تذكرة: لتكن $n \in \mathbb{N}^*$ إن الزمرة D_n هي زمرة تحوي $2n$ عنصر و

$$D_n \cong \begin{cases} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} & , n=1 \\ \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} & , n=2 \\ \text{ليست تبديلية } D_n & n>3 \end{cases}$$

$$D_n = \langle \sigma, \tau \mid \tau^2=1, \sigma^n=1, (\tau\sigma)^2=1 \rangle = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \rtimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

حيث الرمز $\rtimes$ يعني جداء نصف مباشر أي إحدى الزمرتين هي ناظمية.

مبرهنة: إن حقل تفريق حدودية $p(X)$ غير خزولة على حقل مميزه صفر هو تمديد غالوا لذلك الحقل. لنرمز ب N لحقل تفريق $p(X) \in K[X]$ عندئذٍ N/K غالوا زمرته $G = Gal(N/K)$ زمرة جزئية في S_n حيث $n = \deg p(X)$.

مثال: لتكن $p(X) = X^3 - 2$ حدودية غير خزولة على $\mathbb{Q}$ عندئذٍ:

1- أوجد حقل تفريق $p(X)$ على $\mathbb{Q}$ الرمز له ب N

2- أثبت أن $N/\mathbb{Q}$ غالوا

3- أوجد $[\mathbb{Q}(j):\mathbb{Q}]$ و $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]$

4- هل $N/\mathbb{Q}(j)$ و $N/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ غالوا؟

5- أوجد عناصر $G = Gal(N/\mathbb{Q})$

6- أثبت أنه يوجد عنصرين τ, σ في G بحيث

$\sigma(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\, j$, $\sigma(j) = j$, $\tau(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$, $\tau(j) = j^2$

ومرتبة τ هي 2 ومرتبة σ هي 3

7- أثبت أن $\tau\sigma\tau\sigma = 1$ أي $(\tau\sigma\tau = \sigma^{-1})$

8- استنتج شكل G ، 9- أوجد المقابل لـ G في S_3

الحل: 1) أصفار الحدودية x^3-2 هي $\sqrt[3]{2}\,j^2$, $\sqrt[3]{2}\,j$, $\sqrt[3]{2}$

ومنه $N=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$

2) $N/\mathbb{Q}$ غالوا لأن N حقل تفريق الحدودية $p(x)$ الفرزولة على حقل مميزه صفر وهو $\mathbb{Q}$

3) $N=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$

$$[\mathbb{Q}(j):\mathbb{Q}]=2$$
$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]=3$$

$$\begin{tikzcd}
 & N=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j) \arrow[dl, dash, "2"'] \arrow[dr, dash, "3"] \arrow[dd, dash, "6"] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[dr, dash, "3"'] & & \mathbb{Q}(j) \arrow[dl, dash, "2"] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

ملاحظة: يجب كتابة الحل بالتفصيل في امتحان كما في الحالات السابقة

4) $N/\mathbb{Q}(j)$ و $N/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ غالوا لأن $N/\mathbb{Q}$ غالوا

ملاحظة:

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[dl, dash, "\text{غالوا}"'] \arrow[dr, dash, "\text{غالوا}"] \arrow[dd, dash, "\text{غالوا}"] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{Q}(j) \arrow[dl, dash, "\text{غالوا}"] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

ليس غالوا لأنه ليس ناظمي.

5) $Irr(j,\mathbb{Q})=x^2+x+1\in\mathbb{Q}[x]$ أصفارها j^2 , j

$Irr(\sqrt[3]{2},\mathbb{Q})=x^3-2\in\mathbb{Q}[x]$ أصفارها $\sqrt[3]{2}\,j^2$, $\sqrt[3]{2}\,j$, $\sqrt[3]{2}$

إذاً لدينا ست تماثلات في G وهي

$\psi_i: N\longrightarrow N \quad ; i=1,2,3,4,5,6$

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6
$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}\,j$	$\sqrt[3]{2}\,j$	$\sqrt[3]{2}\,j^2$	$\sqrt[3]{2}\,j^2$
j	j	j^2	j	j^2	j	j^2

$G=\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6\}$

6) نلاحظ أن $\tau=\psi_2: N\longrightarrow N$

حيث $\tau(\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{2}$, $\tau(j)=j^2$

$\sigma=\psi_3: N\longrightarrow N$

$\sigma(\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{2}\,j$, $\sigma(j)=j$

لنحسب مرتبة τ: $\tau(j) = j^2 \neq id(j)$

$\boxed{j^3=1}$ $\tau^2(j) = \tau\circ\tau(j) = \tau(j^2) = j^4 = j \cdot j^3 = j$

وكذلك $\tau^2(\sqrt[3]{2}) = \tau\circ\tau(\sqrt[3]{2}) = \tau(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$

⇐ مرتبة τ هي 2.

