الطوبولوجيا ٢

قسم العملي

إعداد :

محمد الخطيب و عمر الحافظ

و نذير تيناوي

(٠) مقدمة

نورد فيما يلي حلولاً لبعض التّمارين التي أدرجناها في خاتمة كلّ من فصول الكتاب الثّمانية. وما نهدف إليه بصورة رئيسيّة من إيراد هذه الحلول هو تعريف القارئ بأساليب معالجة مسائل الطّوبولوجيا العامّة.

هذا ونلفت نظر الطّالب إلى حقيقةٍ متعارفٍ عليها، ألا وهي أنّ أفضلَ السّبل لتمثُّل أي مسألةٍ أو مبرهنة تكمن في محاولة إثباتها ذاتياً قبل الاطلاع على برهانها. لذا فإنّني أنصح القارئ بالتّحلّي بالمثابرة والصّبر عند التّصدّي لأي مسألةٍ، وعدم الرّجوع إلى الحل إلّا بعد إجراء العديد من المحاولات الجادَّة والدّؤوبة للتوصل إليه.

كذلك، فإنّني أنصح القارئ الذي لم يُوفّق في حلّ مسألةٍ ما بالانصراف عنها، ولو إلى حين، لمعالجة مسألةٍ أُخرى. فإذا قُيّض له حل المسألة الجديدة، وهذا ممكنٌ أحياناً، فقد يغدو بمقدوره حل المسألة التي لم يُفلح سابقاً في معالجتها، وذلك بفضل التّجربة والمران اللذين اكتسبهما نتيجةً لحلّه المسّألة الجديدة. وفي حال توصُّل القارئ إلى حل أحد التّمارين، فمن المفيد مقارنة حله بالحل الذي أوردناه، إنَّ هذا الأمر غايةٌ في الأهمية، إذ أنَّهُ يوسع أفق القارئ ويطور إمكاناته، كما أنَّهُ يلفت نظره إلى أخطاءٍ ربما يكون قد ارتكبها في حلّه الخاص.

أ.د. خضر الأحمد. مبادئ الطّبولوجيا العامّة. 1992 – 1993. صفحة 264.

....

و مما يجب الإشارة إليه أنّ هذا العمل الذي بين أيديكم هو عبارة عن قسم العملي لمقرر الطوبولوجيا ٢ و بالتالي أنت بحاجة لأن تراجع ما درسته في مقرر الطوبولوجيا ١ و التحليل التابعي ١ كانطلاقة نشطة و من ثم عليك بالأملية (ملخص كتاب مبادئ الطوبولوجيا العامة للأستاذ الدكتور خضر حامد الأحمد) و المعدُّ من قبل الأستاذ الدكتور محمد بشير قابيل وما أُلحق به من سلسلة شوم إلى أن تصل لقسم العملي الموجود بين يديك الآن .

لاريبَ في أنّ كلَّ ثقافةٍ رياضيّة لا تدخل الطّبولوجيا عنصراً أساسياً فيها، إن هي إلّا ثقافةٌ فاقدةٌ لأحد أركانها الرّئيسة

(أ.د. خضر الأحمد)

رسالة شكر

إلى الأستاذ الدكتور محمد بشير قابيل مدرس المقرر

إلى الزملاء المشاركين في المحاضرات و إلى كل من قام بالحل على السبورة أو بتحضير تمارين و شاركنا بها

الفهرس

رقم الفصل	عنوان الفصل	الصفحة
0	المقدمة و الفهرس	1
1	تمرينات في الفضاءات المترية	3
2	الفضاءات التوبولوجية – تعريفات	13
3	مختارات من سلسلة شوم و غيرها	19
4	القواعد و القواعد الجزئية	21
5	فضاءات الجداء	22
6	تمرينات في الفضاءات الطوبولوجية	25
7	الفضاءات المترية و مسلمات الفصل	36
8	قابلية العد في الفضاءات الطوبولوجية	47
9	مبرهنة رصُّ الكسندروف	50
10	التراص في الفضاءات المترية	53
11	تتمات	60
12	المراجع	70

(١) تمرينات في الفضاءات المترية

تمرين١:

ليكن (X,d) فضاءً متريّاً و $A \subseteq X$، و $p \in X$ بحيث p نقطة تراكم لـ A، عندئذٍ أيّ من العبارات الآتية صحيحة مع التّعليل؟

١) p نقطة داخلية لـ A.

٢) كلُّ جوار لـ p يلاقي A.

٣) p نقطة ملاصقة لـ A^c.

٤) $p \in A^c$ أو $p \in A$

٥) $p \in A - A^o$

الحل:

١) خاطئة، ليست بالضرورة نقطة داخلية وسنعطي مثالاً معاكساً: بأخذ المسافة المألوفة على $\mathbb{R}$

$$X = (\mathbb{R}, |\cdot|) \ , \ A = [0,1] \ , \ p = 0$$

إنَّ أي جوار لـ 0 يحوي مجالاً مفتوحاً مركزه 0 من النّمط $]-\varepsilon, \varepsilon[$ حيث $(\varepsilon > 0)$ والذي يتقاطع مع A في نقاط مختلفة عن الصّفر، أي:

$$(]-\varepsilon, \varepsilon[\cap A) - \{0\} \neq \phi$$

و بالتّالي $p = 0 \in A'$.

لكن $p = 0$ ليست نقطة داخلية لهذه المجموعة لأنَّه لايوجد مجال مفتوح مركزه الـ 0 محتوى بأكمله في A:

$$\forall \varepsilon > 0 :]-\varepsilon, \varepsilon[\not\subseteq A$$

٢) صحيحة، لأنَّ p نقطة تراكم فكلُّ جوار لها يلاقي المجموعة A في نقاط غير p أي أنَّه يلاقي A.

٣) خاطئة، والمثال المعاكس:

$$X = (\mathbb{R}, |\cdot|) \ , \ A = [-1,1] \ , \ p = 0$$

نلاحظ: أي جوار للصفر يتقاطع مع A بنقاط مغايرة للصفر، وبالتّالي $p = 0 \in A'$.

$$A^c =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

من الواضح أنَّ $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ جوار لـ 0 لكنه لا يتقاطع مع المجموعة A^c وبالتّالي 0 ليس نقطة ملاصقة لها.

٤) صحيحة، نعلم أنَّ $A \cup A^c = X$ ومن أجل أي نقطة $p \in X$ فإمّا $p \in A$ أو $p \in A^c$.

٥) خاطئة، والمثال المعاكس:

$$X = (\mathbb{R}, |\cdot|) \ , \ A = [-1,1] \ , \ p = 0$$

نلاحظ: أي جوار للصفر يتقاطع مع A بنقاط مغايرة للصفر بالتّالي $p = 0 \in A'$.

لمعرفة A^o نأخذ المجال نفسه بعد فتح أطرافه:

$$A^o =]-1,1[$$

ومنه

$$A - A^o = \{1, -1\}$$

ومن الواضح أن $p = 0 \notin A - A^o$.

تمرين ٢:

ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً، أثبت أن التّابع:

$$d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\longmapsto d(x,y)=|f(x)-f(y)|$$

١) يشكّل نصف مسافة على $\mathbb{R}$.

٢) في حال كان f متبايناً فإنَّ d يشكّل مسافة على $\mathbb{R}$.

الحل:

١) نعلم أن شروط نصف المسافة هي: من أجل كل $x,y,z\in\mathbb{R}$ تتحقق الشروط:

$$d(x,x)=0 \quad , \quad d(x,y)\geq 0$$
$$d(x,y)=d(y,x) \quad , \quad d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

لنتحقق منها:

$$d(x,x)=|f(x)-f(x)|=0$$
$$d(x,y)=|f(x)-f(y)|\geq 0$$
$$d(x,y)=|f(x)-f(y)|=|f(y)-f(x)|=d(y,x)$$
$$d(x,y)=|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(z)+f(z)-f(y)|$$
$$\leq |f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|=d(x,z)+d(z,y)$$

٢) لإثبات أن d تابع مسافة نحتاج إثبات الشرط الإضافي:

$$d(x,y)=0 \;\Rightarrow\; x=y$$

بما أن f متباين فهو يحقق:

$$f(x)=f(y)\;\Rightarrow\; x=y$$

ومنه:

$$d(x,y)=0\;\Rightarrow\;|f(x)-f(y)|=0\Rightarrow f(x)=f(y)\;\Rightarrow\; x=y$$

وهو المطلوب.

تطبيق على ماسبق:

بما أن التوابع $x\longmapsto e^x$, $x\longmapsto\sqrt[3]{x}$, $x\longmapsto x^5$ متباينةٌ على كامل $\mathbb{R}$ فإن التوابع الآتية تشكّل مسافةً على $\mathbb{R}$:

$$d_1(x,y)=|x^5-y^5|$$
$$d_2(x,y)=\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right|$$
$$d_3(x,y)=|e^x-e^y|$$

أما التوابع غير المتباينة على $\mathbb{R}$ الآتية $x\longmapsto\sin x$, $x\longmapsto x^2$ فهي تعطي أنصاف مسافة على $\mathbb{R}$:

$$d_1(x,y)=|x^2-y^2|$$
$$d_2(x,y)=|\sin x-\sin y|$$

لاحظ أنَّ التّابع:

$$f:[0,+\infty[\;\longrightarrow[0,+\infty[$$
$$x\longmapsto f(x)=x^2$$

متباين على منطلقه $[0,+\infty[$، ومنه:

$$d:[0,+\infty[\times[0,+\infty[\;\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$d(x,y)=|f(x)-f(y)|$$

مسافة على $[0,+\infty[$.

تمرين (يترك للطالب):

ليكن $(\mathbb{X},d)$ فضاءً نصف متري، لنعرّف علاقة تكافؤ $\sim$ على $\mathbb{X}$ كما يلي:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad d(x,y)=0$$

لنرمز لصف التّكافؤ بـِ $[x]=\{y\in\mathbb{X} \;:\; x\sim y\}$، وبـِ $\mathbb{X}/\sim$ لمجموعة صفوف التّكافؤ، لنعرّف على $\mathbb{X}/\sim$ الدّالة D كما يلي:

$$D([x],[y]) := d(x,y)$$

أثبت أنَّ $(\mathbb{X}/\sim,D)$ فضاء متري.

تمرين٣:

لأجل كرتين مفتوحتين $B(x_2,r_2)$, $B(x_1,r_1)$ في فضاء متري (X,d) بحيث:

$$D=B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)\neq\phi$$

١- هل التقاطع بالضرورة هو كرة مفتوحة؟

٢- لأجل $p\in D$ أثبت وجود $\varepsilon>0$ بحيث $B(p,\varepsilon)\subseteq D$.

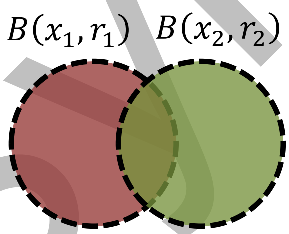
الحل:

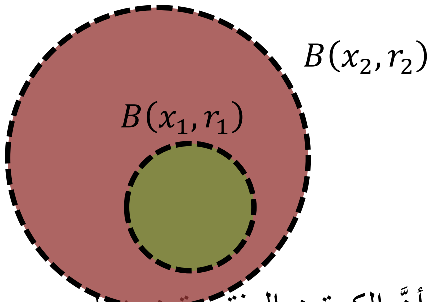
١- قد يكون كرةً مفتوحةً وقد لا يكون كرةً مفتوحةً، إذا عرّفنا المترك الإقليدي في $\mathbb{R}^2$:

$$x=(x_1,x_2) \quad y=(y_1,y_2): \quad d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

في الرسمة اليسرى واضح أن التقاطع ليس كرة مفتوحةً (قرصاً مفتوحاً) في $\mathbb{R}^2$.

في الرسمة اليمنى واضح أن التقاطع هو كرةٌ مفتوحةٌ (قرصٌ مفتوحٌ) في $\mathbb{R}^2$.





٢- بما أنَّ الكرتين المفتوحتين هما مجموعتان مفتوحتان (انظر البند (أ) من التّمرين ١٠) فالتّقاطع مجموعة مفتوحة وبالتّالي لأجل $p\in D$ يوجد $\varepsilon>0$ بحيث $B(p,\varepsilon)\subseteq D$. في الحقيقة يمكن تعيين قيمة تصلح لـ ε بالعلاقة:

$$\varepsilon=\min\{r_1-d(x_1,p),r_2-d(x_2,p)\}$$

حيث $r_i-d(x_i,p)$ هي المسافة بين p ومحيط الكرة i لأجل $i=1,2$.

تمرين٤:

ليكن (X,d) فضاءً متريّاً، و A مجموعة جزئية غير خالية، أثبت أن:

$$\bar{A}=\{x;d(x,A)=0\}$$

وهو تمرين في مقرَّر التّحليل التّابعي 1 انظر كتاب المدخل إلى التّحليل الدّالي وتطبيقاته صفحة ٣١ تمرين ١٠.

الحل:

نتذكر أن $d(x,A)$ هو المسافة بين نقطة ومجموعة ويعطى بـ:

$$d(x,A) = inf\ \{d(x,y)\,;y \in A\}$$

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \cap A \neq \phi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : d(x,a) < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\inf_{a \in A} d(x,a) = 0 \Leftrightarrow d(x,A) = 0$$

تمرين ٥:

ليكن $\mathcal{B}(X,Y)$ فضاء الدوال المحدودة من X الى Y حيث (Y,d) فضاء متري، أي:

$$\mathcal{B}(X,Y) = \left\{ f: X \longrightarrow Y \quad : \quad \delta\big(f(X)\big) = \sup_{x,y \in X} d\big(f(x),f(y)\big) < +\infty \right\}$$

حيث $\delta\big(f(X)\big)$ يرمز لقطر المدى الفعلي لـ f، أثبت أنَّ:

$$e: \mathcal{B}(X,Y) \times \mathcal{B}(X,Y) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$e(f,g) = sup\{\ d\big(f(x),g(x)\big)\,;\ x \in X\}$$

يعيّن متركاً على $\mathcal{B}(X,Y)$. (إنَّ e تابع معرَّف جيداً بسبب المحدودية)

البرهان:

مهما كانت $f,g,h \in \mathcal{B}(X,Y)$ فإنَّ:

$$\forall x \in X:\ d\big(f(x),g(x)\big) \geq 0\ \Rightarrow e(f,g) = sup\{\ d\big(f(x),g(x)\big)\,;\ x \in X\} \geq 0$$

$$e(f,g) = 0 \Leftrightarrow sup\{\ d\big(f(x),g(x)\big)\,;\ x \in X\} = 0 \Leftrightarrow d\big(f(x),g(x)\big) = 0, \forall\ x \in X$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall\ x \in X \Leftrightarrow f = g$$

خاصة التّناظر: بسيطة تُترك للطالب.

متراجحة المثلّث:

نريد إثبات

$$e(f,g) \leq e(f,h) + e(h,g)$$

بما أنَّ d تابع مسافة فإنَّ:

$$d\big(f(x),g(x)\big) \leq d\big(f(x),h(x)\big) + d\big(h(x),g(x)\big), \forall x \in X$$

بالتالي

$$d\big(f(x),g(x)\big) \leq sup\{d\big(f(x),h(x)\big)\,; x \in X\} + sup\{d\big(h(x),g(x)\big)\,; x \in X\}$$

$$= e(f,h) + e(h,g)$$

إذاً المقدار $e(f,h) + e(h,g)$ هو حد أعلى للمقدار $d\big(f(x),g(x)\big)$ لأجل كل $x \in X$.

وأصغر الحدود العليا هو sup بالتالي:

$$e(f,g) = sup\{d\big(f(x),g(x)\big)\,; x \in X\} \leq e(f,h) + e(h,g)$$

وهو المطلوب.

تمرين٦:

ليكن $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ تابعاً يحقق الشروط الثلاثة:

$$f(0)=0 \ , \ f \text{ متزايد تماماً } \ , \ f(x+y) \le f(x)+f(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^+$$

وليكن (X,d) فضاءً متريّاً، أثبت أن $(X, f\circ d)$ فضاء متري.

البرهان:

المقصود أثبت أن التابع التالي يشكل متركاً على X:

$$f\circ d: X\times X \to R$$
$$(x,y) \longmapsto f\circ d(x,y) = f\big(d(x,y)\big)$$

١) لتكن $x,y,z \in X$ ، بما أن d مترك فإن $d(x,y) \ge 0$ وبما أن f متزايد تماماً يكون:

$$f\big(d(x,y)\big) \ge f(0) = 0$$

٢) $x=y \Leftrightarrow d(x,y)=0 \Leftrightarrow f\big(d(x,y)\big)=0$ وذلك لأن كون f متزايد تماماً يجعله متبايناً.

٣) خاصة التناظر سهلة الإثبات.

٤) لدينا

$$d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$$

بالتالي:

$$f\big(d(x,y)\big) \le f\big(d(x,z)+d(z,y)\big)$$

ومن المتراجحة التي يحققها التابع f:

$$f\big(d(x,y)\big) \le f\big(d(x,z)+d(z,y)\big) \le f\big(d(x,z)\big)+f\big(d(z,y)\big)$$

وهو المطلوب.

تمرين٧:

ليكن $\mathbb{H}$ فضاء هلبرت:

١) لتكن G مجموعة ً غير خاليةٍ ومفتوحةً فيه، أثبت أنه توجد $x=(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ بحيث:

$$a_1 \neq 0$$

٢) ليكن $\mathbb{H}^*$ فضاءٌ جزئيٌّ يتألف من المتتاليات التي ينعدم أول حد منها، أثبت أن $\mathbb{H}^*$ مجموعةٌ مغلقةٌ.

