

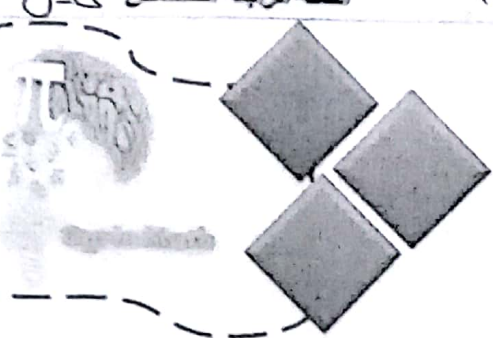
المحاضرة 22

نظري

عملي

دكتور الملاءة: محمد بشير قانيل

عنوان المحاضرة:



مبرهنة:

إذا كان (X, d) فضاء مترى و G مفتوحة في X و $X \neq G$ وكانت K مغلقة في X ، بحيث $K \subseteq G$ عندئذ لا يمكن لـ K أن تقرب من محيط G بالقدر الذي نشاء

تمرين:

لتكن $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ فضاء $K = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ في الفضاء $(\mathbb{R}, | \cdot |)$. أثبت أن K مغلقة.

الحل:

لتكن $\{ \theta_\alpha \}_{\alpha \in A}$ تغطية مفتوحة للمجموعة K

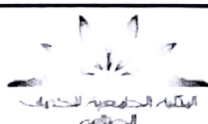
$$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \theta_\alpha$$

ولما كان $0 \in K$ فإنه يوجد $\alpha_0 \in A$ بحيث $0 \in \theta_{\alpha_0}$

ولنا أنه المتتالية $(x_n = \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ المتقاربة في $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ من الصفر، هذا يعني يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $x_n \in \theta_{\alpha_0}$ ، $\forall n \geq n_0$.

بما أن θ_{α_0} مفتوح، فهو يحتوي على جميع عناصر المتتالية باستثناء عدد منته منها

أيما بخصوص المجموعة $E = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}\}$ $K \supseteq E$



فإن :

$$\forall x_i \in E; \exists \alpha_i \in A : x_i \in \theta_{\alpha_i}$$

$$\Rightarrow E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} \theta_{\alpha_i}$$

$$\Rightarrow K = \{0\} \cup E \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \geq n_0 \right\} \subseteq \theta_{\alpha_0} \cup \theta_{\alpha_1} \cup \dots \cup \theta_{\alpha_{n_0-1}}$$

← أمكن استخلاص نقطة جزئية منتهية ← كمتراصة.

نتيجة : إذا كانت $x \rightarrow x_n$ و $A = \{x_n\} \cup \{x\}$

عندئذ A متراصة.

المجموعة المتراصة نسبياً :

ليكن (X, d) فضاء مترى $A \subseteq X$ ، نقول عن A متراصة نسبياً في X إذا وفقط إذا كان \bar{A} متراصة.

الفضاء المترى بالتوالي :

ليكن (X, d) فضاء مترى ، نقول إنه مترى بالتوالي إذا وفقط إذا هو متتالي في X متتالية جزئية متقاربة في X .

الفضاء المترى المحدود كلياً :

نقول عن الفضاء المترى (X, d) إنه محدود كلياً إذا وفقط إذا كان

$$\forall \epsilon > 0; \exists E_\epsilon = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$$

$$X = \bigcup_{\epsilon=1}^{\infty} N(x_n, \epsilon)$$

وتسمى E شبكة ϵ لـ X



$$\delta(X) = 2n\epsilon < \infty$$

لاحظ أن

ملاحظة: كل محدود كلياً هو محدود و لكن العكس غير صحيح بالضرورة .
و إليك المثال العاكس

لنأخذ (\mathbb{R}, d) حيث d متقطعة

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

$$\delta(\mathbb{R}) = 1 . \quad \text{لاحظ أن}$$

ولكن مهما تكن ϵ حيث $0 < \epsilon < 1$ فإن

$$\forall x \in X; N(x, \epsilon) = \{x\}$$

وبالتالي E_ϵ لن تكون منتهية لأن :

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} N(x, \epsilon) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$$

$$E = \mathbb{R}$$

مبرهنة التراص في فضاء مترى (X, d) :

ليكن (X, d) فضاء مترى عندئذٍ العنصر التالي متكافئ :

1) (X, d) متراص

2) (X, d) متراص عددياً

3) (X, d) متراص بالتوالي

4) (X, d) محدود كلياً وتام .

END