لنحسب مرتبة σ: $\sigma(\sqrt[3]{2}) = j\sqrt[3]{2}$

$\sigma^2(\sqrt[3]{2}) = \sigma(j\sqrt[3]{2}) = j^2\sqrt[3]{2}$

$\sigma^3(\sqrt[3]{2}) = \sigma(j^2\sqrt[3]{2}) = j^3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$

وكذلك $\sigma^3(j) = j$

⇐ مرتبة σ هي 3.

$\boxed{7}$

• $\tau\sigma\tau\sigma(j) = \tau\sigma\tau(j) = \tau\sigma(j^2) = \tau(j^2)$
$= j = id(j)$

• $\tau\sigma\tau\sigma(\sqrt[3]{2}) = \tau\sigma\tau(j\sqrt[3]{2}) = \tau\sigma(j^2\sqrt[3]{2})$
$= \tau(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2} = id(\sqrt[3]{2})$

إذاً $\tau\sigma\tau\sigma = 1$

$\boxed{8}$ $|G| = 6$ إذاً حسب تذكرة في أول المحاضرة فإن $G \cong D_3$

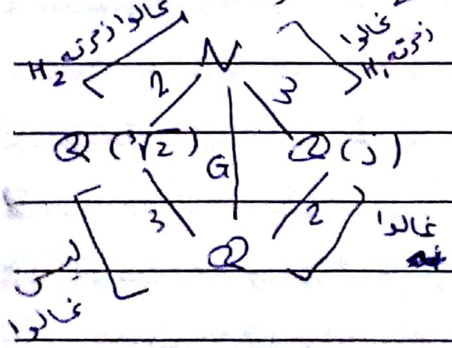
توضيح: لدينا $G = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_6\}$

$N/\mathbb{Q}(j)$ غالوا إذاً زمرته H_1 زمرة جزئية في G وتحوي 3 عناصر ومنه

$H_1 \cong \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ و ψ_3 مولدة لهذه الزمرة.

وكذلك H_2 زمرة جزئية في G تحوي

عنصرين ومنه $H_2 \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ و ψ_2 مولدة لهذه الزمرة.



{ $\lhd$ تعني الزمرة H ناظمية في G }

إن $H_1 < G$ و $H_1 \lhd G$ لأن

$\mathbb{Q}(j)/\mathbb{Q}$ غالوا وأيضاً

إن $H_2 < G$ و $H_2 \ntriangleleft G$ لأن

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ ليس غالوا وأيضاً

$H_2=\{\psi_1,\psi_2\}$, $H_1=\{\psi_1,\psi_3,\psi_5\}$

و $H_1\cap H_2=\{\psi_1\}$ ومنه $|G|=|H_1\cdot H_2|=6$

$$\Rightarrow G\cong H_1\rtimes H_2\cong\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\rtimes\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

ملاحظة: يمكن أن يأتي في امتحان طلب إيجاد شكل الزمر H_1 و H_2

$\boxed{9}$ سوف نقوم بترقيم أصفار كثيرة الحدود X^3-2 بالشكل

$\sqrt[3]{2}$ رقم ① و $\sqrt[3]{2}\,j$ رقم ② و $\sqrt[3]{2}\,j^2$ رقم ③

$\psi_3(\sqrt[3]{2})=\sqrt[3]{2}\,j \Longrightarrow \psi_3(①)=②$

$\psi_3(\sqrt[3]{2}\,j)=\sqrt[3]{2}\,j^2 \Longrightarrow \psi_3(②)=③$

$\psi_3(\sqrt[3]{2}\,j^2)=\sqrt[3]{2} \Longrightarrow \psi_3(③)=①$

ومنه العنصر المقابل لـ ψ_3 في S_3 هو

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\;2\;3)$$

مثال (٢): لتكن $p(x)=X^4-2\in\mathbb{Q}[X]$ عندئذٍ:

1 - أوجد حقل تفريق $p(x)$ على $\mathbb{Q}$ والرمز له بـ N

2 - أثبت أن $N/\mathbb{Q}$ غالوا

3 - هل $N/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ و $N/\mathbb{Q}(i)$ غالوا؟

4 - أوجد أمثال $G=Gal(N/\mathbb{Q})$

5 - أثبت أن يوجد τ, σ في G حيث

$\tau(i)=-i$, $\tau(\sqrt[4]{2})=\sqrt[4]{2}$, $\sigma(i)=i$, $\sigma(\sqrt[4]{2})=i\sqrt[4]{2}$

ومرتبة σ هي 4 ومرتبة τ هي 2

6 - أثبت أن $\tau\sigma\tau\sigma=1$

7 - استنتج شكل G

8 - أوجد العنصر المقابل لـ σ في S_4

9 - أوجد عنصر من S_4 غير موجود في G.

الحل: $\boxed{1}$ بما أن $p(x)=X^4-2$ غير خزولة على $\mathbb{Q}$ (آيزنشتاين مع $p=2$)

وأصفارها $\mp\sqrt[4]{2}$, $\mp\sqrt[4]{2}\,i$

$\Leftarrow$ $N=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2},i)$ وهو حقل تفريق المطلوب

وكذلك $irr(\sqrt[4]{2},\mathbb{Q})=X^4-2$

وهي غير خزولة على $\mathbb{Q}$

$irr(i,\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}))=X^2+1$

$$\begin{array}{ccccc} & & N & & \\ & {}^{4}\swarrow & \big|\,8 & \searrow^{2} & \\ \mathbb{Q}(i) & & & & \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \\ & {}_{2}\searrow & & \swarrow_{4} & \\ & & \mathbb{Q} & & \end{array}$$

$\Rightarrow [N:\mathbb{Q}]=[N:\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})].[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}):\mathbb{Q}]$

$= 2\times 4 = 8 \Rightarrow$ $N/\mathbb{Q}$ تمديد منتهي

$\boxed{2}$ $N/\mathbb{Q}$ غالوا لأن N حقل الحدودية X^4-2 غير خزولة على حقل مميزه صفر وهو $\mathbb{Q}$

$\boxed{3}$ $N/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ غالوا لأن $N/\mathbb{Q}$ غالوا زمرته

$$Gal(N:\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}))=H_1<G$$

و $H_1=\{\psi_1,\psi_5\}$ و $|H_1|=2$

و H_1 زمرة دوارة كونها من رتبة أولية مولدة ب ψ_5 أي $H_1=<\psi_5>\cong\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

$N/\mathbb{Q}(i)$ غالوا لأن $N/\mathbb{Q}$ غالوا زمرته

$$Gal(N:\mathbb{Q}(i))=H_2<G$$

و $H_2=\{\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4\}$ و $|H_2|=4$ وهي دوارة ومن رتبة 4 مولدة ب $\sigma=\psi_2$ و $H_2\triangleleft G$

$\boxed{4}$ بما أن G زمرة غالوا للتمديد $N/\mathbb{Q}$ تحوي 8 $\mathbb{Q}$-تماثل (وجدت سابقاً)

$\psi_i : N\longrightarrow N \;:\; i=1,2,\dots,8$

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8
$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{2}\,i$	$-\sqrt[4]{2}$	$-i\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$i\sqrt[4]{2}$	$-\sqrt[4]{2}$	$-i\sqrt[4]{2}$
i	i	i	i	i	$-i$	$-i$	$-i$	$-i$

$\rightarrow G=\{\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_8\}$

$\boxed{5}$ بما أن

$\tau: N\longrightarrow N \;:\; \tau(\sqrt[4]{2})=\sqrt[4]{2} \;,\; \tau(i)=-i$

$\sigma: N\longrightarrow N \;:\; \sigma(\sqrt[4]{2})=i\sqrt[4]{2} \;,\; \sigma(i)=i$

Scanned by CamScanner

عنصرين في G حيث $\tau = \psi_5$, $\sigma = \psi_2$

$\bullet\ \tau^2(i) = \tau(-i) = i$
$\tau^2(\sqrt[4]{2}) = \tau(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{2}$ $\Rightarrow$ رتبة τ تساوي 2

$\bullet\ \sigma^4(\sqrt[4]{2}) = \sigma^3(i\sqrt[4]{2}) = \sigma^2(i^2\sqrt[4]{2}) = \sigma(-\sqrt[4]{2})$
$= \sigma(-i\sqrt[4]{2}) = +\sqrt[4]{2}$
$\sigma^4(i) = i$
$\Rightarrow$ رتبة σ هي 4.