٣) أثبت $\mathbb{H}^*$ هو مجموعة نادرة (أو غير كثيفة في أي مكان) أي: إنّ داخل اللصاقة مجموعةٌ خاليةٌ

$$(\overline{H^*})^o = \phi$$

الحل:

١) إن $\mathbb{H}$ هو فضاء المتتاليات العقدية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المحققة للشرط:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < +\infty$$

وكما درسنا في مقرّر التّحليل التابعيّ ١ أن المترك المألوف عليه يعطى بالصيغة:

$$x=(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , y=(b_n)_{n\in\mathbb{N}} : d(x,y) = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n-b_n|^2}$$

والآن بما أن G مفتوحة وغير خالية فإنَّه لأيّ $y=(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$ يوجد $r>0$ بحيث $B(y,r) \subseteq G$.

نميّز حالتين:
إذا كان $b_1 \neq 0$ فيتم المطلوب بأخذ $x = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G$.
إذا كان $b_1 = 0$ نعرّف:

$$a_n = \begin{cases} b_n \;; n \geq 2 \\ \dfrac{r}{2} \;; n = 1 \end{cases}$$

من الواضح أنَّ $x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{H}$ ولنثبت أنها عنصر من G:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|^2} = \sqrt{\left|\frac{r}{2} - 0\right|^2 + |b_1 - b_1|^2 + |b_2 - b_2|^2 + \cdots} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{r}{2} < r$$

بالتالي $x \in B(y,r) \subseteq G$ وهو المطلوب.

٢) لتكن $z = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{H}^*}$ ولنفرض جدلاً أن $c_1 \neq 0$ عندها نعرّف $r = \frac{|c_1|}{2}$ فنجد $B(z,r)$ هو جوارٌ لـ z لايتقاطع مع $\mathbb{H}^*$ لأن: إذا كان $y = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{H}^*$ فإن $b_1 = 0$

$$d(z,y) = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n - b_n|^2} \geq |c_1 - b_1| = |c_1| > r$$

إذاً هناك جوار لـ z لايتقاطع مع المجموعة $\mathbb{H}^*$ وهذا خلفٌ (تناقض) فالفرض أن $c_1 \neq 0$ خاطئ ومنه $c_1 = 0$ مما يبيّن أنّ $\overline{\mathbb{H}^*} \subseteq \mathbb{H}^*$ ، ومن المعلوم أن $\mathbb{H}^* \subseteq \overline{\mathbb{H}^*}$ مما يقتضي $\overline{\mathbb{H}^*} = \mathbb{H}^*$ فالمجموعة $\mathbb{H}^*$ مغلقة.

٣) لنفرض جدلاً أن $\mathbb{H}^*$ يملك نقطةً داخليةً فهو يحوي كرةً مفتوحةً مثل $B(x,r)$ حيث $x \in \mathbb{H}^*$ و $r > 0$، وحسب البند الأول من هذا التمرين: يوجد عنصر $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $B(x,r)$ بحيث $c_1 \neq 0$، وهذا غير ممكن فالفرض الجدلي خاطئ بأن $\mathbb{H}^*$ يملك نقطةً داخليةً، وهذا يوضح أنّ $(H^*)^o = (\overline{H^*})^o = \phi$

تمرين٨:

أثبت أن الشرطين التاليين لتابع $d: X \times X \to \mathbb{R}$ يكافئان الموضوعات الاربعة للمترك:

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x,y \in X$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$$

البرهان:

من الواضح أن الشرط الأول نفس موضوعة المترك الثانية، والشرط الثاني ينتج عن متراجحة المثلث وعن خاصة التناظر. أي أن تحقق موضوعات المترك الأربعة تقتضي تحقق هذين الشرطين.
لنثبت الآن أن تحقق الشرطين أعلاه يقتضي تحقق موضوعات المترك الأربعة: لتكن $x,y,z \in X$
لإثبات التناظر نضع $z = x$ في الشرط الثاني:

$$d(x,y) \leq d(x,x) + d(y,x) \Rightarrow d(x,y) \leq d(y,x)$$

بإعادة نفس العملية والتبديل بين x,y نجد $d(x,y) \geq d(y,x)$ ومنه

$$d(x,y) = d(y,x)$$

لإثبات الموضوعة الأولى:
نضع $x = y$ في الشرط الثاني:

$$d(x,x) \le d(x,z) + d(x,z) \Rightarrow 0 \le 2d(x,z) \Rightarrow 0 \le d(x,z) \ \ \forall x,z \in X$$

الموضوعة الثانية محققة لأنها نفس الشرط الأول.
وبالتالي بما أن $d(y,z) = d(z,y)$ نعوضها في الشرط الثاني فنجد متراجحة المثلث:

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$$

تمرين ٩:

أعط مثالاً توضح فيه أن لصاقة كرة مفتوحة $\overline{B(x,r)}$ ليست بالضرورة هي الكرة المغلقة $\bar{B}(x,r)$، ماذا تستنتج؟

البرهان:

باختيار $X = \mathbb{R}$ مع المسافة d المتقطعة نجد:

$$\overline{B(0,1)} = \overline{\{y \in \mathbb{R}; d(0,y) < 1\}} = \overline{\{0\}} = \{0\}$$

$$\bar{B}(0,1) = \{y \in \mathbb{R}; d(0,y) \le 1\} = \mathbb{R}$$ بينما

ونعلم أنَّ في فضاءٍ منظمٍ $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ تتطابق لصاقة الكرة المفتوحة التي مركزها x ونصف قطرها r مع الكرة المغلقة التي لها نفس المركز ونصف القطر، لذلك نستنتج أنَّ المترك المتقطع ليس مشتقاً من نظيم.

تمرين ١٠:

أثبت أنَّ في كلّ فضاء متري: (آ) كلَّ كرةٍ مفتوحةٍ هي مجموعةٌ مفتوحةٌ، (ب) كلَّ كرةٍ مغلقةٍ هي مجموعةٌ مغلقةٌ.

وهو تمرين في مقرَّر التّحليل التّابعي ١ انظر كتاب المدخل إلى التّحليل الدّالي وتطبيقاته صفحة ٣٠ تمرين 1.

الحل:

(آ) لنأخذ الكرة المفتوحة $B(a;r) = \{x \in \mathbb{X} \ : \ d(x,a) < r\}$ حيث $r > 0$.
ليكن $x_0 \in B(a;r)$ فإنَّ $r_0 = d(x_0,a) < r$.
لنأخذ الكرة المفتوحة $B\left(x_0;\frac{r-r_0}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{X} \ : \ d(x,x_0) < \frac{r-r_0}{2}\right\}$ حيث $\frac{r-r_0}{2} > 0$.
إنَّ $B\left(x_0;\frac{r-r_0}{2}\right) \subseteq B(a;r)$ وذلك لأنَّ:
إذا كان $y \in B\left(x_0;\frac{r-r_0}{2}\right)$ فإنَّ $d(y,x_0) < \frac{r-r_0}{2} < r - r_0$، وحسب متراجحة المثلّث:

$$d(y,a) \le d(y,x_0) + d(x_0,a) < r - r_0 + r_0 = r$$

أي $d(y,a) < r$ ومنه $y \in B(a;r)$.
تحوي الكرة المفتوحة $B(a;r)$ كرةً مفتوحةً $B\left(x_0;\frac{r-d(x_0,a)}{2}\right)$ حول كلِّ نقطة x_0 فيها، وبالتّالي $B(a;r)$ مجموعةٌ مفتوحةٌ.

(ب) لنأخذ الكرة المغلقة $\bar{B}(a;r) = \{x \in \mathbb{X} \ : \ d(x,a) \leq r\}$ حيث $r > 0$.

ليكن $x_0 \in \left(\bar{B}(a;r)\right)^c$ فإنَّ $r_0 = d(x_0,a) > r$.

لنأخذ الكرة المفتوحة $B\left(x_0;\frac{r_0-r}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{X} \ : \ d(x,x_0) < \frac{r_0-r}{2}\right\}$ حيث $\frac{r_0-r}{2} > 0$.

إنَّ $B\left(x_0;\frac{r_0-r}{2}\right) \subseteq \left(\bar{B}(a;r)\right)^c$ وذلك لأنَّ:

إذا كان $y \in B\left(x_0;\frac{r_0-r}{2}\right)$ فإنَّ $d(y,x_0) < \frac{r_0-r}{2} < r_0 - r$ ومنه $-d(y,x_0) > -r_0 + r$.

حسب متراجحة المثلث:

$$d(x_0,a) \leq d(x_0,y) + d(y,a)$$
$$\Longrightarrow \quad d(y,a) \geq d(x_0,a) - d(x_0,y) = r_0 - d(x_0,y) > r_0 - r_0 + r = r$$

أي $d(y,a) > r$ ومنه $y \in \left(\bar{B}(a;r)\right)^c$.

تحوي المجموعة $\left(\bar{B}(a;r)\right)^c$ كرةً مفتوحةً $B\left(x_0;\frac{d(x_0,a)-r}{2}\right)$ حول كلِّ نقطة x_0 فيها، لذا $\left(\bar{B}(a;r)\right)^c$ مجموعةٌ مفتوحةٌ وبالتّالي $\bar{B}(a;r)$ مجموعةٌ مغلقةٌ.

الفضاء فوق المتري Ultrametric Space:

هو ثنائيةٌ (X,d) بحيث X مجموعة غير خالية و $d: X \times X \to \mathbb{R}$ يحقق الموضوعات التالية:

$\forall x,y,z \in X$:
$d(x,y) \geq 0$
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$d(x,y) = d(y,x)$
$d(x,y) \leq max\{d(x,z), d(z,y)\}$

وعندها ندعو d فوق مسافة على X.

ملاحظة : إن كل تابع فوق مسافة هو مسافة (أثبت ذلك).

أمثلة:

- ليكن (X,d) فضاءً مترياً حيث d هو المترك المتقطع، إن d يشكل فوق مسافة على X (أثبت ذلك).
- **المسافة المنسوبة لعدد أولي p: (P-Adic Numbers)**

ليكن p عدداً أولياً، وليكن $b \in \mathbb{Q}^*$، يُبرهن على أن b يكتب بشكل وحيد كما يلي:

$$b = \frac{r}{s}.p^n \ ; \quad r,s,n \in \mathbb{Z}\,, \quad p \nmid s\,, p \nmid r$$

(حيث $p \nmid s$ تعني p لا يقسم s).

وعندها ندعو n بمرتبة العدد b بالنسبة لـ p، ونرمز لذلك: $ord_p(b) = n$

نعرّف نظيم $b \in \mathbb{Q}$ المنسوب لعدد أولي p بالصيغة:

$$|b|_p = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{ord_p(b)}} & ; \ b \in \mathbb{Q}^* \\ 0 & ; \ b = 0 \end{cases}$$

ويُبرهن على أن التابع:

$$|\cdot|_p: \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto |x-y|_p$$

هو فوق مسافة على $\mathbb{Q}$.

- وإليك مثالاً عن فضاءٍ متريٍّ وليس فوق متري، الفضاء $(\mathbb{R},|\cdot|)$ هو فضاءٌ متري كمان نعلم، لنثبت أنه لا يحقق الشرط الرابع من موضوعات فوق المسافة:

$$x=0\,,y=4\,,z=2$$
$$|4-0|=4\,,|2-0|=2\,,|4-2|=2$$

لكن

$$|4-0| \nleq max\{|2-0|,|4-2|\}=max\{2,2\}=2$$

مبرهنة:

ليكن (X,d) فضاءً فوق متري فإن:

.i كل ثلاث نقاط مختلفة فيه تشكل مثلثاً متساوي الساقين!
.ii كل كرةٍ مفتوحةٍ هي مجموعةٌ مغلقةٌ (وهي مجموعةٌ مفتوحةٌ أيضاً)
.iii كل كرةٍ مغلقةٍ هي مجموعةٌ مفتوحةٌ (وهي مجموعةٌ مغلقةٌ أيضاً)
.iv إذا كانت A كرةً مفتوحةً أو مغلقةً فإن كل نقطةٍ من نقاطها تصلح مركزاً لها.

البرهان:

.i من أجل ثلاث نقاط مختلفة x,y,z من الفضاء: إذا كان $d(x,y)=d(x,z)$ يتم المطلوب.
بفرض (دون إنقاص العمومية) $d(x,y)>d(x,z)$ سوف نثبت أن

$$d(z,y)=d(x,y)$$

من الموضوعة الرابعة:

$$d(z,y)\le \max\{d(z,x),d(x,y)\}=d(x,y)$$

وأيضاً

$$d(x,y)\le \max\{d(x,z),d(z,y)\}=d(z,y)$$

لأننا لو فرضنا $d(x,y)\le \max\{d(x,z),d(z,y)\}=d(x,z)$ لكان هذا مناقضاً للفرض.
ومن المتراجحتين اللتين أثبتناهما للتو نجد: $d(z,y)=d(x,y)$
(لاحظ أننا أثبتنا أن $d(z,y)$ تساوي أكبر المسافتين (x,y) , $d(x,z)$)

.ii لتكن $B(x,r)$ كرةً مفتوحةً في الفضاء ولنرمز لمتممتها بـ S، يكفي إثبات أن S مجموعةٌ مفتوحةٌ.
لتكن $y\in S$ نميّز حالتين:

$\rho=d(x,y)>r$ عندها $B\left(y,\frac{\rho-r}{2}\right)\subseteq S$.

$\rho=d(x,y)=r$ عندها لتكن $z\in B\left(y,\frac{r}{2}\right)\setminus\{y\}$ عندها تكون النقاط x,y,z مختلفة ولكون $d(x,y)>\frac{r}{2}>d(y,z)$ فحسب البند الأول من المبرهنة يكون: $d(x,z)=d(x,y)=r$
وبالتالي $z\notin B(x,r)$ ومنه $z\in S$ مما يبين أن $B\left(y,\frac{r}{2}\right)\subseteq S$.
مما سبق في كلتا الحالتين يكون العنصر الاختياري y داخلي في S بالتالي هي مجموعة مفتوحة.

.iii لتكن $M=\bar{B}(x,r)$ كرة مغلقة في الفضاء، ليكن $y\in M$ نميّز حالتين:

$\rho=d(x,y)<r$ عندها $B\left(y,\frac{r-\rho}{2}\right)\subseteq M$.

لتكن $\rho = d(x,y) = r$ عندها تكون النقاط x, y, z مختلفة ولكون $z \in B\left(y,\frac{r}{2}\right)\setminus\{y\}$
$d(x,y) > \frac{r}{2} > d(y,z)$ فحسب البند الأول من المبرهنة يكون: $d(x,z) = d(x,y) = r$
وبالتالي $z \in M = \bar{B}(x,r)$ مما يبين أن $B\left(y,\frac{r}{2}\right) \subseteq M$.
مما سبق في كلتا الحالتين يكون العنصر الاختياري y داخلي في M بالتالي هي مجموعة مفتوحة.

iv. سنورد البرهان لأجل كرة مفتوحة وبالمثل لأجل الكرة المغلقة.
لتكن $B(a,\varepsilon)$ كرةً مفتوحةً في الفضاء فوق المتري $(\mathbb{X},d)$، أي:
$$B(a,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{X} \quad : \quad d(y,a) < \varepsilon\}$$
لتكن $b \in B(a,\varepsilon)$ فإنَّ $d(b,a) < \varepsilon$، ولنبرهن أنَّ $B(a,\varepsilon) = B(b,\varepsilon)$.
لتكن $x \in B(b,\varepsilon)$ فإنَّ $d(x,b) < \varepsilon$، ومنه:
$$d(x,a) \leq max\{d(x,b), d(b,a)\} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad x \in B(a,\varepsilon)$$
ومنه $B(b,\varepsilon) \supseteq B(a,\varepsilon)$ بشكل مشابه نبرهن أنَّ $B(a,\varepsilon) \subseteq B(b,\varepsilon)$.
وبالتّالي:
$$B(a,\varepsilon) = B(b,\varepsilon) \quad : \quad \forall b \in B(a,\varepsilon)$$
وهو المطلوب.

(٢) الفضاءات التّبولوجيّة – تعريفات أساسيّة

فيما يلي سنتناول ما ورد في الفصل الخامس، من كتاب التّبولوجيا من سلسلة شوم من فقراتٍ مهمّةٍ أو أمثلة أو تمرينات تخدم مقرَّر التّبولوجيا (2).

(1) الفضاءات التّبولوجيّة:

لتكن $\mathbb{X}$ أو $\mathbb{E}$ أو $\mathbb{S}$ مجموعةً ما غيرَ خاليةٍ، و $\mathcal{P}(\mathbb{X}) = 2^{\mathbb{X}}$ مجموعة أجزاء $\mathbb{X}$، و $\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ جماعةً أو أسرةً أو صفّاً من أجزاء $\mathbb{X}$. نقولُ عن τ إنَّها تعيّن على $\mathbb{X}$ بنية تبولوجيّة أو إنَّها تبولوجيا على $\mathbb{X}$ إذا وفقط إذا حقّقت الشّروط الآتية:

(ط1) $\phi , \mathbb{X} \in \tau$.

(ط2) تقاطع عنصرين من τ هو عنصر من τ.

(ط3) أيُّ اتحادٍ لعناصر من τ هو عنصر من τ.

عندئذٍ نُسمّي الثّنائية $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً تبولوجيّاً، ونُسمّي كلَّ عنصرٍ من $\mathbb{X}$ نقطةً فيه وكلَّ عنصرٍ من τ مفتوحةً فيه.

(1.1) مثال (1):

صفُّ المجالات المفتوحة والمحدودة في $\mathbb{R}$ من النّمط $]a, b[$ ليس تبولوجيا على $\mathbb{R}$، ولكن صفُّ المجموعات τ التي كل منها اتحاد لمجالاتٍ مفتوحةٍ هي تبولوجيا على $\mathbb{X}$، نسمّيها التّبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$.

(2.1) مثال (2):

خُذْ $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$ نلاحظ أنَّ $\tau_1 = \{\phi, \mathbb{X}, \{1\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4,5\}\}$ تبولوجيا على $\mathbb{X}$ لكن $\tau_2 = \{\phi, \mathbb{X}, \{1\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$ ليست تبولوجيا على $\mathbb{X}$.

