مبرهنة:

إذا كان (X,d) فضاء متري و G مفتوحة في X و $X \neq G$ وكانت K متراصة في X بحيث $K \subseteq G$

عندئذٍ لا يمكن لـ K أن تقترب من محيط G بالقدر الذي تشاء.

تمرين:

لتكن $K = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ في الفضاء $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

أثبت أن K متراصة.

الحل:

لتكن $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ تغطية مفتوحة للمجموعة K

$$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$$

ولما كان $0 \in K$ فإنه يوجد $\alpha_0 \in A$ بحيث $0 \in O_{\alpha_0}$

ولأن المتتالية $\left(x_n = \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ المتقاربة في $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ من الصفر، هذا يعني يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$x_n \in O_{\alpha_0} \quad , \forall n \geq n_0$$

$\Downarrow$

جوار للصفر يحوي جميع عناصر المتتالية باستثناء عدد منتهٍ منها

أما بخصوص المجموعة $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}\} \subseteq K$

فإن:

$$\forall x_i \in E ; \exists \alpha_i \in A : x_i \in \Theta_{\alpha_i}$$

$$\Rightarrow E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_0-1} \Theta_{\alpha_i}$$

$$\Rightarrow K = \{0\} \cup E \cup \{\tfrac{1}{n} : n \geq n_0\} \subseteq \Theta_{\alpha_0} \cup \Theta_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \Theta_{\alpha_{n_0-1}}$$

⇐ أمكن استخلاص تغطية جزئية منتهية ⇐ K متراصة.

نتيجة: إذا كانت $x_n \to x$ و $A = \{x\} \cup \{x_n\}_{n \geq 1}$

عندئذٍ A متراصة.

المجموعة المتراصة نسبياً:

ليكن (X,d) فضاء متري، $A \subseteq X$، نقول عن A متراصة نسبياً في X إذا وفقط إذا كان $\bar{A}$ متراصة.

الفضاء المتراص بالتوالي:

ليكن (X,d) فضاءً مترياً، نقول إنه متراص بالتوالي إذا وفقط إذا حوت كل متتالية من X متتالية جزئية متقاربة في X

الفضاء المتري المحدود كلياً:

نقول عن الفضاء المتري (X,d) إنه محدود كلياً إذا وفقط إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists E_\varepsilon = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq X$$

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i, \varepsilon)$$

وتسمى E شبكة - ε لـ X

لاحظ أن $\delta(X) = 2n\varepsilon < \infty$

ملاحظة: كل محدود كلياً هو محدود و لكن العكس غير صحيح بالضرورة.

و إليك المثال المعاكس

لنأخذ (R, d) حيث:

المتقطعة

$$\forall x, y \in R: \quad d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

لاحظ أن $\delta(\mathbb{R}) = 1$.

ولكن مهما تكن ε بحيث $1 > \varepsilon > 0$ فإن

$$\forall x \in X \; ; \; N(x, \varepsilon) = \{x\}$$

و بالتالي E_ε لن تكون منتهية لأن:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} N(x, \varepsilon) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$$

$$\boxed{E = \mathbb{R}}$$

مبرهنة التراص في فضاء متري (X, d):

ليكن (X, d) فضاء متري عندئذٍ العبارات التالية متكافئة:

1. (X, d) متراص
2. (X, d) متراص عداً
3. (X, d) متراص بالتوالي
4. (X, d) محدود كلياً و تام.

END