المحاضرة 5

◄ المادة: د. محمد بشير قابيل ◄ دكتور

◄ عنوان المحاضرة:

نظري ✓
عملي

سنحل في هذه المحاضرة تمارين متنوعة :

تمرين 1 : لتكن τ التبولوجيا المعرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق ما يلي :

$\tau = \{ \phi , E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} : n \geq 1 \}$

المطلوب : 1 بين أن τ تبولوجيا على X

2 اذكر جميع الجوارات المفتوحة للعدد 6

3 أوجد $A', \bar{A}, A^\circ$ حيث أن $A = \{4, 13, 28, 37\}$

4 هات ثلاث حلول للمعادلة $\bar{E} = \mathbb{N}^*$

الحل : 1 إن τ تكون تبولوجيا على $\mathbb{N}^*$ بسبب ما يلي :

1) $\phi \in \tau$, $E_1 = \{1, 2, \dots, n\} = \mathbb{N}^* \in \tau$

2) $\forall E_\alpha , E_\beta \in \tau$, $E_\alpha \cap E_\beta = E_\gamma \in \tau$: $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$

مثلاً $E_3 \cap E_8 = E_8$

3) $\alpha_0 = \min\{\alpha : \alpha \in I\}$ حيث $\bigcup\limits_{\alpha \in I \subseteq \mathbb{N}^*} E_\alpha = E_{\alpha_0} \in \tau$

$I \neq \phi$

مما سبق نجد أن τ تبولوجيا على $\mathbb{N}^*$

2 الجوارات المفتوحة للعدد 6 :

$E_1 = \{1, 2, 3, \dots, 6, \dots\}$ $E_4 = \{4, 5, 6, \dots\}$
$E_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ $E_5 = \{5, 6, \dots\}$
$E_3 = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$ $E_6 = \{6, 7, \dots\}$

3) لاحظ أن $\bar{A} = \{1, 2, 3, \ldots, 37\}$ ذلك لأن أي جوار لنقطة $p \in X$ هو من المجموعات

$E_1, E_2, \ldots, E_p$: ($p = 37$ هنا)

وكل منها سيلاقي A

و E_{38} لا تلاقي A و E_{37} تلاقي A في 37 فقط

و E_{36} تلاقي A في نقطة مغايرة لـ 36

و E_{35} " " " " " " 35

$\Longrightarrow A' = \{1, 2, \ldots, 36\}$

أما $A°$ هي أكبر مفتوحة محتواة في A ومن الواضح أن $A° = \phi$

4) إن بعض حلول المعادلة $E' = \mathbb{N}^*$ هي

$E = \mathbb{N}^*$ و $E = \{2k+1 : k \geq 0\}$

$E = \{2k : k \geq 1\}$ و $E = \{p : p \text{ is prime}\}$

وأن أي مجموعة غير منتهية تحقق المطلوب.

تمرين 2 : ليكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ و

$\mathcal{A} = \{\{a\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$

عين τ التبولوجيا المولدة بـ $\mathcal{A}$ ؟؟

الحل : نلاحظ أولاً أن $\mathcal{A}$ قاعدة لتبولوجيا

$\mathcal{A}_0 = \{\phi, X, \{a\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$

$\mathcal{A}_1 = \{\phi, X, \{a\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{c\}\}$

$\mathcal{A}_2 = \tau = \{\phi, X, \{a\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$ وهي التبولوجيا المولدة بـ $\mathcal{A}$

- هل (X,τ) في التمرين السابق هو T_0؟ نعم
- هل (X,τ) " " " T_1؟ لا، لأن
ليس كل وحيدة العنصر مغلقة حيث $\{a\}$ وحيدة العنصر
وليست مغلقة إذ أن

$$\{a\}^c=\{b,c,d,e\}\notin\tau$$

- هل هو متراص؟ نعم كون المفتوحات عددها منته

تمرين (3):

خذ $X=\mathbb{R}$ و $\tau=\tau_{]a,b]}$

وخذ المتتاليات:

$$\left(x_n=\frac{1}{n}\right)_{n\geq1},\ \left(y_n=\frac{-1}{n}\right)_{n\geq1},\ \left(z_n=\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq1}$$

ادرس تقارب هذه المتتاليات في $(\mathbb{R},\tau_{]a,b]})$

الحل: لما كان هذا الفضاء T_2 فإن كل متتالية متقاربة فيه
تكون نهايتها وحيدة.