(3.1) مثال (3):

خُذْ $\mathbb{X}$ أيَّ مجموعةٍ غيرِ خاليةٍ و $\mathcal{D} = \mathcal{P}(\mathbb{X})$. إنَّ $\mathcal{D}$ تبولوجيا على $\mathbb{X}$، تُسمَّى التّبولوجيا المتقطعة (أو الملساء) على $\mathbb{X}$، ويُسمَّى $(\mathbb{X}, \mathcal{D})$ الفضاء التّبولوجي المتقطع.

(4.1) مثال (4):

خُذْ $\mathbb{X}$ أيَّ مجموعةٍ غيرِ خاليةٍ و $\mathcal{G} = \{\phi, \mathbb{X}\}$. إنَّ $\mathcal{G}$ تبولوجيا على $\mathbb{X}$، تُسمَّى التّبولوجيا الخشناء على $\mathbb{X}$ أو

التّبولوجيا التّافهة على $\mathbb{X}$.

(5.1) مثال (5):

خُذْ $\mathbb{X}$ أيَّ مجموعةٍ غيرِ خاليةٍ و $\tau_{cf} = \{A \subseteq \mathbb{X} \ : \ A = \phi \ \ or \ \ A^c$ مجموعة منتهية$\}$. إنَّ τ_{cf} تبولوجيا على $\mathbb{X}$، تُسمَّى تبولوجيا المتممات المنتهية.

(6.1) مثال (6):

خُذْ $\mathbb{X} = \{a, b\}$ و $\tau_a = \{\phi, \mathbb{X}, \{a\}\}$. إنَّ τ_a تبولوجيا على $\mathbb{X}$، تُسمَّى تبولوجيا سيربنسكي على $\mathbb{X}$.

(7.1) مثال (7):

تقاطع تبولوجيتين τ_1 و τ_2 على مجموعةٍ $\mathbb{X}$ ولنرمز له بِـ $\tau_1 \cap \tau_2$ تبولوجيا على $\mathbb{X}$.

ويمكن تعميم المثال السّابق فنحصل على المبرهنة الآتية:

(8.1) مبرهنة أساسيّة:

إذا كانت $\{\tau_\alpha : \alpha \in L\}$ جماعةً من التّبولوجيات على $\mathbb{X}$ كان تقاطعُها $\tau = \bigcap_{\alpha \in L} \tau_\alpha$ تبولوجيا على $\mathbb{X}$.

(9.1) ملاحظة مهمّة:

اتحاد تبولوجيتين على $\mathbb{X}$ ليس بالضّرورة تبولوجيا على $\mathbb{X}$. مثال ذلك:

خُذْ $\mathbb{X} = \{a, b, c, d\}$ و $\tau_a = \{\phi, \mathbb{X}, \{a\}\}$ و $\tau_b = \{\phi, \mathbb{X}, \{b\}\}$، عندئذٍ سترى أنَّ τ_a تبولوجيا على $\mathbb{X}$ وكذلك τ_b ولكن $\tau_a \cup \tau_b = \{\phi, \mathbb{X}, \{a\}, \{b\}\}$ ليست تبولوجيا على $\mathbb{X}$.

(2) الجوارات:

نُسمّي جواراً لنقطةٍ p في فضاء تبولوجي $(\mathbb{X}, \tau)$ أَيّة مجموعة V تحقّق ما يلي:

$$\exists \mathcal{O} \in \tau \quad : \quad p \in \mathcal{O} \subseteq V$$

أي إذا وفقط إذا حوت V مجموعةً مفتوحةً تحوي $\{p\}$. فإذا كان $V \in \tau$ أيضاً سُمِيَتْ V جواراً مفتوحاً لِـ p.

(1.2) مثال (1):

المجال $V =]0,1]$ جوار لِـ $p = \frac{1}{2}$ لأَنَّهُ توجد $\mathcal{O} = \left]0, \frac{3}{4}\right[$ بحيث

$$p = \frac{1}{2} \in \mathcal{O} = \left]0, \frac{3}{4}\right[\subseteq V =]0,1]$$

لكن V ليست جواراً لـِ $q = 1$ (لماذا؟).

(2.2) مثال (2):

خُذْ المثال في (2.1) و $(\mathbb{X}, \tau_1)$ إنَّ صفَّ الجوارات المفتوحة لـِ 1 هو $\mathcal{V}_1 = \{\mathbb{X}, \{1\}, \{1,3,4\}\}$

لاحظ أنَّ $V = \{1,5\}$ جوارٌ لـِ 1 لكنّه ليس مجموعةً مفتوحةً.

ومن ثمَّ عيّن صفَّ الجوارات المفتوحة لكلّ عنصرٍ من عناصر $\mathbb{X}$:

$$\mathcal{V}_2 = \{\mathbb{X}, \{2,3,4,5\}\} \qquad \mathcal{V}_3 = \{\mathbb{X}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4,5\}\}$$

$$\mathcal{V}_4 = \{\mathbb{X}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4,5\}\} \qquad \mathcal{V}_5 = \{\mathbb{X}, \{2,3,4,5\}\}$$

(3.2) مثال (3):

خُذْ المثال في (3.1) و $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ و $\tau = \mathcal{D} = \mathcal{P}(\mathbb{X})$ وعيّن $\mathcal{V}_1$ ثمّ $\mathcal{V}_2$ و $\mathcal{V}_3$.

$$\mathcal{V}_1 = \{\mathbb{X}, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$$

(4.2) مثال (4):

خُذْ المثال في (4.1) و $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ و $\tau = \mathcal{G} = \{\phi, \mathbb{X}\}$ نجد أنَّ: $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_3 = \{\mathbb{X}\}$

(3) النّقطة الحدّية لمجموعة:

في فضاءٍ تبولوجي $(\mathbb{X}, \tau)$ نقولُ عن نقطةٍ $p \in \mathbb{X}$ إنَّها نقطةٌ حدّيةٌ $(limit\ point)$ للمجموعة $A \subseteq \mathbb{X}$ إذا تحقّق أحد الشّرطين المتكافئين:

(أ) كلُّ جوارٍ لـِ p يشتركُ مع المجموعة A بنقطةٍ واحدةٍ على الأقل مثل q مختلفة عن p.

(ب) كلُّ مجموعةٍ مفتوحةٍ تحوي p تشتركُ مع A بنقطةٍ واحدةٍ على الأقل مثل q مختلفة عن p.

سنرمز بـِ A' لمجموعة النّقاط الحدّية لـِ A ونسميها المجموعة المشتقة لـِ A.

ملاحظة:

للنقطة الحدّية تسمياتٌ أُخرى: نقطة تجمع لـِ A، نقطة تراكم لـِ A، نقطة نهاية لـِ A.

(1.3) مثال (1):

خُذْ المثال في (2.1) و $(\mathbb{X}, \tau_1)$ و $A = \{1,2,3\}$ هل $3 \in A'$؟ هل $5 \in A'$؟ هل $A' = \{2,4,5\}$؟

(2.3) مثال (2):

خُذْ $\mathbb{X} = \mathbb{N}$ و $\tau = \tau_{cf}$ و $A = \{2,3,5,7\}$ مجموعة الأعداد الأولية التي تصغر العدد 10 هل $A' = \phi$؟

خُذْ $B = \{2,4,6,8, \dots\}$ هل $B' = \phi$؟ هل $B \subseteq B'$؟ هل $B' = \mathbb{N}$؟

(4) المجموعات المغلقة:

نقولُ عن مجموعةٍ $A \subseteq \mathbb{X}$ المزوَّدة بتبولوجيا τ إنَّها مغلقةٌ في الفضاء التّبولوجي $(\mathbb{X}, \tau)$ إذا وفقط إذا حقّقت أحد الشّرطين المتكافئين:

(أ) $A' \subseteq A$.

(ب) A^c مجموعةٌ مفتوحةٌ.

عيّن جميع المجموعات المغلقة في (2.1) و (2.3).

(5) المفاهيم الأساسيّة:

لصاقة مجموعة A رمزها $cl(A) = \bar{A}$.

داخل مجموعة A رمزها $int(A) = A^{\circ}$.

جبهة مجموعة A رمزها $\partial A = Fr(A)$.

مجاورة أو جوار مجموعة A: V_A في فضاء تبولوجي.

جملة جوارات مجموعة أو مجموعة جوارات مجموعة: هي صفُّ جميع جوارات A.

(أ) أصغر مجموعة مغلقة تحوي المجموعة A هي $\bar{A} = A \cup A'$.

أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في المجموعة A هي A°.

$Fr(A) = \bar{A} - A^{\circ} = \bar{A} \cap \overline{A^c}$.

نُسمّي مجاورة لِـ A، V_A، أي مجموعة تحوي مجموعة مفتوحة $\mathcal{O}$ تحوي A، أي:

$$\exists \mathcal{O} \in \tau \quad : \quad A \subseteq \mathcal{O} \subseteq V_A$$

(ب) كلُّ جوارٍ لِـ x يلاقي $A \Leftrightarrow x \in \bar{A}$، x نقطةٌ ملاصقةٌ لِـ A.

A جوارٌ لِـ $x \Leftrightarrow x \in A^{\circ}$.

كلُّ جوارٍ لِـ x يلاقي A ويلاقي $A^c \Leftrightarrow x \in Fr(A)$.

V_A جوارٌ لِـ $A \Leftrightarrow V_A$ جوارٌ لكلّ نقطةٍ من نقاط A.

مثال:

خُذْ المثال في (2.1) و $A=\{1,2,3\}$. وعيّن $\bar{A}$، A°، $Fr(A)$، وجوارات A المفتوحة.

خُذْ $\mathbb{X}=\mathbb{R}$ و τ التّبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$ و $A=\{-8\}\cup]0,5]\cup[7,10]$. وعيّن $\bar{A}$، A°، $Fr(A)$.

(6) ثلاث مبرهنات خطيرة:

(1.6) إذا كان $(\mathbb{X},\tau)$ أيَّ فضاءٍ تبولوجي، و A و B أيَّ مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{X}$، و

$$cl:\mathcal{P}(\mathbb{X})\longrightarrow\mathcal{P}(\mathbb{X})$$
$$E\longmapsto cl(E)=\bar{E}$$

عندئذٍ:

(1) $\bar{\phi}=\phi$ و $\bar{\mathbb{X}}=\mathbb{X}$.

(2) $A\subseteq\bar{A}$.

(3) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

(4) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$.

(5) A مغلقة $\Leftrightarrow A=\bar{A}$.

(2.6) إذا كان $(\mathbb{X},\tau)$ أيَّ فضاءٍ تبولوجي، و A و B أيَّ مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{X}$، و

$$int:\mathcal{P}(\mathbb{X})\longrightarrow\mathcal{P}(\mathbb{X})$$
$$E\longmapsto int(E)=E^{\circ}$$

عندئذٍ:

(1) $\phi^{\circ}=\phi$ و $\mathbb{X}^{\circ}=\mathbb{X}$.

(2) $A^{\circ}\subseteq A$.

(3) $(A\cap B)^{\circ}=A^{\circ}\cap B^{\circ}$.

(4) $A^{\circ\circ}=A^{\circ}$.

(5) A مفتوحة $\Leftrightarrow A=A^{\circ}$.

(3.6) إذا كان $(\mathbb{X},\tau)$ أيَّ فضاءٍ تبولوجي، و $p\in\mathbb{X}$ و $\mathcal{A}_p$ جماعة جميع جوارات p، وإذا كان:

$$\mathcal{V}:p\longrightarrow\mathcal{A}_p\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{X})$$

فإنَّ:

(1) $\mathcal{A}_p \neq \phi$ و $\phi \notin \mathcal{A}_p$.

(2) تقاطع عنصرين من $\mathcal{A}_p$ هو عنصرٌ من $\mathcal{A}_p$.

(3) أيُّ مجموعةٍ جزئيةٍ من $\mathbb{X}$ تحوي عنصراً من $\mathcal{A}_p$ تنتمي إلى $\mathcal{A}_p$.

(4) أيُّ جوارٍ V لِـ p سيحوي جواراً أخر W لِـ p ويكون V جواراً لكلّ نقطة من نقاطه.

(٣) تمرينات مختارة ومحلولة من شوم وأُخرى غير محلولة:

صفحة $(75 + 77)$:

$(10 + 19)$ لتكن $\mathbb{X} = \mathbb{N}$ و $\tau = \{\phi\} \cup \{E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} \ : \ n \in \mathbb{X}\}$، والمطلوب:

(1) هل τ تبولوجيا على $\mathbb{N}$ ؟

(2) ما هي الجوارات المفتوحة للنقطة $p = 6$ ؟

(3) خُذْ $A = \{4,13,28,37\}$ حدّد A'.

(4) عيّن جميع المغلقات في الفضاء التّبولوجي $(\mathbb{N}, \tau)$.

(5) حدّد لصاقة $B = \{7,24,47,85\}$ و $C = \{3,6,9,12, \dots\}$.

صفحة (84):

(53) اذكر جميع التّبولوجيات الممكن تعريفها على المجموعة $\mathbb{X} = \{a, b\}$.

(64) لتكن $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ و $\tau_{+\infty} = \{\phi, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\ : \ a \in \mathbb{R}\}$، والمطلوب:

(1) توثّق من أنَّ $\tau_{+\infty}$ تبولوجيا على $\mathbb{R}$.

(2) خُذْ $A_1 = [4,10[$، $A_2 = \mathbb{Z}$، $A_3 = [4, +\infty[$ و $A_4 =]-\infty, 4[$، حدّد $\overline{A_i}$، A'_i و $\overset{\circ}{A_i}{}'$ حيث $(i = 1,2,3,4)$.

صفحة (85):

(66) لتكن τ_1 و τ_2 تبولوجيتين على $\mathbb{X}$، ولنفرض أنَّ $\tau_1 \subseteq \tau_2$، ولتكن $A \subseteq \mathbb{X}$، والمطلوب:

(1) برهن أنَّهُ إذا كانت $x \in A'$ في $(\mathbb{X}, \tau_2)$ فإنَّ $x \in A'$ في $(\mathbb{X}, \tau_1)$.

(2) أعطِ مثالاً يبيّن أنَّ الإقتضاء العكسي ليس بالضّرورة صحيحاً.

$(69 + 70)$ ليكن $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً تبولوجيّاً، و A و B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{X}$، و $\mathcal{O} \in \tau$، والمطلوب برهن أنَّ:

(1) $\overline{A} - \overline{B} \subseteq \overline{A - B}$.

(2) $\mathcal{O} \cap \overline{B} \subseteq \overline{\mathcal{O} \cap B}$.

الشّبكات وتقاربها في فضاءٍ تبولوجي:

المجموعة الموجهة:

نقولُ عن مجموعةٍ A مزوَّدةٍ بعلاقة ترتيب (جزئي) $(A,\leq)$ إنَّها موجهةٌ إلى اليمين أو موجهةٌ إختصاراً إذا وفقط إذا:

$$\forall \alpha,\beta \in A \quad \exists \gamma \in A \quad : \quad \alpha \leq \gamma \quad and \quad \beta \leq \gamma$$

أمثلة:

$(\mathbb{R},\leq)$، $(\mathbb{Z},\leq)$، $(\mathbb{N}^*,|)$ حيث $a|b$ تعني أنَّ b مضاعفٌ لِـ a أو a قاسمٌ لِـ b.

$(A,\leq)\times(A',\leq')=(A\times A',\ll)$ (لا نقصد بِـ A' المجموعة المشتقة لِـ A) حيث أنَّ:

$$(a,a')\ll(b,b')\Leftrightarrow a\leq b \; and \; a'\leq' b'$$

الشّبكة في $\mathbb{X}$:

أيُّ تطبيق منطلقه مجموعة موجهة $(A,\leq)$ ومستقره $\mathbb{X}$، أي:

$$(A,\leq)\xrightarrow{x}\mathbb{X}$$
$$\alpha \longmapsto x(\alpha)=x_\alpha$$

ويرمزلها بِـ $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.

تقارب الشّبكة في فضاء تبولوجي:

لتكن $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ شبكةً من عناصر $\mathbb{X}$ المزوَّدة بالتّبولوجيا τ و $\mathcal{L}\in\mathbb{X}$، سنكتب $x_\alpha\longrightarrow\mathcal{L}$ أو $lim(x_\alpha)=\mathcal{L}$ أو إنَّ الشّبكة $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ متقاربةٌ من $\mathcal{L}$ إذا وفقط إذا:

كلُّ مفتوحةٍ تحوي $\mathcal{L}$ ستحوي جميع العناصر x_α بدءاً من رتبةٍ معيَّنةٍ، أعني بذلك:

$$\forall \mathcal{O}\in\mathcal{V}_{\mathcal{L}} \quad \exists \alpha_0\in A \quad : \quad \alpha\geq\alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad x_\alpha\in\mathcal{O}$$

النّهاية العُليا و الدُّنيا لشبكة في $\mathbb{R}$:

لتكن $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ شبكةً محدودةً في $\mathbb{R}$ أعني يوجد $b>0$ بحيث أنَّ $|x_\alpha|\leq b$ لكلّ $\alpha\in A$.

سنضع:

$$\underline{lim}(x_\alpha)=\sup_{\alpha}\inf_{\beta\geq\alpha}x_\beta \qquad \overline{lim}(x_\alpha)=\inf_{\alpha}\sup_{\beta\geq\alpha}x_\beta$$

ونسمّيها النّهاية العُليا والنّهاية الدُّنيا للشبكة المعطاة $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.

(٤) القواعد والقواعد الجزئية

تعريف (1):

$\mathcal{B}$ قاعدة للتبولوجيا τ المعرَّفة على $\mathbb{X} \Leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq \tau$ وكلُّ عنصرٍ من τ هو اتحادٌ لعناصر من $\mathcal{B}$.

ويُسمَّى كلُّ عنصرٍ من $\mathcal{B}$ مجموعةً مفتوحةً أساسيّةً في $\mathbb{X}$ أو في الفضاء $(\mathbb{X}, \tau)$.

