المحاضرة 22 (الأخيرة)

◄ دكتورة المادة: نور غازي

◄ عنوان المحاضرة: الحقل المنتهي

2018/11/12

نظري ☑ عملي ☐

الحقل المنتهي: نقول عن الحقل F أنه منتهي إذا كان عدد عناصر $n < +\infty$.

ملاحظة: الحقل المنتهي مميزه دوماً p (عدد أولي) وهو محدد بـ $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} = \mathbb{F}_p$

مبرهنة: ليكن K حقل منتهي مميزه p (عندها $\mathbb{F}_p \subseteq K$) لنفرض $n = [K : \mathbb{F}_p]$ (منتهي) عندها K يحوي p^n عنصر **لأن:**

كون $[K : \mathbb{F}_p] = n$ إذاً $\{x_1, \dots, x_n\}$ عناصر قاعدة K فضاء شعاعي على $\mathbb{F}_p$ أي $x \in K \Rightarrow x \overset{(*)}{=} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}_p$

نلاحظ أن كل α_i لها p احتمال (لأن عدد عناصر $\mathbb{F}_p$ هو p) و $\alpha_i \in \mathbb{F}_p$ ومنه عدد عناصر x المكتوبة وفق $(*)$ هي p^n عنصر.

نتيجة: لنرمز بـ $\mathbb{F}_{p^n}$ للحقل K المذكور سابقاً.

ملاحظة: $\mathbb{F}_{p^m} \subseteq \mathbb{F}_{p^n} \iff m \mid n$ (n تقسم m)

$$\begin{array}{c} \mathbb{F}_{p^n} \\ | \\ \mathbb{F}_{p^m} \\ | \\ \mathbb{F}_p \end{array} \qquad m = [\mathbb{F}_{p^m} : \mathbb{F}_p], \quad n = [\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_p]$$

مبرهنة: ليكن p عدد أولي و $n \in \mathbb{N}^*$ عندها يوجد حقل منتهي يحوي p^n عنصر وهو حقل التفريق لكثيرة الحدود $f(x) = x^{p^n} - x$ على $\mathbb{F}_p$

"كثيرة الحدود $f(x)$ فرولة"

تمرين: ليكن $\alpha = \sqrt{3+\sqrt{3}}$ [1] أوجد $f(x) = irr(\alpha, \mathbb{Q})$

[2] أحسب $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$

[3] بأن $\beta = \sqrt{3-\sqrt{3}}$ صفر لـ $f(x)$ ولاحظ أن $\mp\alpha$ و $\mp\beta$ أصفار $f(x)$ (مرافقات α) باستخدام $\alpha\beta$ أوجد حقل التفريق لـ $f(x)$ الرمز له بـ N

[4] إذا علمت أن $N = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \alpha)$ أثبت أن $N/\mathbb{Q}$ غالوا وأحسب $[N : \mathbb{Q}]$

[5] أوجد عناصر $G = Gal(N/\mathbb{Q})$

[6] أثبت أن G تحوي العنصرين:

$$\tau : N \to N, \quad \alpha \mapsto \alpha, \quad \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2} \qquad , \qquad \sigma : N \to N, \quad \alpha \mapsto \beta, \quad \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}$$

ثم أثبت أن رتبة σ هي 4 ورتبة τ هي 2.

[7] تأكد من $\tau\sigma\tau\sigma = 1$ ثم استنتج شكل G.

الحل: [1] $x = \sqrt{3+\sqrt{3}} \Leftarrow x^2 = 3+\sqrt{3} \Leftarrow x^2 - 3 = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow (x^2-3)^2 = 3 \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 6 = irr(\alpha, \mathbb{Q})$$

[2] وظيفة

[3] $\beta = \sqrt{3+\sqrt{3}}$ لنحسب $\alpha \cdot \beta$

$$\alpha \cdot \beta = (\sqrt{3+\sqrt{3}})(\sqrt{3-\sqrt{3}}) = \sqrt{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$
$$= \sqrt{9-3} = \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

