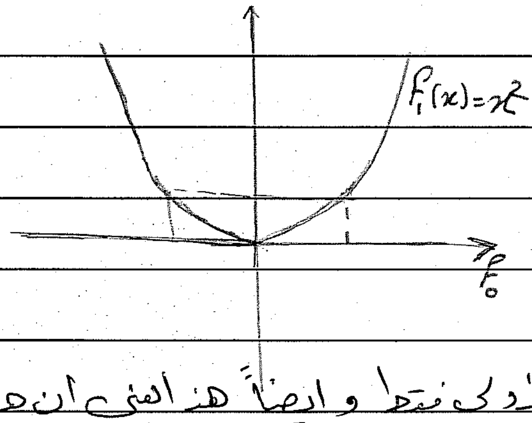
★ مثال:

رأينا في محاضرة سابقة ان هنالك تلامس من مرتبة الثالثة بين بيان الدالة $f(x)=x^4$ ومحور ox وهذا يقتضي ان محور ox مماس لبيان الدالة f عند مبدء لأن له تلامس من مرتبة الأولى على الأقل مع بيان دالة عند مبدء ثم أن لـ ox تلامس من مرتبة عليا مع بيان الدالة

f عند مبدأ التماس من مرتبة الرابعة أي أن التماس من المرتبة الثانية على الأقل

(2) نسمي نقطة من منحني نقطة مقوّمة اذا كان المماس عندها تماس من مرتبة عليا

*مثال: ان المبدأ هو نقطة مقومة لبيان الدالة $f(x)=x^4$



ox مماس لهذه الدالة لان

$f(x_0)=0$

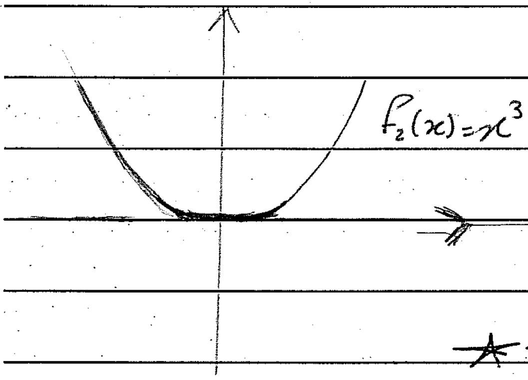
$f_1(0)=f_0(0)$

$f_1'(0)=2(0)=0=f_0'(0)$

$f_1''(0)=2\neq 0=f_0''(0)$

وهذا يعني ان مرتبة التماس هي الأولى فقط وايضاً هذا يعني ان هناك تماس بين بيان $f_1(x)=x^2$ والمحور ox $\Leftarrow$ محور ox هو مماس لبيان الدالة $f_1(x)=x^2$ لكن التماس لهذا بيان مع ox ليس من مرتبة عليا هذا يعني ان المبدأ ليس نقطة مقومة لبيان الدالة $f_1(x)=x^2$

- ان لبيان $f_2(x)=x^3$ تماس مع محور ox من مرتبة الثانية بالتالي ox مماس لهذه الدالة عند المبدأ وان مرتبة التماس هنا هي مرتبة عليا مبدأ سيكون نقطة مقومة لبيان الدالة $f_2(x)=x^3$



★★ انتهت محاضرة ★★

3) $t \to \vec{r}(t)$ تمثيل وسيطي للمنحني ℓ و P_0 نقطة من ℓ نظامية في $\vec{r}$
الموافقة لـ t_0 ($\vec{r}'(t_0) \neq 0$, $\vec{OP_0} = \vec{r}(t_0)$)

- المماس لـ ℓ عند P_0 يوازي $\vec{r}'(t_0)$

$$\underbrace{(\vec{R} - \vec{r}(t_0))}_{\text{يوازي مماس}} \wedge \underbrace{\vec{r}'(t_0)}_{\text{مماس يوازي}} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r - x_0 & r - y_0 & r - z_0 \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