تعريف (2):

$\mathcal{S}$ قاعدة جزئية للتبولوجيا τ المعرَّفة على $\mathbb{X} \Leftrightarrow \mathcal{S} \subseteq \tau$ وصفُّ التّقاطعات المنتهية لعناصر $\mathcal{S}$، ولنسميه $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$، قاعدةٌ للتبولوجيا τ.

لاحظ أنَّ $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}} \Leftrightarrow$ توجد $S_1, S_2, \dots, S_n$ من $\mathcal{S}$ وبحيث $A = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n$.

أمثلة:

خُذْ $\mathbb{X} = \mathbb{R}$.

(1) صفُّ المجالات المفتوحة هو قاعدة للتبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$.

(2) صفُّ المجالات التي من النّمط $]a, +\infty[$ أو $]-\infty, b[$ هو قاعدة جزئية للتبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$.

(3) صفُّ المجموعات وحيدة العنصر $\{\{x\} \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ هو قاعدة للتبولوجيا الملساء على $\mathbb{R}$.

(4) الصفُّ $\{\mathbb{R}, \phi\}$ هو قاعدة للتبولوجيا الخشناء على $\mathbb{R}$.

(5) صفُّ المجالات من النّمط $]a, b]$ ليس قاعدةً للتبولوجيا المألوفة على $\mathbb{R}$.

مبرهنة:

(1) إذا كانت $\mathcal{B}$ جماعةً من أجزاء مجموعةٍ غيرِ خاليةٍ $\mathbb{X}$، مغلقةً بالنّسبة للتقاطع وتغطي $\mathbb{X}$، فإنَّ صفَّ المجموعات τ التي كلّ منها اتحاد لعناصر من $\mathcal{B}$ هو تبولوجيا على $\mathbb{X}$ (وتكون $\mathcal{B}$ قاعدةً لها).

(2) إذا كانت $\mathcal{B}$ جماعةً من أجزاء مجموعةٍ غيرِ خاليةٍ $\mathbb{X}$، تغطي $\mathbb{X}$ وكان تقاطع كلّ عنصرين منها اتحاداً لعناصر من $\mathcal{B}$، فإنَّ صفَّ المجموعات τ التي كلّ منها اتحاد لعناصر من $\mathcal{B}$ هو تبولوجيا على $\mathbb{X}$ (وتكون $\mathcal{B}$ قاعدةً لها).

(3) كلُّ تبولوجيا τ على $\mathbb{X}$ هي قاعدةٌ لـِ τ.

(٥) فضاءات الجداء

أوّلاً- مبرهنة وتعريف:

لتكن $(\mathbb{X}_i,\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ متتاليةً من الفضاءات التّبولوجيّة و $\mathbb{X}=\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{X}_i$، و

$$\mathcal{B}=\left\{\prod_{i\in\mathbb{N}}A_i \;:\; \begin{array}{c} A_i=\mathbb{X}_i \text{ من أجل جميع قيم } i \text{ ما خلا منتهياً منها} \\ A_i\in\tau_i \quad i\in\mathbb{N} \quad \text{و} \end{array}\right\}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{X})$$

قاعدة لتبولوجيا τ على $\mathbb{X}$ نُسميها التّبولوجيا الجداء على $\mathbb{X}$.

حالة خاصّة:

$$\mathbb{X}=\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2\times\ldots\times\mathbb{X}_n$$

$$\mathcal{B}=\{\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2\times\ldots\times\mathcal{O}_n \;\;,\;\; \mathcal{O}_i\in\tau_i \;\; i\in\{1,2,..,n\}\}$$

فإنَّ $\mathcal{B}$ قاعدة لتبولوجيا τ على $\mathbb{X}$ نُسميها التّبولوجيا الجداء على $\mathbb{X}$ أو جداء التّبولوجيات على $\mathbb{X}$.

من أجل $n=2$ نجد:

$$\mathbb{X}=\mathbb{X}_1\times\mathbb{X}_2$$

$$\mathcal{B}=\{\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2 \;\;,\;\; \mathcal{O}_i\in\tau_i \;\; i\in\{1,2\}\}$$

قاعدة لتبولوجيا الجداء و يُسمَّى $\mathcal{O}_1\times\mathcal{O}_2$ مستطيلاً مفتوحاً في $\mathbb{X}$.

سؤال :

$$A=A_1\times A_2 \overset{?}{\Rightarrow} \bar{A}=\overline{A_1}\times\overline{A_2}$$

$$A=A_1\times A_2 \overset{?}{\Rightarrow} \mathring{A}=\mathring{A_1}\times\mathring{A_2}$$

برّر إجابتك؟

لاحظ أنَّ $V=V_1\times V_2\in\mathcal{V}_{(x_1,x_2)}$ إذا كان $V_i\in\mathcal{V}_{x_i}$.

ثانياً- توابع الإسقاط مستمرة؟؟؟

$$pr_i:\mathbb{X}\longrightarrow\mathbb{X}_i$$

$$x=(x_1,x_2,..)\longmapsto x_i$$

ثالثاً- الفضاءات الجزئية:

ليكن $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً تبولوجيّاً و $\phi \neq A \subseteq \mathbb{X}$ إنَّ $\tau_A = \{\mathcal{O} \cap A \ : \ \mathcal{O} \in \tau\}$ تبولوجيا على A ونُسمّي (A,τ_A) الفضاء التّبولوجي الجزئي من $(\mathbb{X},\tau)$ و τ_A التّبولوجيا النّسبيّة على A.

مبرهنة كوراتوفسكي

صفحة (14)

مبرهنة (5):

لتكن $\mathbb{X}$ مجموعةً ما غيرَ خاليةٍ، وليكن $\mathcal{K}: \mathcal{P}(\mathbb{X}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{X})$ تطبيقاً لمجموعة أجزاء $\mathbb{X}$ في مجموعة أجزاء $\mathbb{X}$ يحقّق الشّروط التّالية (التي تُسمَّى موضوعات كوراتوفسكي Kuratowski):

(1) $\mathcal{K}(\phi) = \phi$.

(2) أيّاً كانت A من $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ فإنَّ $A \subseteq \mathcal{K}(A)$.

(3) أيّاً كانت A من $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ فإنَّ $\mathcal{K}\big(\mathcal{K}(A)\big) = \mathcal{K}(A)$.

(4) أيّاً كانت A و B من $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ فإنَّ $\mathcal{K}(A \cup B) = \mathcal{K}(A) \cup \mathcal{K}(B)$.

لنرمز بِـ $\mathcal{F}$ للجماعة $\{E \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) \ : \ E = \mathcal{K}(E)\} = \mathcal{F}$، عندئذٍ:

إنَّ $\mathcal{F}$ مؤهلةٌ لتوليد تبولوجيا τ على $\mathbb{X}$، بحيث تكون عناصر $\mathcal{F}$ مجموعاتٍ مغلقة (بالنّسبة إلى τ)، وبالعكس.

البرهان:

لنبرهن أنَّ ϕ و $\mathbb{X}$ من الصّفّ $\mathcal{F}$ وأنَّهُ مغلقٌ بالنّسبة للتقاطع الكيفي والاتحاد المنتهي.

حسب (1) إنَّ $\mathcal{K}(\phi) = \phi$ ومنه $\phi \in \mathcal{F}$.

حسب (2) إنَّ $\mathbb{X} \subseteq \mathcal{K}(\mathbb{X})$ ولكن $\mathcal{K}(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{X}$ لذا $\mathcal{K}(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$ ومنه $\mathbb{X} \in \mathcal{F}$.

من (4) أيّاً كانت A و B من $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ بحيث $A \subseteq B$ فإنَّ $\mathcal{K}(A) \subseteq \mathcal{K}(B)$.

لتكن $(E_\alpha)_{\alpha\in A} \subseteq \mathcal{F}$ ولنبرهن أنَّ $\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha \in \mathcal{F}$ أي لنبرهن أنَّ $\mathcal{K}(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha$.

حسب (2) إنَّ $\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha \subseteq \mathcal{K}(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha)$ لنبرهن العكس فيتم المطلوب.

بما أنَّ $E_\alpha \in \mathcal{F}$ لأي $\alpha \in A$ فإنَّ $\mathcal{K}(E_\alpha) = E_\alpha$ لأي $\alpha \in A$.

لأي $\alpha \in A$ فإنَّ $\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha \subseteq E_\alpha$، ومنه لأي $\alpha \in A$ فإنَّ $\mathcal{K}(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha) \subseteq \mathcal{K}(E_\alpha) = E_\alpha$.

ومنه $\mathcal{K}(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha$، لذا $\mathcal{K}(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha$ و منه $\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha \in \mathcal{F}$.

لتكن E_1 و E_2 من $\mathcal{F}$ ولنبرهن أنَّ $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}$ أي لنبرهن أنَّ $\mathcal{K}(E_1 \cup E_2) = E_1 \cup E_2$.

بما أنَّ E_1 و E_2 من $\mathcal{F}$ فإنَّ $\mathcal{K}(E_1) = E_1$ و $\mathcal{K}(E_2) = E_2$.

حسب (4) فإنَّ $\mathcal{K}(E_1 \cup E_2) = \mathcal{K}(E_1) \cup \mathcal{K}(E_2) = E_1 \cup E_2$ ومنه $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}$.

بالاستقراء الرّياضي يمكن إثباتها لأجل جماعة منتهية $E_1, E_2, \dots, E_n$ من $\mathcal{F}$.

وبذلك يتم المطلوب.

يمكن إثبات صحّة المبرهنة (7) صفحة (15) بشكل مشابه.

(٦)تمرينات في الفضاءات الطوبولوجية

السؤال الأوّل:

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقيّة، ولنرمز بـِ τ_{cf} لاجتماع $\{\phi\}$ مع مجموعة كلّ المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ التي كلّ منها مولَّفة من جميع عناصر $\mathbb{R}$ باستثناء عددٍ منتهٍ منها. والمطلوب:

(1) برهن أنَّ τ_{cf} تبولوجيا على $\mathbb{R}$.

(2) برهن أنَّ أيّ مجموعتين مفتوحتين غيرِ خاليتين في $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ متقاطعتان.

(3) بيّن أنَّ $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ غيرُ متورٍ.

(4) أثبت أنَّ أيَّ عنصرٍ x من $\mathbb{R}$ هو نقطةٌ حدّيةٌ لأيّ مجموعةٍ جزئيةٍ غيرِ منتهيةٍ A من $\mathbb{R}$.

الحل:

$$\tau_{cf} = \{\phi\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} \quad : \quad U^c\ finite\}$$

(1) $\phi \in \tau_{cf}$ (فرضاً)، و $\mathbb{X} \in \tau_{cf}$ (منتهية $\mathbb{X}^c = \phi$).

لتكن A و B من τ_{cf}، فإنَّ A^c و B^c مجموعتان منتهيتان، ولنبرهن أنَّ $A \cap B \in \tau_{cf}$.

لنأخذ $(A \cap B)^c$ متممة المجموعة $A \cap B$، نلاحظ أنَّ:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

واجتماع منتهيتين هو مجموعة منتهية، ومنه: $A \cap B \in \tau_{cf}$.

لتكن $(A_i)_{i \in I}$ جماعةً من τ_{cf}، فإنَّ A_i^c مجموعةٌ منتهيةٌ لأيّ $i \in I$، ولنبرهن أنَّ $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_{cf}$.

لنأخذ $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c$ متممة المجموعة $\bigcup_{i \in I} A_i$، نلاحظ أنَّ:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

وتقاطع منتهيات هو مجموعة منتهية، ومنه: $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_{cf}$.

(2) لتكن A و B مجموعتين مفتوحتين وغير خاليتين في الفضاء التّبولوجي $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$، فإنَّ A^c و B^c مجموعتان منتهيتان، ولنبرهن أنَّ $A \cap B \neq \phi$.

لنفرض مؤقتاً أنَّ A و B غيرُ متقاطعتين، أي $A \cap B = \phi$، ومنه:

$$(A \cap B)^c = (\phi)^c \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{A^c}_{\text{منتهية}} \cup \underbrace{B^c}_{\text{منتهية}} = \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{غير منتهية}}$$

وهذا مستحيل، ومنه الفرض الجدلي خاطئ، وبالتّالي أيُّ مجموعتين مفتوحتين وغيرخاليتين في هذا الفضاء التّبولوجي لابُدَّ وأن تكونا متقاطعتين.

(3) يكفي إثبات أنَّ $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ ليس فضاءَ هاوسدورف (T_2).

لتكن x و y من $\mathbb{R}$ بحيث $x \neq y$، إنَّ أيَّ جوارٍ لـِ x وأيَّ جوارٍ لـِ y متقاطعان (حسب الطّلب الثّاني) ومنه $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ ليس فضاءَ هاوسدورف، وبالتّالي الفضاء التّبولوجي $(\mathbb{R}, \tau_{cf})$ ليس مَتوراً.

(4) لتكن x نقطةً من $\mathbb{R}$، و A مجموعةً جزئيةً غيرَ منتهيةٍ من $\mathbb{R}$، ولنبرهن أنَّ $x \in A'$.

لنفرض مؤقتاً أنَّ $x \notin A'$، ومنه يوجد جوارٌ مفتوحٌ $\mathcal{O}_x$ لـِ x ($\mathcal{O}_x^c$ مجموعة منتهية) بحيث أنَّ:

$$(\mathcal{O}_x \cap A) - \{x\} = \mathcal{O}_x \cap (A - \{x\}) = \phi$$

وهذا يعني أنَّ المجموعةَ $(A - \{x\})$ غيرَ المنتهية محتواةٌ في المجموعة $\mathcal{O}_x^c$ المنتهية وهذا مستحيل، ومنه الفرض الجدلي خاطئ، وبالتّالي: $x \in A'$.

السّؤال الثّاني:

ليكن $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً تبولوجياً، و $A \subseteq \mathbb{X}$. أثبت صحّة ما يلي:

(1) $\bar{A} = A^\circ \cup Fr(A)$.

(2) $\bar{A} - Fr(A) = A^\circ$.

(3) برهن أنَّ الشّرط اللّازم والكافي كي تكون A مفتوحةً ومغلقةً هو أن يكون $Fr(A) = \phi$.

الحل:

(1) من جهة أولى:

ليكن $x \in \bar{A}$، ولتكن $\mathcal{V}_x$ جماعة جوارات العنصر x في الفضاء التّبولوجي $(\mathbb{X}, \tau)$، ومنه:

$$\forall V \in \mathcal{V}_x \quad : \quad V \cap A \neq \phi$$

نميّز حالتين:

إمّا:

$$\exists V_0 \in \mathcal{V}_x \quad : \quad x \in V_0 \subseteq A \quad \Longrightarrow \quad x \in A^\circ \subseteq A^\circ \cup Fr(A)$$

أو:

$$\forall V \in \mathcal{V}_x \quad : \quad V \not\subseteq A \quad \Rightarrow \quad V \cap A \neq \phi \quad and \quad V \cap A^c \neq \phi$$

$$\Rightarrow \quad x \in \bar{A} \quad and \quad x \in \overline{A^c} \quad \Rightarrow \quad x \in (\bar{A} \cap \overline{A^c})$$

$$\Rightarrow \quad x \in Fr(A) \subseteq A^{\circ} \cup Fr(A)$$

ومنه، في كلا الحالتين، نستنتج أنَّ:

$$\bar{A} \subseteq A^{\circ} \cup Fr(A) \quad (*)$$

من جهة ثانية:

ليكن $x \in \left(A^{\circ} \cup Fr(A)\right)$، ومنه: إمّا $x \in A^{\circ}$ أو $x \in Fr(A)$.

لنناقش الحالتين:

إمّا:

$$x \in A^{\circ} \subseteq A \subseteq \bar{A} \quad \Rightarrow \quad x \in \bar{A}$$

أو:

$$x \in Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c} \quad \Rightarrow \quad x \in \bar{A} \quad and \quad x \in \overline{A^c} \quad \Rightarrow \quad x \in \bar{A}$$

ومنه، في كلا الحالتين، نستنتج أنَّ:

$$A^{\circ} \cup Fr(A) \subseteq \bar{A} \quad (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أنَّ:

$$\bar{A} = A^{\circ} \cup Fr(A)$$

(2) من جهة أولى:

ليكن $x \in \left(\bar{A} - Fr(A)\right)$ فإنَّ $x \in \bar{A}$ و $x \notin Fr(A)$.

بما أنَّ $x \notin Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$ و $x \in \bar{A}$ فإنَّ $x \notin \overline{A^c}$.

بما أنَّ $x \notin \overline{A^c}$ يوجد جوار مفتوح V_1 لِـ x بحيث أنَّ $V_1 \cap A^c = \phi$ ومنه $V_1 \subseteq A^{c^c} = A$.

أي يوجد جوار مفتوح V_1 لِـ x بحيث أنَّ $V_1 \subseteq A$ ومنه $x \in A^{\circ}$. ومنه:

$$\bar{A} - Fr(A) \subseteq A^{\circ} \quad (*)$$

من جهة ثانية:

ليكن $x \in A^\circ$، فإنَّ $x \in \bar{A}$، ويوجد جوار مفتوح V_2 لـِ x بحيث أنَّ $V_2 \subseteq A$.

الجوار V_2 محتوى بأكمله في A فإنَّ $V_2 \cap A^c = \phi$، ومنه $x \notin \overline{A^c}$.

لذا $x \notin Fr(A)$ ومنه $x \in \left(\bar{A} - Fr(A)\right)$، ومنه:

$$A^\circ \subseteq \bar{A} - Fr(A) \quad (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أنَّ:

$$\bar{A} - Fr(A) = A^\circ$$

(3) لنفرض أنَّ A مجموعةٌ مفتوحةٌ ومغلقةٌ معاً $(clopen\ set)$، ولنبرهن أنَّ $Fr(A) = \phi$.