لكن $\alpha^2 = 3+\sqrt{3}$ ومنه $\sqrt{3}, \alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha)$

$$\Rightarrow N = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{2})$$

[4] وظيفة

[5] بأن مرافقات α هي $\mp\beta$, $\mp\alpha$ ومرافقات $\sqrt{2}$ هي $\mp\sqrt{2}$ لأن $irr(\sqrt{2}, \mathbb{Q}(\alpha)) = x^2 - 2$ وأصفارها $\mp\sqrt{2}$

وبالتالي G تملك 8 تماثلات وهي

$\psi_i : N \longrightarrow N \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, 8$

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8
α	α	$-\alpha$	β	$-\beta$	α	$-\alpha$	β	$-\beta$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$

$\boxed{7}$ نلاحظ أن $\tau = \psi_5$ و $\sigma = \psi_3$

لنحسب مرتبة τ :

$$\left.\begin{aligned} \tau^2(\sqrt{2}) &= \tau(-\sqrt{2}) = +\sqrt{2} \\ \tau^2(\alpha) &= \tau(\alpha) = \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ τ من المرتبة 2

لنحسب مرتبة σ :

$$\left.\begin{aligned} &\sigma^4(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \\ &\sigma^4(\alpha) = \sigma^3(\beta) \overset{☺}{=} \sigma^2(-\alpha) = \sigma(-\beta) = +\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

σ من المرتبة 4

توضيح كيف قمنا بحساب $\sigma(\beta) = -\alpha$:

لدينا $\alpha\cdot\beta = \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{3-\sqrt{3}}$, $\alpha = \sqrt{3+\sqrt{3}}$

$$\sigma(\beta) = \sigma\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{2}\;\sigma(\sqrt{3})}{\beta} \qquad (*)$$

ولدينا $\sigma(\alpha^2) = \sigma(3+\sqrt{3}) = 3 + \sigma(\sqrt{3})$

ومن جهة أخرى $\sigma(\alpha^2) = (\sigma(\alpha))^2 = \beta^2 = 3-\sqrt{3}$

وبالمقارنة نجد $\sigma(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$

وبالتعويض في $(*)$ نجد

$$\sigma(\beta) = \frac{-\sqrt{2}\;\sqrt{3}}{\beta} = -\alpha$$

$\tau\sigma\tau\sigma(\sqrt{2}) = \tau\sigma\tau(\sqrt{2}) = \tau\sigma(-\sqrt{2}) = \tau(-\sqrt{2})$ $\boxed{\checkmark}$

$= +\sqrt{2}$

$\tau\sigma\tau\sigma(\alpha) = \tau\sigma\tau(\beta) = \tau\sigma(-\beta) = \tau(+\alpha) = \alpha$

$\Rightarrow \tau\sigma\tau\sigma = 1$

توضيح كيف قمنا بحساب : $\tau(\beta) = -\beta$

لدينا $\tau(\beta) = \tau\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\alpha}\right) = \frac{-\sqrt{2}\,\tau(\sqrt{3})}{\alpha}$ $(*)$

لكن $\alpha^2 = \tau(\alpha^2) = \tau(3+\sqrt{3}) = 3 + \tau(\sqrt{3})$

$\Rightarrow \alpha^2 = 3 + \tau(\sqrt{3}) \Rightarrow 3+\sqrt{3} = 3 + \tau(\sqrt{3})$

$\Rightarrow \tau(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

نعوض في $(*)$ $\tau(\beta) = \frac{-\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{\alpha} = -\beta$

$\Rightarrow \tau(\beta) = -\beta$

مما سبق نجد أن $G \cong D_4$

ملاحظة: إن التمرين السابق هو نموذج عن الأسئلة الامتحانية ويجب ذكر التعليلات بين الخطوات كما تعلمنا سابقاً.

وإنّ المبرهنات براهينها غير مطلوب للامتحان هو فقط من أجل فهم وتوضيح أفكار المقرر.

انتهى المقرر وبالتوفيق للجميع.

إعداد: شهد الحايك البوشي.