يعطي المعادلات الديكارتية $[P(x_0, y_0, z_0)]$
للمستقيم المماس :

$$x_0' = x'(t_0) \,,\; y_0' = y_0'(t_0) \,,\; z_0' = z_0'(t)$$

$$\frac{X - x_0}{x_0'} = \frac{Y - y_0}{y_0'} = \frac{Z - z_0}{z_0'}$$

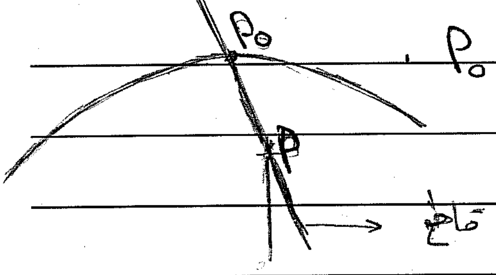
معادلات ديكارتية للمستقيم المماس للمنحني عند النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$

$$X = x_0 + u\, x_0' \,,\; Y = y_0 + u\, y_0'$$
$$Z = z_0 + u\, z_0'$$

المعادلات الوسيطية للمستقيم المماس لـ ℓ في P_0

4) اذا كانت $t \to r(t)$ تمثيلاً وسيطياً من صف C^p لمنحني ℓ وكانت t_0
وكانت P_0 نقطة موافقة لـ t_0 ونظامية في $\vec{r}$ فإن المستقيم المماس لـ ℓ
عند نقطة P_0 سيكون نهاية لمستقيم "قاطع" للمنحني في P_0 وفي نقطة P من منحني

مجاورة لـ P_0 عندها تسعى نقطة P الى نقطة P_0 .



* التفسير الهندسي للماس أو التعريف الهندسي للماس ؟؟

ان القاطع // $\overrightarrow{P_0P}$ // $\frac{1}{t-t_0}\overrightarrow{P_0P}$

حيث t هي قيمة الوسيط الموافقة لـ P ((اي ان $\overrightarrow{OP}=\vec{r}(t)$))

$$\Rightarrow \frac{1}{t-t_0}\overrightarrow{P_0P}=\frac{1}{t-t_0}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})$$

$$=\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}$$

اي ان القاطع // $\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}$

لنأخذ نهاية الطرفين عندما P تسعى الى P_0

((الوضع نهائي للقاطع)) نهاية القاطع // $\vec{r}'(t_0) \neq 0$

مستقيم يمر من P_0 // $\vec{r}'(t_0)$

$\Leftarrow$ المماس يمر من P_0 و // $\vec{r}'(t) \Leftarrow$ الوضع النهائي للقاطع في P_0 سينطبق على المماس .

5) نصنف النقاط الشاذة لمنحني باستخدام أحد تمثيلات المنحني :

لنأخذ $t \to \vec{r}(t)$ تمثيل وسيطي من صنف C_n لمنحني ℓ حيث $(n\geq 2)$

ولتكن $\vec{r}(t_0)=\overrightarrow{OP_0}$ و $\vec{r}'(t_0)=\vec{0}$ " $\Leftarrow P_0$ شاذة في R)

ولنفرض وجود مشتق واحد من مرتبة عليا على الأقل لـ $\vec{r}$ غير معدوم عند t_0 عندئذ :

③ ان المستقيم مماس لـ f عند P_0 يتعين بأول مشتق لـ $\vec{r}$ غير معدوم عند t_0

((اي يوازي)) اثبات صحة العلاقة سابقة :

لنفرض ان مرتبة أول مشتق لـ r غير معدوم عند t_0 هي K حيث $((n \geq K))$ يعني:

$$\vec{r}'(t_0) = 0 \ , \ \vec{r}''(t_0) = 0 \ , \ \vec{r}^{K-1}(t_0) = 0$$

$$\vec{r}^{K}(t_0) \neq 0$$

عندئذ سيكون لدينا:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \underbrace{\boxed{(t-t_0)\vec{r}'(t_0) + \dots\dots + \frac{(t-t_0)^{K-1}}{(K-1)!}\vec{r}^{K-1}(t_0)}}_{=0} + \frac{t-t_0}{K!}\vec{r}^{K}(t_0)$$