بما أنَّ A مجموعةٌ مفتوحةٌ فإنَّ $A^\circ = A$، وبما أنَّ A مجموعةٌ مغلقةٌ فإنَّ $\bar{A} = A$.

نعلم أنَّ $Fr(A) = \bar{A} - A^\circ$، ومنه:

$$Fr(A) = \bar{A} - A^\circ = A - A = \phi$$

وبالتّالي $Fr(A) = \phi$.

لنفرض أنَّ $Fr(A) = \phi$، ولنبرهن أنَّ A مجموعةٌ مفتوحةٌ ومغلقةٌ معاً.

بما أنَّ $Fr(A) = \phi$، وحسب الطّلب الأوّل فإنَّ: $\bar{A} = A^\circ$، ونعلم أنَّ $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$، ومنه:

$$A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A} = A^\circ \quad \Rightarrow \quad A = A^\circ \quad \Rightarrow \quad A \text{ مفتوحة}$$

و:

$$\bar{A} = A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A} \quad \Rightarrow \quad A = \bar{A} \quad \Rightarrow \quad A \text{ مغلقة}$$

وبالتّالي A مجموعةٌ مفتوحةٌ ومغلقةٌ معاً.

السّؤال الثّالث:

لتكن لدينا المجموعة $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$. عيّن جميع التّبولوجيات الممكن تعريفها على $\mathbb{X}$.

الحل:

$$\tau_1 = \{\phi, \mathbb{X}\}$$

$$\tau_2 = \{\phi, \{1\}, \mathbb{X}\} \qquad \tau_3 = \{\phi, \{2\}, \mathbb{X}\} \qquad \tau_4 = \{\phi, \{3\}, \mathbb{X}\}$$

$$\tau_5 = \{\phi, \{1,2\}, \mathbb{X}\} \qquad \tau_6 = \{\phi, \{1,3\}, \mathbb{X}\} \qquad \tau_7 = \{\phi, \{2,3\}, \mathbb{X}\}$$

$$\tau_8 = \{\phi, \{1\}, \{2,3\}, \mathbb{X}\} \qquad \tau_9 = \{\phi, \{2\}, \{1,3\}, \mathbb{X}\}$$
$$\tau_{10} = \{\phi, \{3\}, \{1,2\}, \mathbb{X}\}$$

$$\tau_{11} = \{\phi, \{1\}, \{1,2\}, \mathbb{X}\} \qquad \tau_{12} = \{\phi, \{1\}, \{1,3\}, \mathbb{X}\}$$

$$\tau_{13} = \{\phi, \{2\}, \{1,2\}, \mathbb{X}\} \qquad \tau_{14} = \{\phi, \{2\}, \{2,3\}, \mathbb{X}\}$$

$$\tau_{15} = \{\phi, \{3\}, \{1,3\}, \mathbb{X}\} \qquad \tau_{16} = \{\phi, \{3\}, \{2,3\}, \mathbb{X}\}$$

$$\tau_{17} = \{\phi, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \mathbb{X}\}$$
$$\tau_{18} = \{\phi, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \mathbb{X}\}$$

$$\tau_{19} = \{\phi, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \mathbb{X}\}$$

$$\tau_{20} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \mathbb{X}\} \quad \tau_{21} = \{\phi, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \mathbb{X}\}$$
$$\tau_{22} = \{\phi, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \mathbb{X}\}$$

$$\tau_{23} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \mathbb{X}\}$$
$$\tau_{24} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \mathbb{X}\}$$

$$\tau_{25} = \{\phi, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2\}, \mathbb{X}\}$$
$$\tau_{26} = \{\phi, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \mathbb{X}\}$$

$$\tau_{27} = \{\phi, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2\}, \mathbb{X}\}$$
$$\tau_{28} = \{\phi, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \mathbb{X}\}$$

$$\tau_{29} = \mathcal{P}(\mathbb{X}) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \mathbb{X}\}$$

السّؤال الرّابع:

ليكن $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً تبولوجياً، و A و B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{X}$، برهن أنَّ:

(1) $Fr(A^\circ) \subseteq Fr(A)$ و $Fr(\bar{A}) \subseteq Fr(A)$.

(2) $Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$.

الحل:

لأيّ مجموعة جزئية E من $\mathbb{X}$ فإنَّ: $\bar{\bar{E}} = \bar{E}$، و $E^{\circ\circ} = E^\circ$ و $Fr(E) = \bar{E} - E^\circ$ وبما أنَّ $E \subseteq \bar{E}$ فإنَّ $E^\circ \subseteq (\bar{E})^\circ$، وبما أنَّ $E^\circ \subseteq E$ فإنَّ $\overline{E^\circ} \subseteq \bar{E}$.

(1) لنبرهن أنَّ $Fr(A^\circ) \subseteq Fr(A)$:

$$Fr(A^\circ) = \overline{A^\circ} - A^{\circ\circ} \subseteq \bar{A} - A^\circ = Fr(A)$$

لنبرهن أنَّ $Fr(\bar{A}) \subseteq Fr(A)$:

$$Fr(\bar{A}) = \bar{\bar{A}} - (\bar{A})^{\circ} \subseteq \bar{A} - A^{\circ} = Fr(A)$$

(2) لنبرهن أنَّ $Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$:

ليكن $x \in Fr(A \cup B)$ فإنَّ:

$$\forall V \in \mathcal{V}_x \quad : \quad V \cap (A \cup B) \neq \phi \quad and \quad V \cap (A \cup B)^c \neq \phi$$

ومنه:

$$\forall V \in \mathcal{V}_x \quad : \quad (V \cap A) \cup (V \cap B) \neq \phi \quad and \quad V \cap (A \cup B)^c \neq \phi$$

نميّز حالتين:

إمّا:

$$\forall V \in \mathcal{V}_x \quad : \quad V \cap A \neq \phi \quad and \quad V \cap (A \cup B)^c \neq \phi$$

وبما أنَّ $V \cap (A \cup B)^c \subseteq V \cap A^c$ فإنَّ:

$$\forall V \in \mathcal{V}_x \quad : \quad V \cap A \neq \phi \quad and \quad V \cap A^c \neq \phi$$

ومنه:

$$x \in \bar{A} \quad and \quad x \in \overline{A^c}$$

أي:

$$x \in Fr(A) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$$

أو:

$$\forall V \in \mathcal{V}_x \quad : \quad V \cap B \neq \phi \quad and \quad V \cap (A \cup B)^c \neq \phi$$

وبما أنَّ $V \cap (A \cup B)^c \subseteq V \cap B^c$ فإنَّ:

$$\forall V \in \mathcal{V}_x \quad : \quad V \cap B \neq \phi \quad and \quad V \cap B^c \neq \phi$$

ومنه:

$$x \in \bar{B} \quad and \quad x \in \overline{B^c}$$

أي:

$$x \in Fr(B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$$

ومنه، في كلا الحالتين، نستنتج أنَّ:

$$Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$$

السّؤال الخامس:

لتكن $\mathbb{X}$ مجموعةً ما غيرَ خاليةٍ، و $(\mathbb{Y}, \tau_{\mathbb{Y}})$ فضاءً تبولوجياً، و $f: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ تطبيقاً. لنعرّف الجماعة:

$$\tau_{\mathbb{X}} = \{f^{-1}(U) \quad : \quad U \in \tau_{\mathbb{Y}}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$$

بيّن أنَّ $\tau_{\mathbb{X}}$ تكوّن تبولوجيا على $\mathbb{X}$.

الحل:

بما أنَّ ϕ و $\mathbb{Y}$ من $\tau_{\mathbb{Y}}$، و $f^{-1}(\phi) = \phi$ و $f^{-1}(\mathbb{Y}) = \mathbb{X}$، فإنَّ ϕ و $\mathbb{X}$ من $\tau_{\mathbb{X}}$.

لتكن V_1 و V_2 من $\tau_{\mathbb{X}}$، فإنَّه توجد U_1 و U_2 من $\tau_{\mathbb{Y}}$ بحيث أنَّ $V_i = f^{-1}(U_i)$ $(i = 1,2)$، ولنبرهن أنَّ: $V_1 \cap V_2$ من $\tau_{\mathbb{X}}$.

بما أنَّ U_1 و U_2 من $\tau_{\mathbb{Y}}$ فإنَّ $U_1 \cap U_2$ من $\tau_{\mathbb{Y}}$، ومنه $f^{-1}(U_1 \cap U_2) \in \tau_{\mathbb{X}}$، لكن:

$$f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = V_1 \cap V_2$$

ومنه $V_1 \cap V_2$ من $\tau_{\mathbb{X}}$.

لتكن $(V_i)_{i \in I}$ جماعةً من $\tau_{\mathbb{X}}$، ومنه لأيّ $i \in I$ توجد U_i من $\tau_{\mathbb{Y}}$ بحيث أنَّ $V_i = f^{-1}(U_i)$، ولنبرهن أنَّ: $\bigcup_{i \in I} V_i$ من $\tau_{\mathbb{X}}$.

بما أنَّ U_i لأيّ $i \in I$ من $\tau_{\mathbb{Y}}$ فإنَّ $\bigcup_{i \in I} U_i$ من $\tau_{\mathbb{Y}}$، ومنه $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) \in \tau_{\mathbb{X}}$، ولكن:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

ومنه $\bigcup_{i \in I} V_i$ من $\tau_{\mathbb{X}}$. وبالتّالي $\tau_{\mathbb{X}}$ تكوّن تبولوجيا على $\mathbb{X}$.

السّؤال السّادس:

ليكن f تطبيقاً للفضاء التّبولوجي $(\mathbb{X}, \tau_{\mathbb{X}})$ في المجموعة غير الخالية $\mathbb{Y}$. لنعرّف الجماعة:

$$\tau_{\mathbb{Y}} = \{U \subseteq \mathbb{Y} \quad : \quad f^{-1}(U) \in \tau_{\mathbb{X}}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Y})$$

بيّن أنَّ $\tau_{\mathbb{Y}}$ تكوّن تبولوجيا على $\mathbb{Y}$

الحل:

بما أنَّ ϕ و $\mathbb{X}$ من $\tau_{\mathbb{X}}$، و $f^{-1}(\phi)=\phi$ و $f^{-1}(\mathbb{Y})=\mathbb{X}$، فإنَّ ϕ و $\mathbb{Y}$ من $\tau_{\mathbb{Y}}$.

لتكن U_1 و U_2 من $\tau_{\mathbb{Y}}$، فإنَّ $f^{-1}(U_i)\in\tau_{\mathbb{X}}$ $(i=1,2)$، ولنبرهن أنَّ: $U_1\cap U_2$ من $\tau_{\mathbb{Y}}$.

بما أنَّ $f^{-1}(U_i)\in\tau_{\mathbb{X}}$ $(i=1,2)$، فإنَّ $f^{-1}(U_1)\cap f^{-1}(U_2)\in\tau_{\mathbb{X}}$، ولكن:

$$f^{-1}(U_1)\cap f^{-1}(U_2)=f^{-1}(U_1\cap U_2)$$

ومنه $U_1\cap U_2$ من $\tau_{\mathbb{Y}}$.

لتكن $(U_i)_{i\in I}$ جماعةً من $\tau_{\mathbb{Y}}$، ومنه لأيّ $i\in I$ فإنَّ $f^{-1}(U_i)\in\tau_{\mathbb{X}}$، ولنبرهن أنَّ: $\bigcup_{i\in I}U_i$ من $\tau_{\mathbb{Y}}$.

بما أنَّ $f^{-1}(U_i)\in\tau_{\mathbb{X}}$ لأيّ $i\in I$ فإنَّ $\bigcup_{i\in I}f^{-1}(U_i)$ من $\tau_{\mathbb{X}}$، ولكن:

$$\bigcup_{i\in I}f^{-1}(U_i)=f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)$$

ومنه $\bigcup_{i\in I}U_i$ من $\tau_{\mathbb{Y}}$. وبالتّالي $\tau_{\mathbb{Y}}$ تكوّن تبولوجيا على $\mathbb{Y}$.

السّؤال السّابع:

ليكن $(\mathbb{X},\tau_{\mathbb{X}})$ و $(\mathbb{Y},\tau_{\mathbb{Y}})$ فضاءين تبولوجيين ولتكن $\mathcal{S}$ قاعدةً جزئيةً لِـ $\tau_{\mathbb{Y}}$. بيّن أنَّ التّطبيق

$$f:(\mathbb{X},\tau_{\mathbb{X}})\longrightarrow(\mathbb{Y},\tau_{\mathbb{Y}})$$

مستمرٌ إذا وفقط إذا كانت الصّورة العكسية لكلّ عنصرٍ من $\mathcal{S}$ مجموعةً مفتوحةً في $(\mathbb{X},\tau_{\mathbb{X}})$.

الحل:

لنفرض أنَّ التّطبيق f مستمرٌ، ولنبرهن أنَّ الصّورة العكسية لكلّ عنصرٍ من $\mathcal{S}$ مجموعةٌ مفتوحةٌ في $(\mathbb{X},\tau_{\mathbb{X}})$.

بما أنَّ التّطبيق f مستمرٌ فإنَّ الصّورة العكسية لكلّ مجموعةٍ مفتوحةٍ في $(\mathbb{Y},\tau_{\mathbb{Y}})$ مجموعةٌ مفتوحةٌ في $(\mathbb{X},\tau_{\mathbb{X}})$، وبشكلٍ خاص فإنَّ الصّورة العكسية لكلّ عنصرٍ من $\mathcal{S}$ مجموعةٌ مفتوحةٌ في $(\mathbb{X},\tau_{\mathbb{X}})$.

لنفرض أنَّ الصّورة العكسية لكلّ عنصرٍ من $\mathcal{S}$ مجموعةٌ مفتوحةٌ في $(\mathbb{X},\tau_{\mathbb{X}})$، ولنبرهن أنَّ التّطبيق f مستمرٌ.

لتكن U مجموعةً مفتوحةً في $(\mathbb{Y},\tau_{\mathbb{Y}})$، بما أنَّ $\mathcal{S}$ قاعدةٌ جزئيةٌ لِـ $(\mathbb{Y},\tau_{\mathbb{Y}})$ نعلم أنَّه من الممكن كتابة U على النّحو:

$$U=\bigcup_{k\in I}\left(B_{i_1}\cap B_{i_2}\cap\ldots\cap B_{i_k}\right)\quad,\quad B_{i_k}\in\mathcal{S}$$

ومنه:

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{k\in I}(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \dots \cap B_{i_k})\right)$$

$$= \bigcup_{k\in I} f^{-1}(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \dots \cap B_{i_k}) = \bigcup_{k\in I}[f^{-1}(B_{i_1}) \cap f^{-1}(B_{i_2}) \cap \dots \cap f^{-1}(B_{i_k})]$$

حسب الفرض كلّ $f^{-1}(B_{i_k})$ مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{X}, \tau_{\mathbb{X}})$ ومنه تقاطعها المنتهي مجموعة مفتوحة في $(\mathbb{X}, \tau_{\mathbb{X}})$ ولما كان الاتحاد لمجموعات مفتوحة مجموعة مفتوحة فإنَّ $f^{-1}(U)$ مجموعةٌ مفتوحةٌ في $(\mathbb{X}, \tau_{\mathbb{X}})$، والتّطبيق f مستمر.

مبرهنة:

ليكن f تطبيقاً للفضاء التّبولوجي $(\mathbb{X}, \tau_{\mathbb{X}})$ في الفضاء التّبولوجي $(\mathbb{Y}, \tau_{\mathbb{Y}})$. القضايا التّالية متكافئة:

(1) التّطبيق f مستمر.

(2) لأيّ $A \subseteq \mathbb{X}$ فإنَّ $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(3) الصّورةُ العكسيةُ لأيّ مجموعةٍ مغلقةٍ في المستقر مجموعةٌ مغلقةٌ في المنطلق.

السّؤال الثّامن:

ليكن f تطبيقاً مستمراً للفضاء التّبولوجي $(\mathbb{X}, \tau_{\mathbb{X}})$ في الفضاء التّبولوجي $(\mathbb{Y}, \tau_{\mathbb{Y}})$. ولتكن A و B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{X}$. والمطلوب:

(1) أثبت أنَّ إذا كان $\bar{A} = \bar{B}$ فإنَّ $\overline{f(A)} = \overline{f(B)}$.

(2) استنتج إذا كانت A كثيفةً في $\mathbb{X}$، و $f(\mathbb{X})$ كثيفةً في $\mathbb{Y}$، فإنَّ $f(A)$ كثيفةٌ في $\mathbb{Y}$.

الحل:

(1) بما أنَّ التّطبيق f مستمرٌ، فإنَّ:

$$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \qquad f(\bar{B}) \subseteq \overline{f(B)}$$

ومنه:

$$A \subseteq \bar{A} = \bar{B} \implies f(A) \subseteq f(\bar{B}) \subseteq \overline{f(B)} \implies \overline{f(A)} \subseteq \overline{f(B)}$$

بشكل مشابه:

$$B \subseteq \bar{B} = \bar{A} \implies f(B) \subseteq f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} \implies \overline{f(B)} \subseteq \overline{f(A)}$$

وبالتّالي:

$$\overline{f(A)} = \overline{f(B)}$$

(2) بما أنَّ A مجموعةٌ كثيفةٌ في $\mathbb{X}$، فإنَّ $\bar{A} = \mathbb{X}$، أي $\bar{A} = \bar{\mathbb{X}}$، وحسب الطّلب الأوّل وكون $f(\mathbb{X})$ مجموعة كثيفة في $\mathbb{Y}$، لدينا:

$$\overline{f(A)} = \overline{f(\mathbb{X})} = \mathbb{Y}$$

وبالتّالي $f(A)$ مجموعةٌ كثيفةٌ في $\mathbb{Y}$.

