نظرية الاحتمالات

السنة الثالثة

17-11-2018

نظري

◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة الرابعة عشرة   عنوان المحاضرة : دراسة المتغيرات العشوائية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ خواص دالة التوزيع الاحتمالي .

٢ـ دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي ودالة توزيعه و دالة الحدث

٣ـ بعض الملاحظات والأمثلة .

خواص دالة التوزيع الاحتمالي

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً ، ولتكن $F_X(x_i) = P(X = x_i)$ دالة كثافة احتمالية لِـ X

$$F_X(x) = P(X < x)$$

$$1)\ \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad ;\ 0 \le F_X = P[X \le x] \le 1$$

$$2)\ \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ ;\quad x_1 \le x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$$

لأنّ F دالة غير متناقصة .

$$3)\ F_X(+\infty) = 1 \quad ; \quad F_X(-\infty) = 0$$

4) F مستمر من اليمين ، أي أنَّ :

$$F_X(x^+) = F_X(x) = P(X \le x)\ ;\ \ F_X(x^+) = \lim_{n\to\infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

5) F غير مستمر من اليسار ، أي أنَّ :

$$F_X(x^-) \ne F_X(x)\ ;\ \ F_X(x^-) = \lim_{n\to\infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right) = P[X < x]$$

نلاحظ من الخاصتين 4) و 5) أنَّ :

$$F(x^+) - F(x^-) = P[X \le x] - P[X < x] = P(X = x)$$

أي أنَّه إذا كان $P[X=x]>0$ فإنَّ : $F_X(x)$ تعاني من قفزة عند x مساوية لهذا الاحتمال .

وإذا كان : $P[X=x]=0$ فإنَّ : $F_X(x^+)=F_X(x^-)$ ويكون عندئذٍ X متغير عشوائي مستمر،

ومنه نقول إنَّ المتغير العشوائي X مستمر إذا تحقق : $P[X=x]=0 \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}$

◀ **ملاحظة** إذا وضعنا في دالة التوزيع (كما في بعض الكتب) أنَّ : $F_X(x)=P[X=x]$ ، فإنَّ :

$F_X(x)$ يكون مستمر من اليسار وغير مستمر من اليمين .

نتائج

١) $P(X>a)=1-P(X\le a)=1-F(a)$

٢) $P(X\ge a)=1-P(X<a)=1-[P(X\le a)-P(X=a)] = 1-F(a)+f_X(a)$

٣) $P(X\le b)=F(b)$

٤) $P(X<b)=P(X\le b)-P(X=b)=F(b)-f_X(b)$

٥) $P(a<X\le b)=F_X(b)-F_X(a)$

٦) $P(a<X<b)=F_X(b)-F_X(a)-f_X(b)$

٧) $P(a\le X\le b)=F_X(b)-F_X(a)+f_X(a)=P(X\le b)-P(X<a)=F_X(b)-[F_X(a)-f_X(a)]$

٨) $P(a\le X<b)=F_X(b)-F_X(a)+f_X(a)-f_X(b)$

ملاحظة عندما X مستمر فإنَّ $P(X=x)=0$ ويكون $P(X\le x)=P(X<x)$ ويكون :

$$P(a\le X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)=P(a<X<b)$$

تمرين ألقينا حجر نرد مرتين ، وليكن X المتغير الدال على أكبر الوجهين الحاصلين و Z المتغير الدال على أصغر الوجهين الحاصلين ، عيّن دالة الكثافة الاحتمالية لكل من X و Z ثمَّ دالة التوزيع لهما .