- إن الصفر ليس نهاية لـ (x_n) لأنه يوجد جوار للصفر
$]-1,0]$ لا يحوي جميع عناصر المتتالية باستثناء عدد منته منها
وكذلك أي نقطة مغايرة للصفر $\Leftarrow (x_n)$ متباعدة في هذا
الفضاء

- أما من أجل (y_n) فهي متقاربة من الصفر

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0: \forall n>n_0\ ;\ y_n\in\ ]-\varepsilon,0]$$

- أخيراً (z_n) ليست متقاربة.

الاستمرار عند نقطة: ليكن $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\tau')$ تطبيقاً ما
وليكن $x_0\in X$ و $y_0=f(x_0)$، نقول عن f إنها مستمر

عند النقطة x_0 إذا تحققت أحد الشروط التالية المتكافئة:

1 الصورة العكسية لأي جوار لـ y_0 هو جوار لـ x_0 أي:

$\forall \mathcal{V} \in \mathcal{V}_{y_0} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}) \in \mathcal{V}_{x_0}$

2 من أجل كل جوار لـ y_0 يوجد جواراً لـ x_0 بحيث صورته المباشرة محتواة في جوار y_0 المذكور أي:

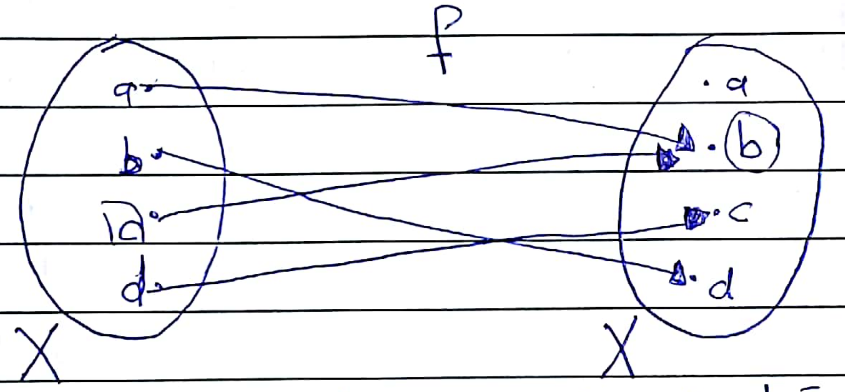
$\forall \mathcal{V} \in \mathcal{V}_{y_0} : \exists w \in \mathcal{V}_{x_0} : f(w) \subset \mathcal{V}$

3 $\forall \mathcal{V} \in \mathcal{V}_{y_0} : \mathcal{V}^\circ = \mathcal{V} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}) \in \mathcal{V}_{x_0}$

تمرين: ليكن $X=\{a,b,c,d\}$

$I = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}\}$

تبولوجيا على X، ولننظر في التابع $f: X \to X$ المعرف كمايلي



ادرس استمرار f عند كل من النقطتين c و d

الحل:

الجوارات المفتوحة لـ c هي $\{b,c,d\}$ و X

و " " لـ b " $X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}$

والصورة العكسية لها:

$f^{-1}(X) = X = f^{-1}(\{b,c,d\})$

$f^{-1}(\{b\}) = f^{-1}(\{a,b\}) = \{a,c\}$

وبالتالي مجموعة الصور العكسية المفتوحات التي تحوي $b=f(c)$

هي $X \in \mathcal{I}$, $\{a,c\} \notin \mathcal{I}$

ولما كانت $\{a,c\}$ ليست جواراً (مجموعة مفتوحة) لـ c

$\Leftarrow$ f غير مستمر عند c

- أما بخصوص الاستمرار عند d فنلاحظ أن $f(d)=c$

والمفتوحات التي تحوي c هي $\{b,c,d\}$ و X

صورها العكسية

$$f^{-1}(X) = f^{-1}(\{b,c,d\}) = X$$

وهي جواراً لـ d

$\Leftarrow$ f غير مستمر عند d

تمرين:

أوجد تطبيق تقابل بين المجالين المغلقين $[a,b]$, $[0,1]$

$$f : [0,1] \longrightarrow [a,b]$$
$$f(x) = (1-x)a + xb.$$

END

إعداد

رشا رويحي   نشر تيناوي