السّؤال التّاسع:

ليكن $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً تبولوجياً، و A مجموعةً جزئيةً من $\mathbb{X}$، أثبت أنَّ:

$$\overline{A^c} = A^{\circ c} \qquad\qquad (\bar{A})^c = A^{c\circ}$$

الحل:

لنبرهن أنَّ $\overline{A^c} = A^{\circ c}$:

$$A^{\circ c} = \left(\bigcup_{\substack{U\subseteq A\\ U\ open}} U\right)^c = \bigcap_{\substack{U\subseteq A\\ U\ open}} U^c = \bigcap_{\substack{A^c\subseteq V\\ V\ closed}} V = \overline{A^c}$$

باستبدال كل A بـِ A^c نجد أنَّ:

$$A^{c\circ c} = \overline{A^{cc}} \implies A^{c\circ c} = \bar{A} \implies A^{c\circ} = (\bar{A})^c$$

السّؤال العاشر:

ليكن f تطبيقاً للفضاء التّبولوجي $(\mathbb{X}, \tau_{\mathbb{X}})$ في الفضاء التّبولوجي $(\mathbb{Y}, \tau_{\mathbb{Y}})$.

برهن تكافؤ القضايا التّالية:

(1) التّطبيق f مستمر.

(2) أيّاً كانت المجموعة الجزئية B من $\mathbb{Y}$، فإنَّ:

$$f^{-1}(B^\circ) \subseteq \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$$

(3) أيّاً كانت المجموعة الجزئية B من $\mathbb{Y}$، فإنَّ:

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$$

الحل:

$(1) \Leftarrow (2)$

لتكن B مجموعةً جزئيةً من $\mathbb{Y}$.

إنَّ $B^{\circ} \subseteq B$ فإنَّ $f^{-1}(B^{\circ}) \subseteq f^{-1}(B)$ ومنه $\left(f^{-1}(B^{\circ})\right)^{\circ} \subseteq \left(f^{-1}(B)\right)^{\circ}$.

لكن $\left(f^{-1}(B^{\circ})\right)^{\circ} = f^{-1}(B^{\circ})$، لأنَّ B° مجموعةٌ مفتوحةٌ في $\mathbb{Y}$ والتّطبيق f مستمر فإنَّ $f^{-1}(B^{\circ})$ مجموعةٌ مفتوحةٌ في $\mathbb{X}$، وبالتّالي:

$$f^{-1}(B^{\circ}) \subseteq \left(f^{-1}(B)\right)^{\circ}$$

$(2) \Leftarrow (3)$

لتكن B مجموعةً جزئيةً من $\mathbb{Y}$، فإنَّ B^{c} كذلك أيضاً، ومنه حسب الفرض (2) فإنَّ:

$$f^{-1}\left({B^{c}}^{\circ}\right) \subseteq \left(f^{-1}(B^{c})\right)^{\circ} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(\bar{B}^{c}) \subseteq \left(\left(f^{-1}(B)\right)^{c}\right)^{\circ}$$

$$\left(f^{-1}(\bar{B})\right)^{c} \subseteq \left(\overline{f^{-1}(B)}\right)^{c} \quad \Rightarrow \quad \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$$

$(3) \Leftarrow (1)$

لتكن F مجموعةً مغلقةً في الفضاء التّبولوجي $(\mathbb{Y}, \tau_{\mathbb{Y}})$، ولنبرهن أنَّ $f^{-1}(F)$ مجموعةٌ مغلقةٌ في الفضاء التّبولوجي $(\mathbb{X}, \tau_{\mathbb{X}})$.

بما أنَّ F مجموعةٌ مغلقةٌ في الفضاء التّبولوجي $(\mathbb{Y}, \tau_{\mathbb{Y}})$ فإنَّ $\bar{F} = F$.

إنَّ $f^{-1}(F) \subseteq \overline{f^{-1}(F)}$، لنبرهن صحّة العكس فيتم المطلوب.

حسب الفرض (3) فإنَّ:

$$\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(\bar{F}) = f^{-1}(F)$$

ومنه $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$، والتّطبيق f مستمر.

(٧) الفضاء المتري ومسلمات الفصل

(1) أثبتْ أنَّ كُلَّ فضاءٍ متري هو فضاءُ T_1.

الحل:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً.

لتكن $x \in \mathbb{X}$، ولنبرهن أنَّ المجموعة $\{x\}$ مجموعةٌ مُغلقةٌ.

لأيِّ $n \in \mathbb{N}$ لتكن $F_n = B\left(x, \frac{1}{n}\right) = \left\{y \in \mathbb{X} \;:\; d(x,y) \le \frac{1}{n}\right\}$.

إنَّ F_n (لأيِّ $n \in \mathbb{N}$) مجموعةٌ مُغلقةٌ (لأنَّ كُلَّ كرةٍ مُغلقةٍ في فضاءٍ متري لابُدَّ وأن تكون مجموعةً مُغلقةً).

كما أنَّ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

إنَّ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ مجموعةٌ مُغلقةٌ (لأنَّها تقاطعٌ لمجموعاتٍ مُغلقةٍ)، وبالتّالي $\{x\}$ مجموعةٌ مُغلقةٌ.

ولمّا كانت x نقطةً كيفيّةً من $\mathbb{X}$، وبالتّالي $(\mathbb{X}, d)$ فضاءُ T_1.

(2) أثبتْ أنَّ كُلَّ فضاءٍ متري هو فضاءُ T_2.

الحل:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً.

لتكن x و y من $\mathbb{X}$ بحيث $x \ne y$، بما أنَّ d مسافةٌ (مترك) على $\mathbb{X}$ فإنَّ $\varepsilon = d(x,y) > 0$.

لنأخذ $\mathcal{O}_x = N\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ و $\mathcal{O}_y = N\left(y, \frac{\varepsilon}{3}\right)$، نلاحظ أنَّ $x \in \mathcal{O}_x$ و $y \in \mathcal{O}_y$.

إنَّ $\mathcal{O}_x$ و $\mathcal{O}_y$ مجموعتان مفتوحتان (لأنَّ كُلَّ كرةٍ مفتوحةٍ في فضاءٍ متري لابُدَّ وأن تكون مجموعةً مفتوحةً).

لنبرهن أنَّ $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \phi$.

لنفرض مؤقتاً أنَّ $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y \ne \phi$، ومنه توجدُ $z \in \mathbb{X}$ بحيث أنَّ $z \in (\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y)$، ومنه:

$$z \in \mathcal{O}_x = N\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right) \;\Rightarrow\; d(x,z) < \frac{\varepsilon}{3} \quad , \quad z \in \mathcal{O}_y = N\left(y, \frac{\varepsilon}{3}\right) \;\Rightarrow\; d(z,y) < \frac{\varepsilon}{3}$$

ومنه:

$$\varepsilon = d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon < \frac{2\varepsilon}{3}$$

وهذا خلف (كون $\varepsilon > 0$)، ومنه $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \phi$، وبالتّالي $(\mathbb{X}, d)$ فضاءُ T_2.

(3) أثبتْ أنَّ كُلَّ فضاءٍ متري هو فضاء T_3.

الحل:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً.

لتكن F مجموعةً غيرَ خاليةٍ ومُغلقةً من $\mathbb{X}$، و $x \notin F$.

بما أنَّ F مجموعةٌ مُغلقةٌ و $x \notin F$ فإنَّ $\varepsilon = D(x,F) = inf\{d(x,y) \; : \; y \in F\} > 0$.

ومنه سيكون $d(x,y) \geq \varepsilon$ لأيِّ $y \in F$.

لنأخذ $\mathcal{O}_x = N\left(x, \frac{\varepsilon}{8}\right)$ و $\mathcal{O}_F = \bigcup_{y\in F} N\left(y, \frac{\varepsilon}{8}\right)$، نلاحظ أنَّ $x \in \mathcal{O}_x$ و $F \subseteq \mathcal{O}_F$.

إنَّ $\mathcal{O}_x$ و $\mathcal{O}_F$ مجموعتان مفتوحتان.

لنبرهن أنَّ $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_F = \phi$.

لنفرض مؤقتاً أنَّ $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_F \neq \phi$، ومنه توجدُ $z \in \mathbb{X}$ بحيث أنَّ $z \in (\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_F)$، ومنه:

$$z \in \mathcal{O}_F = \bigcup_{y\in F} N\left(y, \frac{\varepsilon}{8}\right) \implies \exists y_0 \in F \; : \; z \in N\left(y_0, \frac{\varepsilon}{8}\right) \implies d(z, y_0) < \frac{\varepsilon}{8}$$

$$z \in \mathcal{O}_x = N\left(x, \frac{\varepsilon}{8}\right) \implies d(x,z) < \frac{\varepsilon}{8}$$

ومنه:

$$\varepsilon \leq d(x, y_0) \leq d(x,z) + d(z, y_0) < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4} \implies \varepsilon < \frac{\varepsilon}{4}$$

وهذا خلف (كون $\varepsilon > 0$)، ومنه $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_F = \phi$، وبالتّالي $(\mathbb{X}, d)$ فضاءُ T_3.

$\left(3\frac{1}{2}\right)$ أثبتْ أنَّ كُلَّ فضاءٍ متري هو فضاء $T_{3\frac{1}{2}}$.

الحل:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً.

لتكن F مجموعةً غيرَ خاليةٍ ومُغلقةً من $\mathbb{X}$، و $x_0 \notin F$.

لنأخذ $f(x) = \frac{d(x,x_0)}{d(x,x_0)+D(x,F)}$، نلاحظ أنَّ البسط والمقام مستمران والمقام لاينعدم ومنه f مستمرٌ.

وإنَّ $f(x_0) = 0$ و $f(F) = \{1\}$. وبالتّالي $(\mathbb{X}, d)$ فضاءُ $T_{3\frac{1}{2}}$.

(4) أثبتْ أنَّ كُلّ فضاءٍ متري هو فضاء T_4

الحل:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً.

لتكن F_1 و F_2 مجموعتين غيرَ خاليتين مغلقتين وغيرَ متقاطعتين من $\mathbb{X}$.

لنعرِّف المجموعتين:

$$\mathcal{O}_1 = \{x \in \mathbb{X} \quad : \quad D(x, F_1) < D(x, F_2)\}$$

$$\mathcal{O}_2 = \{x \in \mathbb{X} \quad : \quad D(x, F_1) > D(x, F_2)\}$$

حيث $D(x, F_i) = \inf_{y \in F_i} d(x, y)$ $(i = 1,2)$.

لنبرهن أنَّ $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \phi$.

لنفرض مؤقتاً أنَّ $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \neq \phi$ ومنه توجدُ $x \in \mathbb{X}$ بحيث أنَّ $x \in (\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2)$ ومنه:

$$x \in \mathcal{O}_1 \quad : \quad D(x, F_1) < D(x, F_2)$$

$$x \in \mathcal{O}_2 \quad : \quad D(x, F_1) > D(x, F_2)$$

وهذا خلف.

لنبرهن أنَّ $F_i \subseteq \mathcal{O}_i$ حيث $(i = 1,2)$.

ليكن $x \in F_1$ فإنَّ $D(x, F_1) = 0$ و $x \notin F_2$. بما أنَّ F_2 مجموعةٌ مُغلقةٌ و $x \notin F_2$ فإنَّ $D(x, F_2) > 0$.

إنَّ $D(x, F_1) = 0 < D(x, F_2)$ ومنه $x \in \mathcal{O}_1$، وبالتّالي $F_1 \subseteq \mathcal{O}_1$.

ليكن $x \in F_2$ فإنَّ $D(x, F_2) = 0$ و $x \notin F_1$. بما أنَّ F_1 مجموعةٌ مُغلقةٌ و $x \notin F_1$ فإنَّ $D(x, F_1) > 0$.

إنَّ $D(x, F_2) = 0 < D(x, F_1)$ ومنه $x \in \mathcal{O}_2$، وبالتّالي $F_2 \subseteq \mathcal{O}_2$.

لنبرهن أنَّ $\mathcal{O}_1$ و $\mathcal{O}_2$ مجموعتان مفتوحتان.

لنعرِّف التّطبيق $g(x) = D(x, F_1) - D(x, F_2)$، إنَّ g مستمرٌ لأنَّهُ فرق لتابعين مستمرين.

نلاحظ أنَّ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_1 &= \{x \in \mathbb{X} \quad : \quad D(x, F_1) < D(x, F_2)\} = \{x \in \mathbb{X} \quad : \quad D(x, F_1) - D(x, F_2) < 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{X} \quad : \quad g(x) < 0\} = g^{-1}(]-\infty, 0[)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_2 &= \{x \in \mathbb{X} \quad : \quad D(x, F_1) > D(x, F_2)\} = \{x \in \mathbb{X} \quad : \quad D(x, F_1) - D(x, F_2) > 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{X} \quad : \quad g(x) > 0\} = g^{-1}(]0, +\infty[)
\end{aligned}$$

إنَّ $\mathcal{O}_1$، $\mathcal{O}_2$ الخيال العكسي وفق تطبيق مستمر لِـ $]-\infty,0[$، $]0,+\infty[$ المفتوحتان على التّرتيب، ومنه $\mathcal{O}_1$ و $\mathcal{O}_2$ مجموعتان مفتوحتان، وبالتّالي $(\mathbb{X},d)$ فضاءُ T_4.

كلمات حول الفضاء T_4

يُقالُ عن فضاءٍ تبولوجي $(\mathbb{X},\tau)$ إنَّهُ فضاءُ T_4 إذا حقّق أحد الشّروط الأربعة المتكافئة:

(d_1) أيّاً كانت المجموعتان E و F غيرُ الخاليتين والمغلقتان وغيرُ المتقاطعتين من $\mathbb{X}$، فيوجدُ جوارٌ مفتوحٌ $\mathcal{O}_E$ لِـ E، و جوارٌ مفتوحٌ $\mathcal{O}_F$ لِـ F بحيث يكون $\mathcal{O}_E \cap \mathcal{O}_F = \phi$.

(d_2) أيّاً كانت المجموعة F غيرُ الخالية والمغلقة من $\mathbb{X}$، وأيّاً كان الجوارُ المفتوحُ U لِـ F، فيوجدُ جوارٌ مفتوحٌ V لِـ F بحيث يكون $F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.

(d_3) تمهيديّة يوريسون:

أيّاً كانت المجموعتان A و B غيرُ الخاليتين والمغلقتان وغيرُ المتقاطعتين من $\mathbb{X}$، فيوجدُ تطبيقٌ مستمرٌ f للفضاء $(\mathbb{X},\tau)$ في الفضاء $[0,1]$ (المزوَّد بتبولوجيا الفضاء الجزئي من $(\mathbb{R},|\cdot|)$) بحيث يكون $f(B)=\{1\}$ و $f(A)=\{0\}$.

(d_4) مبرهنة تيتس في التّمديد:

أيّاً كانت المجموعة F غيرُ الخالية والمغلقة من $\mathbb{X}$، وأيّاً كان التّطبيقُ g المستمرُ للفضاء الجزئي (F,τ_F) في فضاء الأعداد الحقيقيّة $(\mathbb{R},|\cdot|)$، عندئذٍ يوجدُ مُمَدَّدٌ مستمرٌ f للتطبيق g من $(\mathbb{X},\tau)$ إلى الفضاء $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

البرهان:

$(d_1) \Rightarrow (d_2)$

لتكن F مجموعةً غيرَ خاليةٍ ومغلقةً من $\mathbb{X}$، و U جواراً مفتوحاً لِـ F أي $F \subseteq U$. نميّز حالتين:

(1) $U=\mathbb{X}$ خُذْ $V=\mathbb{X}$ تمَّ المطلوب.

(2) $U \neq \mathbb{X}$ فإنَّ $U^c \neq \phi$ مجموعةٌ مغلقةٌ و $F \cap U^c = \phi$ (نظراً لأنَّ $F \subseteq U$)، حسب (d_1) يوجدُ جوارٌ مفتوحٌ $\mathcal{O}_{U^c}$ لِـ U^c، و جوارٌ مفتوحٌ $\mathcal{O}_F$ لِـ F بحيث يكون $\mathcal{O}_F \cap \mathcal{O}_{U^c} = \phi$.

بما أنَّ $\mathcal{O}_F \cap \mathcal{O}_{U^c} = \phi$ فإنَّ $\mathcal{O}_F \subseteq \mathcal{O}^c_{U^c}$ ومنه $\overline{\mathcal{O}_F} \subseteq \overline{\mathcal{O}^c_{U^c}} = \mathcal{O}^c_{U^c}$ (نظراً لأنَّ $\mathcal{O}^c_{U^c}$ مجموعةٌ مغلقةٌ).

بما أنَّ $U^c \subseteq \mathcal{O}_{U^c}$ فإنَّ $\mathcal{O}_{U^c}^c \subseteq U$.

ومنه $F \subseteq \mathcal{O}_F \subseteq \overline{\mathcal{O}_F} \subseteq \mathcal{O}_{U^c}^c \subseteq U$، خُذْ $V = \mathcal{O}_F$ نجد أنَّ $F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ وهو المطلوب.

$(\boldsymbol{d_1}) \Leftarrow (\boldsymbol{d_2})$

لتكن F و E مجموعتين غيرَ خاليتين ومغلقتين وغيرَ متقاطعتين من $\mathbb{X}$.

إنَّ F^c جوارٌ مفتوحٌ لِـ E حسب (d_2) يوجدُ جوارٌ مفتوحٌ V لِـ E بحيث $E \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq F^c$.

بما أنَّ $\bar{V} \subseteq F^c$ فإنَّ $F \subseteq \bar{V}^c$ حيث $\bar{V}^c$ مجموعةٌ مفتوحةٌ، وبما أنَّ $V \subseteq \bar{V}$ فإنَّ $V \cap \bar{V}^c = \phi$.

ومنه $V \cap \bar{V}^c = \phi$ و $F \subseteq \bar{V}^c$ و $E \subseteq V$، خُذْ $\mathcal{O}_E = V$ و $\mathcal{O}_F = \bar{V}^c$ نجد أنَّ $\mathcal{O}_E \cap \mathcal{O}_F = \phi$.