هذا نشر تايلور من مرتبة K في جوار P_0 $\Longleftarrow$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{(t-t_0)^K}{K!}\vec{r}^{K}(t_0) + \vec{o}(t-t_0)$$

لكن

$$\text{قاطع} \ // \ \overrightarrow{P_0P} \ // \ K!\,\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{(t-t_0)^K} = \vec{r}^{K}(t_0) + K!\,\frac{\vec{o}(t-t_0)^K}{(t-t_0)}$$

$$\Longrightarrow \text{القاطع} \ // \ \underbrace{\vec{r}^{K}(t_0)}_{\text{ثابت لـ } t \text{ فنهايته نفسها}} + K!\,\underbrace{\frac{\vec{o}(t-t_0)}{(t-t_0)^K}}$$

نهايته مهملة حسب تعريف $\vec{o}(t-t_0)$

لنأخذ نهاية $P \to P_0 \Longleftarrow t \to t_0$

$$\Longrightarrow \text{مماس} \ // \ \vec{r}^{K}(t_0) + \underset{\vec{0}}{\underset{\|}{\vec{o}}}$$

اي ان المماس يتعين بأول مشتق غير معدوم وهو المطلوب

*نتيجة:
$$\vec{R}(u) = \vec{r}(t_0) + u\,\vec{r}^{K}(t_0)$$

وهو تمثيل وسيطي للمماس لـ f عند P_0 أو معادلة وسيطية للمماس عند P_0

والمعادلات الديكارتية

$$\frac{X-x_0}{x_0^k} = \frac{Y-y_0}{y_0^k} = \frac{Z-z_0}{z_0^k}$$

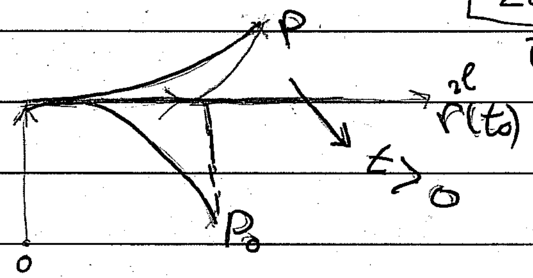
$$X = x_0 + u\, x_0^k$$
$$Y = y_0 + u\, y_0^k$$
$$Z = z_0 + u\, z_0^k$$

(ب) ان P_0 شاذة أساسية لـ ℓ $\Leftrightarrow$ مرتبة اول مشتقة لـ $\vec{r}$ غير معدوم عند t_0

*الاثبات:

لنفرض ان مرتبة اول مشتقة لـ $\vec{r}$ بعد مشتق الأول غير معدوم عند t_0 زوجية ولتكن (2ℓ)

$$\vec{OP} = \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \underbrace{\frac{(t-t_0)^{2\ell}}{2\ell!}\vec{r}^{\,2\ell}(t_0)}_{\vec{v}_1} + \underbrace{\vec{o}\,(t-t_0)^{2\ell}}_{\vec{v}_2}$$



من نهاية متجه $\vec{r}(t)$ نأخذ متجه $\vec{r}^{\,2\ell}$ نضربه بـ $\frac{(t-t_0)^{2\ell}}{2\ell!}$ ومن نهاية v_1

يجب ان ارسم $o(t-t_0)^{2\ell}$ لا صل لـ P لأن هذا المتجه مهمل نسبي الشكل منحني في جوار P_0 يسمى قرن والنقطة P_0 نقطة تراجع

ان شكل المنحني في هذه حالة قبل مروره P_0 و بعد مروره P_0 يقعان في جهة ذاتها بالنسبة للمستوي العامودي على المتجه $\vec{r}^{\,2\ell}(t)$ في النقطة P_0

★ ★ انتهت المحاضرة ★ ★