$\boxed{6}$ $\tau\sigma\tau\sigma(i) = \tau\sigma\tau(i) = \tau\sigma(-i)$
$= \tau(-i) = i$
وكذلك $\tau\sigma\tau\sigma(\sqrt[4]{2}) = \tau\sigma\tau(i\sqrt[4]{2})$
$= \tau\sigma(-i\sqrt[4]{2}) = \tau(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{2} \Rightarrow$
$\tau\sigma\tau\sigma = 1 = \psi_1 = id$

$\boxed{7}$ $|G| = 8$ ومنه $G \simeq D_4$

$\boxed{8}$ سوف نقوم بترقيم أصفار الحدودية $X^4 - 2$ بالشكل
$\sqrt[4]{2}$, $i\sqrt[4]{2}$, $-\sqrt[4]{2}$, $-i\sqrt[4]{2}$
رقم ① رقم ② رقم ③ رقم ④

نلاحظ أن:
$\tau(1) = 1$
$\tau(3) = 3$
$\tau(2) = 4$
$\tau(4) = 2$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 4)(1)(3) = (2\ 4)$

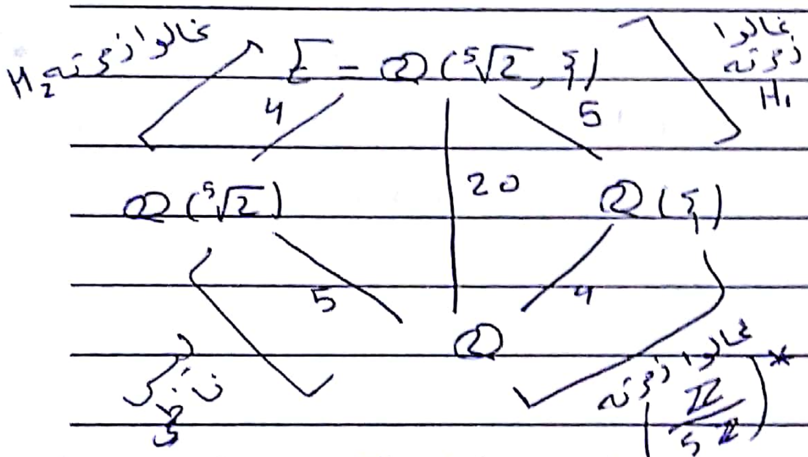
$\sigma(1) = 2$
$\sigma(3) = 4$
$\sigma(2) = 3$
$\sigma(4) = 1$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4)$

$\boxed{9}$ عنصر موجود في S_4 ولا ينتمي لـ G هو $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

مثال (٦): أوجد حقل تفريق $X^5-2\in\mathbb{Q}[X]$ ولتكن E وأثبت أن $E/\mathbb{Q}$ غالوا ثم أوجد جميع عناصر $G=Gal(E/\mathbb{Q})$ وأوجد رتبته.

الحل: إن جذور الكثيرة X^5-2 هي (أوجدناها سابقاً) $\sqrt[5]{2}, \zeta\sqrt[5]{2}, \zeta^2\sqrt[5]{2}, \zeta^3\sqrt[5]{2}, \zeta^4\sqrt[5]{2}$; $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{5}}$ أصفار X^5-2 غير مختزلة على $\mathbb{Q}$ إذاً $E=\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2},\zeta)$ حقل تفريق المطلوب.

$E/\mathbb{Q}$ غالوا لأن E حقل تفريق X^5-2 وهي غير مختزلة على حقل مميزه صفر وهو ($\mathbb{Q}$)



$\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ تمديد منتهي لأن $Irr(\zeta,\mathbb{Q})=X^4+X^3+X^2+X+1$ لأن 5 عدد أولي

$\Rightarrow [\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}]=4$

و $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ غالوا زمرته تماثل $\left(\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}\right)^* \cong \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ (محلول سبقاً)

$\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q}$ تمديد منتهي لأن $Irr(\sqrt[5]{2},\mathbb{Q})=X^5-2$

$\Rightarrow [\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}):\mathbb{Q}]=5$