الحل نحدد مجموعة قيم المتغيرين : $\mathbb{R}_X=\{1,2,3,4,5,6\}, \mathbb{R}_Z=\{1,2,3,4,5,6\}$ وجدولا الكثافة :

X	1	2	3	4	5	6	المجموع
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

Z	1	2	3	4	5	6	المجموع
$f_Z(z)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

ودالتا توزيعهما الاحتمالي :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ;x<1 \\ \frac{1}{36} & ;1\le x<2 \\ \frac{4}{36} & ;2\le x<3 \\ \frac{9}{36} & ;3\le x<4 \\ \frac{16}{36} & ;4\le x<5 \\ \frac{25}{36} & ;5\le x<6 \\ 1 & ;6\le x \end{cases} \quad , \quad F_Z(z) = \begin{cases} 0 & ;z<1 \\ \frac{11}{36} & ;1\le z<2 \\ \frac{20}{36} & ;2\le z<3 \\ \frac{27}{36} & ;3\le z<4 \\ \frac{32}{36} & ;4\le z<5 \\ \frac{35}{36} & ;5\le z<6 \\ 1 & ;6\le z \end{cases}$$

◀توضيح : تم الحصول على الاحتمالات من الجدول التالي :

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

إذاً دالة الكثافة الاحتمالية عشوائية مستمرة ودالة التوزيع الاحتمالية لمتغير .

دالة الحدث

ليكن $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{p})$ فضاءً احتمالياً و ليكن $A \in F$ (حدث من F) نقول عن الدالة

$$x_A : \Omega \to R$$
$$w \to x_A(w) = \begin{cases} 0 & : w \notin A \\ 1 & : w \in A \end{cases}$$

إنها دالة الحدث A

- إن هذه الدالة هي متغير عشوائي منقطع مجموعة قيمه $\{0,1\}$

دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير مستمر ودالة توزيعه

نقول عن الدالة الموجبة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ إنَّها دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي مستمر X إذا تحقق :

$$1)\ f_X(x) \ge 0 \ ; \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad\qquad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x).\,dx = 1$$

من أجل f دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي X مستمر نعرف دالة التوزيع الاحتمالي لـ X :

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t).dt$$

نتائج وملاحظات (حالة الاستمرار) :

١) $F(x^+) = F(x^-) = F(x) = P(X \le x) = P(X < x)$

٢) $P(a \le x \le b) = P(a < x < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b)$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

٣) $P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x).dx = F(b) - F(a)$

٤) $\forall\, x \in \mathbb{R}\ ;\ P(X = x) = 0$

٥) إذا كانت A مجموعة قيوسة (قابلة للقياس) من $\mathbb{R}$ فإنَّ : $P(X \in A) = \int_A f(x).dx$ تكون f مستمرة

٦) إذا كانت $F_X(x)$ دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X مستمر فإنَّه حسب ليبتنز ، نجد أنَّ : $F_X'(x) = f_X(x)$ وذلك من أجل كل نقطة x تكون عندها f مستمرة .

مثال ليكن X متغيراً عشوائياً له دالة الكثافة :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda.e^{-x} & ;\ x \ge 0 \\ 0 & ;\ x < 0 \end{cases}$$ (λ ثابت حقيقي موجب)

1) عين λ لكي تكون $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية فعلية لِ X .

2) عين دالة التوزيع الاحتمالي لِ X ، واحسب $F(2.5)$.

الحل

1) لدينا الشرط الأول محقق و هو أنَّه لدينا فرضاً : $f_X(x) = \lambda e^{-x} \ge 0$

لنحقق الشرط الثاني و هو : $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x).dx = \int_{-\infty}^{0} (0).dx + \int_0^{\infty} \lambda e^{-x}.dx = 1$

$$\Rightarrow \lambda[-e^{-x}]_0^{\infty} = 1 \Rightarrow \lambda[0 - (-1)] = 1 \Rightarrow \lambda(1) = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

تصبح دالة الكثافة الاحتمالية لِ X بالشكل : $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x \ge 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$

2) حساب دالة التوزيع : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t).dt$

من أجل $t < 0$ فإنَّ : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} (0)\,.dt = 0$

من أجل $t \geq 0$ فإنَّ : $F_X(X) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t}.dt = \int_{-\infty}^{0}(0).dt + \int_{0}^{x} e^{-t}.dt$

$$= [-e^{-t}]_0^x = (-e^{-x}) - (-1) = 1 - e^{-x}$$

فتصبح دالة التوزيع لِ X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$F(2.5) = 1 - e^{-(2.5)} = 0.92$$

انتهت المحاضرة

لا يمكنك مسح أخطائك ما دمت تمشي في نفس الطريق ..

إعداد : خديجة الرفاعي – ولاء المبخر – لمى الحبشية