نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الثامنة عشر ◄ عنوان المحاضرة: متسلسلات التوابع

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـالعلاقة بين التكامل البتاوي و الغماوي.

٢ـمثال على العلاقة بينهما.

٣ـ إثبات قاعدة ليجاندر .

أشكال التكامل البتاوي:

$$(1)\quad B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad ; p,q>0$$

$$(2)\quad B(p,q)=\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy \qquad ; p,q>0$$

$$(3)\quad B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\varphi\,.\cos^{2q-1}\varphi\;d\varphi$$

أشكال التكامل الغماوي:

$$1)\quad \Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}.x^{p-1}\,dx$$

$$2)\quad \Gamma(p)=2\int_0^\infty e^{-x^2}.x^{2p-1}\,dx$$

العلاقة بين التكامل الغماوي و البتاوي:

مبرهنة:

إذا كان $p\ ,q$ عددين موجبين فإن التكامل البتاوي :

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(\mathrm{p}).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

الاثبات:

نأخذ

$$\Gamma(p)=2\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}.x^{2p-1}\,dx$$

$$\Gamma(q)=2\int_{0}^{\infty}e^{-y^2}.y^{2q-1}\,dy$$

بضرب التكاملين طرفاً لطرف

$$\Gamma(p).\Gamma(q)=4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}.x^{2p-1}.y^{2q-1}\,dxdy$$

ولحساب هذا التكامل المضاعف (الثنائي) ننتقل إلى الإحداثيات القطبية:

$$x^2+y^2=r^2$$

$$x=r\cos\theta\qquad,\qquad y=r\sin\theta$$

$$dx.dy=r\,dr\,d\theta$$

لأنه بحسب اليعقوبي:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta$$

$$=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r$$

والتكامل في هذه الحالة يأخذ الشكل التالي:

$$\iint_{D}f(x,y)ds=\iint f(r\cos\theta\ ,r\sin\theta)r\,.dr\,d\theta$$

بالعودة لإثبات المبرهنة:

حدود التكامل:

$$0 \le r < \infty$$
$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

وهي مساحة الربع الأول

بالتعويض تجميع المتحولات (كونها مستقلين عن بعضهما)

$$\Gamma(p).\Gamma(q) = 2\int_0^{\infty} (e^{-r^2}.r^{2p-1}.r^{2q-1}.r\, dr).2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2p-1}\theta\,.\sin^{2q-1}\theta\ \ d\theta)$$

$$\Gamma(p).\Gamma(q) = 2\int_0^{\infty} e^{-r^2}.r^{2(p+q)-1}\, dr\,.\,2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta\,.\sin^{2q-1}\theta\ \ d\theta$$

$$\Longrightarrow \Gamma(p).\Gamma(q) = \Gamma(p+q).B(p,q)$$

لأن $\Gamma(\mathrm{p})$ يحوي x^{2p-1} وهنا لدينا $\mathrm{r}^{2(\mathrm{p}+\mathrm{q})-1}$ وبالتالي هي $\Gamma(\mathrm{p}+\mathrm{q})$

$$\boxed{\Longrightarrow \mathrm{B}(\mathrm{p},\mathrm{q}) = \frac{\Gamma(\mathrm{p}).\Gamma(\mathrm{q})}{\Gamma(\mathrm{p}+\mathrm{q})}}$$

ملاحظة: إذا كان $p,q\ \in N^*$ فباستخدام الخاصة $\Gamma(n) = (n-1)!$:

$$\mathrm{B}(\mathrm{p},\mathrm{q}) = \frac{(\mathrm{p}-1)!.(\mathrm{q}-1)!}{(\mathrm{p}+\mathrm{q}-1)!}$$

ملاحظة: وجدنا سابقاً أن

$$B(p\,,1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right) = \pi$$

وأيضاً يمكننا إيجاد :

$$B\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(1)}$$

$$= \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \quad \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$* \ \Gamma(p) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}.x^{2p-1}.x\,dx$$

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}.x^0\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

أصبح لدينا : $\Gamma(1) = 1 \ , \ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \ , \ B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$

مثال: أحسب التكامل $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}\,\theta\ d\theta$

باستخدام تغيير المتحول:

$$sin^{2n}\,\theta = t^n \Leftarrow sin^2\,\theta = t$$

$$2.\sin\theta\,.\cos\theta\ d\theta = \frac{dt}{d\theta}$$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{dt}{2.\sin\theta\,.\cos\theta}$$

ولدينا : $cos^2\theta = 1 - sin^2\,\theta = 1 - t$

$$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-t}$$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{dt}{2.\sqrt{t}.\sqrt{1-t}} = \frac{1}{2}\ t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

بتغيير حدود التكامل:

$$\theta = 0 \Longrightarrow t = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = 1$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 (t)^n.t^{-\frac{1}{2}}.(1\ - t)^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}.(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2}B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

و لكن كيف عرفنا أن المساقط هي $1/2$, $n+1/2$ في

$$B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

لدينا من القوى :

$$(1-t)^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad t^{n-\frac{1}{2}}$$

و بالمقارنة مع الشكل العام للتكامل البتاوي:

$$p - 1 = n - \frac{1}{2} \Rightarrow p = n - \frac{1}{2} + 1 = n + \frac{1}{2}$$

$$q - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow q = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

لذلك:

$$J = \frac{1}{2}B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{n!}$$

حيث:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)$$

و ذلك بالاستفادة من العلاقة:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

أي طرحنا واحد من الـ $(p+1)$

بالعودة للمثال: نوحد المقامات مع ملاحظة أن $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi$

$$J = \frac{1}{2}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1.\pi}{2^n.n!}$$
$$= \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2^n.n!}$$