وكذلك $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q}$ قابل للفصل لأنه X^5-2 غير مختزلة على حقل مميزه صفر وهو $\mathbb{Q}$ ولكن $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q}$ ليس ناظمي لأن X^5-2 تملك صفر $\sqrt[5]{2}$ فيه ولكنها لا تتحلل بشكل تام في $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ إذاً $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q}$ ليس غالوا

• لكن 4,5 أوليان فيما بينهما فإن التمديد $E/\mathbb{Q}$ درجة تمديده هي 20 و $[E:\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})]=4$, $[E:\mathbb{Q}(\zeta)]=5$

• لنوجد عناصر G بما أن x^5-2 تملك 5 أصفار (ذكرت سابقاً)

$irr(\zeta, \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})) = x^4+x^3+x^2+x+1$ تملك 4 أصفار وهي $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$

إذاً G تملك 20 تماثل $\mathbb{Q}$ ، $\psi_i : E \longrightarrow E \; ; i=1,2,\dots,20$

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}
$\sqrt[5]{2}$	$\sqrt[5]{2}$	$\sqrt[5]{2}\zeta$	$\sqrt[5]{2}\zeta^2$	$\sqrt[5]{2}\zeta^3$	$\sqrt[5]{2}\zeta^4$	$\sqrt[5]{2}$	$\sqrt[5]{2}\zeta$	$\sqrt[5]{2}\zeta^2$	$\sqrt[5]{2}\zeta^3$	$\sqrt[5]{2}\zeta^4$	$\sqrt[5]{2}$	$\sqrt[5]{2}\zeta$	$\sqrt[5]{2}\zeta^2$	$\sqrt[5]{2}\zeta^3$	$\sqrt[5]{2}\zeta^4$
ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ	ζ^2	ζ^2	ζ^2	ζ^2	ζ^2	ζ^3	ζ^3	ζ^3	ζ^3	ζ^3

	ψ_{16}	ψ_{17}	ψ_{18}	ψ_{19}	ψ_{20}
$\sqrt[5]{2}$	$\sqrt[5]{2}$	$\sqrt[5]{2}\zeta$	$\sqrt[5]{2}\zeta^2$	$\sqrt[5]{2}\zeta^3$	$\sqrt[5]{2}\zeta^4$
ζ	ζ^4	ζ^4	ζ^4	ζ^4	ζ^4

• $E/\mathbb{Q}(\zeta)$ تمديد غالوا لأن $E/\mathbb{Q}$ غالوا و $[E:\mathbb{Q}(\zeta)]=5$

إذاً $H_1 = Gal(E/\mathbb{Q}(\zeta))$ تملك 5 عناصر هي $H_1=\{\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5\}$

$|H_1|=5$ و 5 عدد أولي فإن $H_1 \cong \dfrac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ مولدة ب ψ_2 لأن

$$\psi_2^5(\sqrt[5]{2}) = \psi_2^4(\sqrt[5]{2}\,\zeta) = \psi_2^3(\sqrt[5]{2}\,\zeta^2) = \psi_2^2(\sqrt[5]{2}\,\zeta^3)$$

$$= \psi_2(\sqrt[5]{2}\,\zeta^4) = \sqrt[5]{2}$$

وكذلك $\psi_2^5(\zeta)=\zeta$

وأيضاً $H_1 \lhd G$ لأن $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ غالوا

• $E/\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ غالوا لأن $E/\mathbb{Q}$ غالوا وعناصر الزمرة لهذا التمديد هي

$H_2=\{\psi_1,\psi_6,\psi_{11},\psi_{16}\}$ مولدها ψ_6 لأن

$$\psi_6^4(\zeta) = \psi_6^3(\zeta^2) = \psi_6^2(\zeta^4) = \psi_6(\zeta^3) = \zeta$$

وكذلك $\psi_6^4(\sqrt[5]{2}) = \sqrt[5]{2}$

نلاحظ أن $H_1 \cap H_2 = \{\psi_1\}$ و $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) \cap \mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}$ $((4,5)=1)$

• بما أن $|H_1|=5$ و $H_1 \lhd G$ و $|H_2|=4$ و $\underline{H_2 \ntriangleleft G}$

وأيضاً $|H_1 \cdot H_2| = 20$ لأن $H_1 \cap H_2 = \psi_1$ الحيادي ، لأن $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q}$ ليس غالوا

$$\Rightarrow G = H_1 \rtimes H_2 \cong \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \rtimes \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$$

انتهت المحاضرة :) إعداد: شريف الخليل البوشي.