$(\boldsymbol{d_3}) \Leftarrow (\boldsymbol{d_2})$

لتكن A و B مجموعتين غيرَ خاليتين ومغلقتين وغيرَ متقاطعتين من $\mathbb{X}$.

لتكن $\mathfrak{T} := \{r \quad : \quad r \in]0,1[\cap \mathbb{Q}\}$.

بما أنَّ A و B مجموعتان غيرُ خاليتين ومغلقتان وغيرُ متقاطعتين من $\mathbb{X}$، فإنَّ B^c جوارٌ مفتوحٌ لِـ A المغلقة،

حسب (d_2) يوجدُ جوارٌ مفتوحٌ لِـ A وليكن U_{r_1} $(r_1 \in \mathfrak{T})$ بحيث يكون:

$$A \subseteq U_{r_1} \subseteq \bar{U}_{r_1} \subseteq B^c$$

إنَّ U_{r_1} جوارٌ مفتوحٌ لِـ A المغلقة، ومنه يوجدُ جوارٌ مفتوحٌ لِـ A وليكن U_{r_2} $(r_2 < r_1 : r_2 \in \mathfrak{T})$ بحيث يكون:

$$A \subseteq U_{r_2} \subseteq \bar{U}_{r_2} \subseteq U_{r_1} \subseteq \bar{U}_{r_1} \subseteq B^c$$

إنَّ B^c جوارٌ مفتوحٌ لِـ $\bar{U}_{r_1}$ المغلقة، ومنه يوجدُ جوارٌ مفتوحٌ لِـ $\bar{U}_{r_1}$ وليكن U_{r_3} $(r_1 < r_3 : r_3 \in \mathfrak{T})$ بحيث يكون:

$$A \subseteq U_{r_2} \subseteq \bar{U}_{r_2} \subseteq U_{r_1} \subseteq \bar{U}_{r_1} \subseteq U_{r_3} \subseteq \bar{U}_{r_3} \subseteq B^c$$

لنفرض أنَّ $n \geq 3$ وأنَّ $r_1, r_2, \dots, r_n$ اختيرت بطريقة بحيث $r_i < r_j$ تقتضي أنَّ $\bar{U}_{r_i} \subseteq U_{r_j}$.

عندئذٍ احد هذه الأرقام $r_1, r_2, \dots, r_n$ وليكن r_i سيكون أكبر رقم أصغر من r_{n+1} وأخر وليكن r_j سيكون أصغر رقم أكبر من r_{n+1} أي سيكون U_{r_j} جواراً مفتوحاً لِـ $\bar{U}_{r_i}$ المغلقة، حسب (d_2) يوجدُ جوارٌ مفتوحٌ لِـ $\bar{U}_{r_i}$ وليكن $U_{r_{n+1}}$ $(r_i < r_{n+1} < r_j : r_{n+1} \in \mathfrak{T})$ بحيث يكون:

$$\overline{U}_{r_i} \subseteq U_{r_{n+1}} \subseteq \overline{U}_{r_{n+1}} \subseteq U_{r_j}$$

بالمتابعة بهذه الطّريقة نحصلُ على جماعةٍ $(U_r)_{r\in\mathfrak{T}}$ من المجموعات المفتوحة من $\mathbb{X}$، بحيث يقابلُ كلَّ عددٍ عادي r من الفترة $]0,1[$ مجموعةٌ مفتوحةٌ U_r، ويتحقّق: $A \subseteq U_r \subseteq \overline{U}_r \subseteq B^c$، وأيّاً كان $r, s \in \mathfrak{T}$ بحيث $r < s$ فإنَّ $\overline{U}_r \subseteq U_s$، لنضع: $U_1 := \mathbb{X}$.

لأيِّ $x \in \mathbb{X}$ لتكن:

$$Q(x) := \{r \ : \ x \in U_r \ ; \ r \in \mathfrak{T} \cup \{1\}\}$$

من الواضح أنَّ $Q(x)$ مجموعةٌ جزئيةٌ من $\mathfrak{T} \cup \{1\}$، وغيرُ خاليةٍ (لأنَّ $1 \in Q(x)$ نظراً لأنَّ $x \in \mathbb{X} = U_1$)، ومحدودةٌ من الأدنى بالصّفر، لذا لِـ $Q(x)$ أكبر حد أدنى $(infimum)$ وهو وحيدٌ يقع في الفترة $[0,1]$.

لنعرّف:

$$f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) := inf Q(x)$$

إنَّ f معرَّفٌ جيّداً لأنَّ $inf Q(x)$ وحيدٌ.

إذا كان $x \in A$ فإنَّ $x \in U_r$ لأيِّ $r \in \mathfrak{T} \cup \{1\}$، لذا $Q(x) = \mathfrak{T} \cup \{1\}$، ومنه:

$$f(x) = inf Q(x) = inf\{\mathfrak{T} \cup \{1\}\} = 0$$

إذا كان $x \in B$ فإنَّ $x \in U_1 = \mathbb{X}$ فقط، لأنَّ $U_r \subseteq B^c$ لأيِّ $r \in \mathfrak{T}$، لذا $Q(x) = \{1\}$، ومنه:

$$f(x) = inf Q(x) = inf\{1\} = 1$$

أي $f(B) = \{1\}$ و $f(A) = \{0\}$، من الواضح أنَّ: $0 \leq f \leq 1$.

لنبرهن صحّة القضيتين التّاليتين:

(a) إذا كان $x \in \overline{U}_r$ فإنَّ $f(x) \leq r$.

(b) إذا كان $x \notin U_r$ فإنَّ $f(x) \geq r$.

نلاحظ أنَّ:

(a) إذا كان $x \in \overline{U}_r$ فإنَّ $x \in U_s$ لأيِّ $s \in \mathfrak{T}$ بحيث $r < s$، ومنه $s \in Q(x)$ لأيِّ $s \in \mathfrak{T}$ بحيث $r < s$، أي: $Q(x) \supseteq \{]r,1[\cap \mathbb{Q}\}$، ومنه: $inf Q(x) \leq inf\{]r,1[\cap \mathbb{Q}\}$، أي: $f(x) \leq r$.

(a') إذا كان $f(x) > r$ حيث $r \in \mathfrak{T}$، فإنَّ $x \notin \overline{U}_r$.

(b) إذا كان $x \notin U_r$ فإنَّ $x \notin U_s$ لأيِّ $s \in \mathfrak{T}$ بحيث $r < s$، ومنه $s \notin Q(x)$ لأيِّ $s \in \mathfrak{T}$ بحيث $r < s$، أي: $Q(x) \subseteq \{]r,1[\cap \mathbb{Q}\}$، ومنه: $infQ(x) \geq inf\{]r,1[\cap \mathbb{Q}\}$، أي: $f(x) \geq r$.

(b') إذا كان $f(x) < r$ حيث $r \in \mathfrak{T}$، فإنَّ $x \in U_r$.

ليكن $x_0 \in \mathbb{X}$، وليكن $]c,d[$ جواراً مفتوحاً لِـ $f(x_0)$ في $\mathbb{R}$، ولنبرهن على وجود جوارٍ مفتوحٍ U لِـ x_0 بحيث $f(U) \subseteq]c,d[$ ليكون f مستمراً عند x_0.

ليكن $p,q \in \{]c,d[\cap \mathbb{Q}\}$ بحيث $c < p < f(x_0) < q < d$.

بما أنَّ $p < f(x_0)$ حسب (a') فإنَّ $x_0 \notin \overline{U}_p$.

$f(x_0) < q$ حسب (b') فإنَّ $x_0 \in U_q$.

$p < q$ فإنَّ $\overline{U}_p \subseteq U_q$.

ليكن $U := U_q - \overline{U}_p$، إنَّ U جوارٌ مفتوحٌ لِـ x_0.

لتكن $y \in U = U_q - \overline{U}_p$ فإنَّ:

إنَّ $y \in U_q$ ومنه $y \in \overline{U}_q$ حسب (a) فإنَّ $f(y) \leq q$.

إنَّ $y \notin \overline{U}_p$ ومنه $y \notin U_p$ حسب (b) فإنَّ $f(y) \geq p$.

أي $p \leq f(y) \leq q$، ومنه $f(y) \in [p,q] \subseteq]c,d[$، وبما أنَّ y نقطةٌ كيفيّةٌ من U فإنَّ $f(U) \subseteq]c,d[$، ومنه f مستمرٌ عند x_0، وبما أنَّ x_0 نقطةٌ كيفيّةٌ من $\mathbb{X}$ فإنَّ f مستمرٌ على $\mathbb{X}$.

ومنه نجد أنَّهُ يوجدُ تطبيقٌ مستمرٌ f للفضاء $(\mathbb{X},\tau)$ في الفضاء $[0,1]$ بحيث يكون $f(B) = \{1\}$ و $f(A) = \{0\}$.

$\boldsymbol{(d_1) \Leftarrow (d_3)}$

لتكن E و F مجموعتين غيرَ خاليتين ومغلقتين وغيرَ متقاطعتين من $\mathbb{X}$، حسب (d_3) يوجدُ تطبيقٌ مستمرٌ $f:(\mathbb{X},\tau) \longrightarrow ([0,1],|\cdot|)$ بحيث $f(F) = \{0\}$ و $f(E) = \{1\}$.

عندئذٍ فإنَّ $\left\{x \in \mathbb{X} \;\;:\;\; 0 \leq f(x) < \frac{1}{2}\right\} = f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right[\right)$ مجموعةٌ مفتوحةٌ في $\mathbb{X}$ كونها الخيال العكسي لمجموعةٍ مفتوحةٍ $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ في المستقر $[0,1]$ وفق تطبيقٍ مستمرٍ f، وكذلك $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},1\right]\right)$.

كما أنَّ $F \subseteq f^{-1}(\{0\}) \subseteq f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right[\right)$ و $E \subseteq f^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},1\right]\right)$.

خُذْ $\mathcal{O}_F = f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right[\right)$ و $\mathcal{O}_E = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},1\right]\right)$ نجد أنَّ $F \subseteq \mathcal{O}_F$ و $E \subseteq \mathcal{O}_E$ و

$$\mathcal{O}_E \cap \mathcal{O}_F = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},1\right]\right) \cap f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right[\right) = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2},1\right] \cap \left[0,\frac{1}{2}\right[\right) = f^{-1}(\phi) = \phi$$

$(\boldsymbol{d_4}) \Leftarrow (\boldsymbol{d_3})$

الفقرة المساعدة:

لتكن F مجموعةً غيرَ خاليةٍ ومغلقةً في $(\mathbb{X},\tau)$ وليكن $g : F \longrightarrow [-r,r]$ (حيث $r > 0$) تطبيقاً مستمراً.

لنجزء الفترة $[-r,r]$ إلى ثلاث فترات متساوية الطّول كما يلي:

$$I_1 = \left[-r,\frac{-r}{3}\right] \qquad I_2 = \left[\frac{-r}{3},\frac{r}{3}\right] \qquad I_3 = \left[\frac{r}{3},r\right]$$

لتكن $B = g^{-1}(I_1)$ و $C = g^{-1}(I_3)$، فإنَّ B و C مجموعتان جزئيتان غيرُ متقاطعتين من F.

وبما أنَّ التّطبيق g مستمرٌ فإنَّ المجموعتين B و C مغلقتان في F، لذا هما مغلقتان في $\mathbb{X}$.

حسب تمهيديّة يوريسون يوجدُ تطبيقٌ مستمرٌ:

$$\psi : \mathbb{X} \longrightarrow \left[\frac{-r}{3},\frac{r}{3}\right]$$

بحيث $\psi(B) = \left\{\frac{-r}{3}\right\}$ و $\psi(C) = \left\{\frac{r}{3}\right\}$.

عندئذٍ لأيِّ $x \in \mathbb{X}$ فإنَّ $|\psi(x)| \le \frac{r}{3}$ ولأيِّ $a \in F$ نلاحظ أنَّ: $|g(a) - \psi(a)| \le \frac{2r}{3}$.

لنفرض أنَّ $r = 1$ أي $[-r,r] = [-1,1]$.

ليكن $g : F \longrightarrow [-1,1]$ تطبيقاً مستمراً.

حسب الفقرة المساعدة، حيث $r = 1$، يوجدُ تطبيقٌ f_1 معرَّفٌ ومستمرٌ على $\mathbb{X}$ بحيث أنَّ:

$$\forall x \in \mathbb{X} \;:\; |f_1(x)| \le \frac{1}{3} \quad , \quad \forall a \in F \;:\; |g(a) - f_1(a)| \le \frac{2}{3}$$

إنَّ التّطبيق $g - f_1 : F \longrightarrow \left[\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right]$ مستمرٌ.

حسب الفقرة المساعدة، حيث $r = \frac{2}{3}$، يوجدُ تطبيقٌ f_2 معرَّفٌ ومستمرٌ على $\mathbb{X}$ بحيث أنَّ:

$$\forall x \in \mathbb{X} \;:\; |f_2(x)| \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) \quad , \quad \forall a \in F \;:\; |g(a) - f_1(a) - f_2(a)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

إنَّ التّطبيق $g - f_1 - f_2 : F \longrightarrow \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^2,\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]$ مستمرٌ.

حسب الفقرة المساعدة، حيث $r = \left(\frac{2}{3}\right)^2$، يوجدُ تطبيقٌ f_3 معرَّفٌ ومستمرٌ على $\mathbb{X}$ بحيث أنَّ:

$$\forall x \in \mathbb{X} \ : \ |f_3(x)| \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \ , \ \forall a \in F \ : \ |g(a) - f_1(a) - f_2(a) - f_3(a)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

وبالتّكرار بنفس الأسلوب إنَّ $f_1, f_2, \dots, f_n$ تطبيقاتٌ معرَّفةٌ ومستمرةٌ على $\mathbb{X}$ تحقّق:

$$\forall a \in F \ : \ |g(a) - f_1(a) - f_2(a) - \cdots - f_n(a)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

حسب الفقرة المساعدة، حيث $r = \left(\frac{2}{3}\right)^n$، يوجدُ تطبيقٌ f_{n+1} معرَّفٌ ومستمرٌ على $\mathbb{X}$ بحيث أنَّ:

$$\forall x \in \mathbb{X} \ : \ |f_{n+1}(x)| \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \ , \forall a \in F \ : \ |g(a) - f_1(a) - \cdots - f_{n+1}(a)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

بالإستقراء الرّياضي تُعرَّفُ التّطبيقات f_n لأيِّ $n \in \mathbb{N}$.

ولتكن :

$$\forall x \in \mathbb{X} \quad : \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

إنَّ المتسلسلة السّابقة متقاربةٌ وذلك بمقارنتها مع المتسلسلة الهندسيّة $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ المتقاربة.

لتكن متتالية التّطبيقات $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مُعرَّفةً لأجل $n \in \mathbb{N}$ كما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{X} \quad : \quad \phi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

لبيان أنَّ التّطبيق f مستمرٌ يجب بيان أنَّ المتتالية $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربةٌ بإنتظامٍ من f.

لأجل $k > n$ فإنَّ:

$$|\phi_k(x) - \phi_n(x)| = \left|\sum_{i=n+1}^{k} f_i(x)\right| \le \frac{1}{3}\sum_{i=n+1}^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} < \frac{1}{3}\sum_{i=n+1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

بتثبيت n وجعل $k \longrightarrow +\infty$ ينتج أنَّ:

$$\forall x \in \mathbb{X} \quad : \quad |f(x) - \phi_n(x)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

لذا تتقارب المتتالية $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بإنتظامٍ من f.

لنثبت أنَّ $g(a) = f(a)$ لأيِّ $a \in F$:

بما أنَّ $\phi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ المجموع الجزئي النّوني للمتسلسلة، فإنَّ f نهاية متتالية المجاميع الجزئية $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

بما أنَّ:

$$\forall a \in F \quad : \quad \left| g(a) - \sum_{i=1}^{n} f_i(a) \right| = |g(a) - \phi_n(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ينتج أنَّ $\phi_n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(a)$ لأيِّ $a \in F$، لذلك فإنَّ $g(a) = f(a)$ لأيِّ $a \in F$.

لنثبت أنَّ $f(\mathbb{X}) \subseteq [-1,1]$:

لأيِّ $x \in \mathbb{X}$ فإنَّ:

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1$$

ومنه $|f(x)| \leq 1$ أي $-1 \leq f(x) \leq 1$، وبالتّالي : $f(\mathbb{X}) \subseteq [-1,1]$.

لأجل تطبيقٍ مستمرٍ $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ يمكن إستبدال $\mathbb{R}$ بالمجال المفتوح $]-1,1[$ نظراً لأنَّ هذا المجال هوميومورفيٌّ $(homeomorphic)$ مع $\mathbb{R}$.

ليكن $g : F \longrightarrow\ ]-1,1[$ تطبيقاً مستمراً.

وفق ما سبق يمكن تمديد g لتطبيقٍ مستمرٍ $f : \mathbb{X} \longrightarrow [-1,1]$.

لتكن D مجموعةً جزئيةً من $\mathbb{X}$ مُعرَّفةً كما يلي : $D = f^{-1}(\{-1\}) \cup f^{-1}(\{1\})$.

بما أنَّ f مستمرٌ فإنَّ D مجموعةٌ جزئيةٌ مغلقةٌ في $\mathbb{X}$.

بما أنَّ $f(F) = g(F) \subseteq\ ]-1,1[$، فإنَّ المجموعتين D و F غيرُ متقاطعتين.

حسب تمهيديّة يوريسون يوجدُ تطبيقٌ مستمرٌ:

$$\varphi : \mathbb{X} \longrightarrow [0,1]$$

بحيث $\varphi(D) = \{0\}$ و $\varphi(F) = \{1\}$.