لحساب $2^n.n!$:

$$2^n = \underbrace{2.2.2.2\ldots 2}_{\text{مرة}}$$

$$n! = 1.2.3\ldots(n-1).n$$

$$\Longrightarrow 2^n.n! = (2.2.2.2\ldots 2)(1.2.3\ldots.n) = (2.1)(2.2)(2.3)\ldots(2n) = 2.4.6\ldots(2n-2)(2n) = (2n)!!$$

و لدينا :

$$(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1 = (2n-1)!!$$

ومنه:

$$J = \frac{\pi}{2}.\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}$$

قاعدة ليجاندر

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}.\Gamma(2p)$$

الإثبات:

لدينا

$$B(p,p) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx = \int_0^1 (x-x^2)^{p-1}\,dx$$

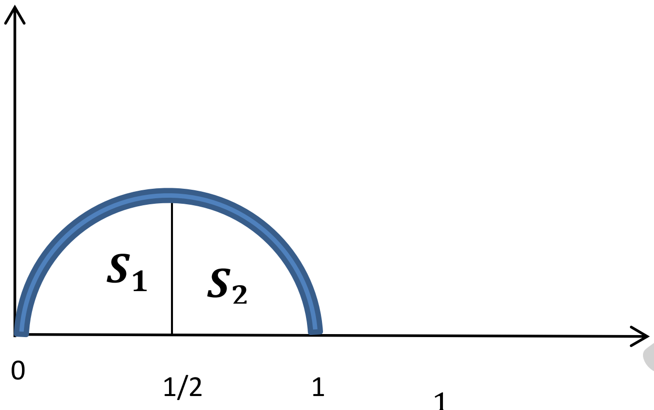
نقوم بالإتمام إلى مربع كامل حيث

$$(x-x^2) = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$$

بالعودة للتكامل السابق و التعويض :

$$B(p,p) = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{p-1} dx$$

و لما كان التابع $f(x) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$ يرسم قطعاً مكافئاً فإنه يكون متناظراً بالنسبة لمحور تناظره $x = \frac{1}{2}$



$$B(p,p) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{p-1} dx$$

نفرض $\frac{1}{4}t = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$

أو:

$$\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} - x\right)$$

نفاضل الطرفين:

$$\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -dx$$

$$\Longrightarrow dx = -\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

بالتعويض بالتكامل:

$$\mathrm{B(p,p)} = -2\int_1^0 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\mathrm{t}\right)\right]^{\mathrm{p}-1} . \left(-\frac{1}{4}\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}\right) \mathrm{dt}$$

$$= -2\int_1^0 \frac{1}{4}\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{t}\right]^{\mathrm{p}-1} \mathrm{dt}$$

$$= -2\int_1^0 \frac{1}{4} t^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4}(1-t)\right]^{p-1} dt$$

$$= -\frac{2.1}{4}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4}(1-t)\right]^{p-1} dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}}.(1-t)^{p-1}.\frac{1}{4^{p-1}} dt$$

$$= -\frac{1}{2}.\frac{1}{4^{p-1}}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1} dt$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2^{2p-2}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1} dt$$

$$= \frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1} dt$$

$$\Longrightarrow B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1} dt$$

العلاقة بين تكاملي أولر حيث: $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

هنا:

$$B(p,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(p+p)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}} B\left(-\frac{1}{2}+1\,,p-1+1\right)$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}} B\left(\frac{1}{2},p\right)$$

لقد حصلنا على $B\left(\frac{1}{2},p\right)$ من الأسس حيث $t^{-\frac{1}{2}}$ أسه $-\frac{1}{2}$ نضيف له واحد فيصبح $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وحصلنا على الـp من أس $(1-t)^{p-1}$ نضيف للأس واحد فيصبح $p-1+1=p$ ولذلك $B\left(\frac{1}{2},p\right)$

ومنه:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma(\mathrm{p})\Gamma(\mathrm{p})\Gamma\left(\mathrm{p}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2\mathrm{p}-1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\mathrm{p})\Gamma(2\mathrm{p})$$

$$\Gamma(\mathrm{p})\Gamma\left(\mathrm{p}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2\mathrm{p}-1}}\Gamma(\mathrm{p})\Gamma(2\mathrm{p})$$

حيث $\sqrt{\pi}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ كما حسبناه بالمحاضرة السابقة.

ومنه:

$$\boxed{\Gamma(\mathrm{p})\Gamma\left(\mathrm{p}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mathrm{p}-1}}\Gamma(2\mathrm{p})}$$

مثال: أوجد التكامل

$$\mathrm{J}=\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$$

$$J=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}dx$$

هذا التكامل من الشكل:

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$$

حيث:

$$\mathrm{p}-1=\frac{1}{4}\Longrightarrow \mathrm{p}=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

$$\mathrm{p}+\mathrm{q}=2\Longrightarrow \mathrm{q}=2-\mathrm{p}=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\mathrm{J}=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}\,dx=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}$$

نذكر أن:

$$\frac{5}{4}=\frac{1}{4}+1\quad,\quad\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1.\Gamma(1) = 1$$

ومنه:

$$J = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}{1}$$

$$J = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

حيث نلاحظ أنها من الشكل:

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)$$

فحسب قاعدة ليجاندر:

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)$$

بالعودة للمثال:

$$J = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\left(\frac{1}{4}\right)-1}}\Gamma\left(2\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{1}{2}}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$J = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{1}{2}}}.\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{2}.\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: وفاء شيخ سالم – باسل أبو عيسى – ناريمان جلو