ليكن:

$$h : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto h(x) = \varphi(x) \times f(x)$$

إنَّ h مستمرٌ لأَنَّهُ جداءٌ لتطبيقين مستمرين. كما أنَّ h مُمَدِّدٌ لِـ g لأنَّه أيّاً كان $a \in F$ فإنَّ :

$$h(a) = \varphi(a) \times f(a) = 1 \times f(a) = f(a) = g(a)$$

لنثبت أنَّ $h(\mathbb{X}) \subseteq\ ]-1,1[$:

إذا كان $x \in D$ فإنَّ: $h(x) = \varphi(x) \times f(x) = 0 \times f(x) = 0$.

إذا كان $x \notin D$ فإنَّ: $|f(x)| < 1$ ومنه : $|h(x)| \leq 1 \times |f(x)| < 1$.

وبالتّالي $h(\mathbb{X}) \subseteq]-1,1[$.

$$(d_1) \Leftarrow (d_4)$$

لتكن F و E مجموعتين غيرَ خاليتين ومغلقتين وغيرَ متقاطعتين من $\mathbb{X}$.

إنَّ $E \cup F$ مجموعةٌ غيرُ خاليةٍ ومغلقةٌ في $\mathbb{X}$.

لنعرِّف $g: E \cup F \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث $g(F) = \{0\}$ و $g(E) = \{1\}$.

إنَّ التّطبيق g مستمرٌ لأنَّهُ إذا كانت A مجموعةً مغلقةً في المستقر $\mathbb{R}$، نميّز الحالات التّالية:

(1) $0 \notin A$ و $1 \notin A$ فإنَّ $g^{-1}(A) = \phi$ وهي مجموعةٌ مغلقةٌ في المنطلق.

(2) $0 \in A$ و $1 \notin A$ فإنَّ $g^{-1}(A) = F$ وهي مجموعةٌ مغلقةٌ في المنطلق.

(3) $0 \notin A$ و $1 \in A$ فإنَّ $g^{-1}(A) = E$ وهي مجموعةٌ مغلقةٌ في المنطلق.

(4) $0 \in A$ و $1 \in A$ فإنَّ $g^{-1}(A) = E \cup F$ وهي مجموعةٌ مغلقةٌ في المنطلق.

حسب (d_4) يوجد لِـ g مُمَدَّدٌ مستمرٌ $f: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$.

عندئذٍ فإنَّ $\left\{x \in \mathbb{X} \quad : \quad -\infty < f(x) < \frac{1}{2}\right\} = f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\right)$ مجموعةٌ مفتوحةٌ في $\mathbb{X}$ كونها الخيال العكسي لمجموعةٍ مفتوحةٍ $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ في المستقر $\mathbb{R}$ وفق تطبيقٍ مستمرٍ f، وكذلك $f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right)$.

كما أنَّ $F \subseteq f^{-1}(\{0\}) \subseteq f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\right)$ و $E \subseteq f^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right)$.

خُذْ $\mathcal{O}_F = f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\right)$ و $\mathcal{O}_E = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right)$ نجد أنَّ $F \subseteq \mathcal{O}_F$ و $E \subseteq \mathcal{O}_E$ و

$$\mathcal{O}_E \cap \mathcal{O}_F = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) \cap f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\right) = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\cap \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\right) = f^{-1}(\phi) = \phi$$

(٨) قابلية العد في الفضاءات الطوبولوجية

صفحة 42

مبرهنة (2):

إذا كان $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً متريّاً، فإنَّ الدّعاوى التّالية متكافئةٌ:

(1) الفضاءُ $(\mathbb{X}, d)$ هو فضاءُ ليندليوف.

(2) الفضاءُ $(\mathbb{X}, d)$ قابلٌ للفصل.

(3) الفضاءُ $(\mathbb{X}, d)$ يتمتّعُ بقابلية العدّ الثّانية.

البرهان:

$(1) \Longrightarrow (2)$

لنفرض أنَّ $(\mathbb{X}, d)$ هو فضاءُ ليندليوف، ولنبرهن أنَّ الفضاءَ $(\mathbb{X}, d)$ قابلٌ للفصلِ.

لأيِّ $n \in \mathbb{N}$ إنَّ $\mathcal{B}_n = \left\{N\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in \mathbb{X}\right\}$ تغطيةٌ مفتوحةٌ لِـ $\mathbb{X}$.

بما أنَّ $\mathbb{X}$ هو فضاءُ ليندليوف، تحوي التّغطيةُ المفتوحةُ $\mathcal{B}_n$ (لأيِّ $n \in \mathbb{N}$) تغطيةً مفتوحةً عدودةً، ولتكن: $\mathcal{D}_n = \left\{N\left(x_{n,i}, \frac{1}{n}\right) : i \in \mathbb{N}\right\}$.

لتكن $\mathcal{D} = \{x_{n,i} : n \in \mathbb{N} \quad i \in \mathbb{N}\}$. من الواضح أنَّ $\mathcal{D}$ مجموعةٌ عدودةٌ، ولنبرهن أنَّ $\overline{\mathcal{D}} = \mathbb{X}$.

لتكن $N(y, r)$ (حيث $y \in \mathbb{X}$ و $r > 0$) كرةً مفتوحةً في $\mathbb{X}$.

لنختر $m \in \mathbb{N}$ بحيث أنَّ $\frac{1}{m} < r$، عندئذٍ فإنَّ $N\left(y, \frac{1}{m}\right) \subseteq N(y, r)$.

بما أنَّ $\mathcal{D}_m$ (لأجل هذا الـ m) تغطيةٌ مفتوحةٌ لِـ $\mathbb{X}$، توجدُ $N\left(x_{m,k}, \frac{1}{m}\right) \in \mathcal{D}_m$ (لأجل $k \in \mathbb{N}$) بحيث أنَّ $y \in N\left(x_{m,k}, \frac{1}{m}\right)$، أي $d(y, x_{m,k}) < \frac{1}{m}$.

لذلك $x_{m,k}$ (الذي هو من $\mathcal{D}$) ينتمي إلى $N\left(y, \frac{1}{m}\right)$، أي $N(y, r) \supseteq N\left(y, \frac{1}{m}\right)$، أي $\mathcal{D} \cap N(y, r) \neq \phi$.

ولمّا كانت $N(y, r)$ كرةً مفتوحةً كيفيّةً في $\mathbb{X}$، نستنتج أنَّ $\overline{\mathcal{D}} = \mathbb{X}$.

ومنه توجدُ مجموعةٌ جزئيةٌ $\mathcal{D}$ عدودةٌ وكثيفةٌ، وبالتّالي الفضاءُ $\mathbb{X}$ فصولٌ.

$(3) \Longleftarrow (2)$

لنفرض أنَّ $(\mathbb{X}, d)$ قابلٌ للفصلِ، ولنبرهن أنَّ الفضاءَ $(\mathbb{X}, d)$ يتمتّعُ بقابلية العدّ الثّانية.

بما أنَّ الفضاءَ $\mathbb{X}$ قابلٌ للفصلِ، فإنَّ $\mathbb{X}$ يحوي مجموعةً جزئيةً $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, .., a_n, ..\}$ عدودةً وكثيفةً.

لتكن $\mathcal{B}$ صفَّ الكرات المفتوحة التي مراكزها من $\mathcal{A}$ وأنصاف أقطارها من $\mathbb{Q}$، أي:

$$\mathcal{B} = \{N(a, \delta) \quad : \quad a \in \mathcal{A} \quad \delta \in \mathbb{Q}\}$$

لاحظ أنَّ $\mathcal{B}$ عدودةٌ.

لنبرهن أنَّ $\mathcal{B}$ (تصلح) قاعدة للتبولوجيا على $\mathbb{X}$، أي لأيِّ مجموعةٍ مفتوحةٍ $G \subseteq \mathbb{X}$، وأيِّ $p \in G$ توجدُ كرةٌ مفتوحةٌ $N(a, \delta)$ من $\mathcal{B}$ بحيث أنَّ $p \in N(a, \delta) \subseteq G$.

بما أنَّ $p \in G$ و G مجموعةٌ مفتوحةٌ توجدُ كرةٌ مفتوحةٌ $N(p, \varepsilon)$ (مركزها p ونصف قطرها $\varepsilon > 0$) بحيث أنَّ $p \in N(p, \varepsilon) \subseteq G$.

بما أنَّ المجموعةَ $\mathcal{A}$ كثيفةٌ، تلاقي الكرةُ المفتوحةُ $N\left(p, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ المجموعةَ $\mathcal{A}$، أي يوجدُ $a_{i_0} \in \mathcal{A}$ بحيث $a_{i_0} \in N\left(p, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ ومنه $d\left(a_{i_0}, p\right) < \frac{\varepsilon}{3}$.

ليكن δ_0 عدداً عادياً يحقّق المتراجحة $\frac{\varepsilon}{3} < \delta_0 < \frac{2\varepsilon}{3}$، نلاحظ أنَّ $p \in N\left(a_{i_0}, \delta_0\right) \subseteq N(p, \varepsilon) \subseteq G$.

وذلك لأنَّ:

$$d\left(a_{i_0}, p\right) < \frac{\varepsilon}{3} < \delta_0 \quad \Longrightarrow \quad p \in N\left(a_{i_0}, \delta_0\right)$$

كما أنَّ:

إذا كان $x \in N\left(a_{i_0}, \delta_0\right)$ فإنَّ $d\left(a_{i_0}, x\right) < \delta_0$، ومنه:

$$d(x, p) \leq d\left(x, a_{i_0}\right) + d\left(a_{i_0}, p\right) < \delta_0 + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

أي $x \in N(p, \varepsilon)$.

ومنه $p \in N\left(a_{i_0}, \delta_0\right) \subseteq G$، لكن $N\left(a_{i_0}, \delta_0\right)$ من $\mathcal{B}$. إذن $\mathcal{B}$ قاعدةٌ للتبولوجيا على $\mathbb{X}$.

$(1) \Longleftarrow (3)$

لنفرض أنَّ $(\mathbb{X}, d)$ يتمتّعُ بقابلية العدّ الثّانية، ولنبرهن أنَّ الفضاءَ $(\mathbb{X}, d)$ هو فضاءُ ليندليوف.

لتكن $\mathcal{B} = \{B_n \; : \; n \in \mathbb{N}\}$ قاعدةً عدودةً للفضاء $\mathbb{X}$ (كون $\mathbb{X}$ يتمتّعُ بقابلية العدّ الثّانية).

لتكن $\mathcal{A}$ تغطيةً مفتوحةً للفضاء $\mathbb{X}$.

لنفرض أنَّ $A \neq \phi$ لأيِّ $A \in \mathcal{A}$، و $B_n \neq \phi$ لأيِّ $n \in \mathbb{N}$.

لأجل $A \in \mathcal{A}$ و $x \in A$، بما أنَّ A مجموعةٌ مفتوحةٌ في الفضاء $\mathbb{X}$ و $\mathcal{B}$ قاعدةٌ للفضاء $\mathbb{X}$ توجدُ B من $\mathcal{B}$ بحيث أنَّ $x \in B \subseteq A$. $(*)$

لأجل $n \in \mathbb{N}$ لتكن $\mathcal{F}_n = \{A \in \mathcal{A} \quad : \quad B_n \subseteq A\}$ (من الممكن أن تكون $\mathcal{F}_n = \phi$ لأجل بعض قيم n).

لاحظ أنَّ، حسب $(*)$، المجموعةَ $\{n \in \mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{F}_n \neq \phi\}$ مجموعةٌ غيرُ خاليةٍ، ولتكن:

$\{n \in \mathbb{N} \quad : \quad \mathcal{F}_n \neq \phi\} = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ (من الممكن أن تكون مجموعةً منتهيةً).

لأجل كل k لنختر $A_{n_k} \in \mathcal{F}_{n_k}$، والذي بدوره يقتضي $B_{n_k} \subseteq A_{n_k} \in \mathcal{A}$.

لنبرهن أنَّ $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{n_k} = \mathbb{X}$.

ليكن $x \in \mathbb{X}$، بما أنَّ $\mathcal{A}$ تغطيةٌ مفتوحةٌ للفضاء $\mathbb{X}$ توجدُ $A \in \mathcal{A}$ (واحدةٌ على الأقل) بحيث أنَّ $x \in A$.

إنَّ $x \in A$ و A مجموعةٌ مفتوحةٌ في الفضاء $\mathbb{X}$ و $\mathcal{B}$ قاعدةٌ للفضاء $\mathbb{X}$، ومنه يوجدُ $k \in \mathbb{N}$ بحيث أنَّ:

$x \in B_{n_k} \subseteq A$، والذي يقتضي $A \in \mathcal{F}_{n_k}$، كما أنَّ $A_{n_k} \in \mathcal{F}_{n_k}$.

حسب تعريف $\mathcal{F}_{n_k}$ فإنَّ $B_{n_k} \subseteq A_{n_k}$ ومنه $x \in A_{n_k}$ لأجل $k \in \mathbb{N}$.

ومنه $\mathbb{X} \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{n_k}$، وبالتّالي $\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{n_k}$.

أي $\left(A_{n_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ تغطيةٌ عدودةٌ لـِ $\mathbb{X}$ جزئيةٌ من التّغطية المفتوحة $\mathcal{A}$، ولمّا كانت $\mathcal{A}$ تغطيةً مفتوحةً كيفيّةً للفضاء $\mathbb{X}$ نستنتج أنَّ $\mathbb{X}$ فضاءُ ليندليلوف.

(٩) مبرهنة الرّص بإضافة نقطة واحدة أو رص الكسندروف

ليكن $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً T_2 ومُتراصّاً موضعيّاً (محلّيّاً) وغيرَ مُتراصٍّ، وليكن ∞ غيرَ مُنتمٍ إلى $\mathbb{X}$، ولنكوّن المجموعة $\mathbb{X}_\infty = \mathbb{X} \cup \{\infty\}$. ولتكن τ_∞ جماعةً من المجموعات الجزئية من $\mathbb{X}_\infty$ مُؤلَّفةً من المجموعات التّالية: عناصر τ، ومتممات المجموعات الجزئية المُتراصّة في $(\mathbb{X},\tau)$، والمجموعة $\mathbb{X}_\infty$ بكاملها، عندئذٍ:

(1) تكوّنُ τ_∞ تبولوجيا على $\mathbb{X}_\infty$، كما يكونُ $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً جزئيّاً كثيفاً من $(\mathbb{X}_\infty,\tau_\infty)$.

(2) $(\mathbb{X}_\infty,\tau_\infty)$ فضاءٌ مُتراصٌّ.

(3) $(\mathbb{X}_\infty,\tau_\infty)$ فضاءُ T_2.

نُسمِّي هذا الفضاء رصَّ الكسندروف أو رصّاً وحيد النّقطة للفضاء $(\mathbb{X},\tau)$، ونُسمِّي ∞ النّقطة المثالية $ideal\ point$، أو النّقطة في اللّانهاية $point\ at\ infinity$.

البرهان:

$$\mathbb{X}_\infty = \mathbb{X} \cup \{\infty\} \qquad \tau_\infty = \tau \cup \underbrace{\left\{\mathbb{X}_\infty - K \ : \ \text{مُتراصّةٌ } K \subseteq \mathbb{X}\right\}}_{\tau'} \cup \{\mathbb{X}_\infty\}$$

(1) τ_∞ تبولوجيا على $\mathbb{X}_\infty$:

إنَّ $\phi \in \tau \subseteq \tau_\infty$ ومنه $\phi \in \tau_\infty$، و $\mathbb{X}_\infty \in \tau_\infty$ فرضاً.

إذا كانت A و B من τ_∞، لنبرهن أنّ $A \cap B$ من τ_∞.

نُميّزُ ثلاثَ حالاتٍ:

(a) إذا كانت A و B من τ، فإنَّ $A \cap B$ من τ، ومنه $A \cap B$ من τ_∞.

(b) إذا كانت A و B من τ'، فإنَّ $A = K_1^c$ و $B = K_2^c$ حيث كل من K_1 و K_2 مجموعةٌ مُتراصَّةٌ في $\mathbb{X}$. وإنَّ:

$$A \cap B = K_1^c \cap K_2^c = (K_1 \cup K_2)^c$$

إنَّ $K_1 \cup K_2$ مجموعةٌ مُتراصَّةٌ في $\mathbb{X}$ (كونها اتحاد لمجموعتين مُتراصَّتين)، لذا $(K_1 \cup K_2)^c \in \tau'$، ومنه $A \cap B$ من τ_∞.

(c) إذا كانت A من τ و B من τ'، فإنَّ $B = K^c$ حيث K مجموعةٌ مُتراصَّةٌ في فضاء $\mathbb{X}$ الهاوسدورف فهي مُغلقةٌ في $\mathbb{X}$، ومنه $\mathbb{X} - K$ مجموعةٌ مفتوحةٌ في $\mathbb{X}$، أي $\mathbb{X} - K \in \tau$، ومنه:

$$A \cap B = A \cap (\mathbb{X}_\infty - K) = A \cap (\mathbb{X} - K) \in \tau \subseteq \tau_\infty$$

ومنه $A \cap B$ من τ_∞.

إذا كانت $(A_i)_{i\in I}$ من τ_∞، لنبرهن أنَّ $\bigcup_{i\in I} A_i$ من τ_∞.

نُميّزُ ثلاثَ حالاتٍ:

(a) إذا كانت $(A_i)_{i\in I}$ من τ، فإنَّ $\bigcup_{i\in I} A_i$ من τ، ومنه $\bigcup_{i\in I} A_i$ من τ_∞.

(b) إذا كانت $(A_i)_{i\in I}$ من τ'، فإنَّ $A_i = K_i^c$ (لأيِّ $i \in I$) حيث K_i مجموعةٌ مُتراصَّةٌ في $\mathbb{X}$ الهاوسدورف فهي مُغلقةٌ، و:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} K_i^c = \left(\bigcap_{i\in I} K_i\right)^c = K^c$$

إنَّ K مجموعةٌ مُغلقةٌ (كونها تقاطع لمجموعاتٍ مُغلقةٍ) جزئيةٌ من المجموعة K_1 (مثلاً) المُتراصَّة، فهي مُتراصَّةٌ في $\mathbb{X}$ ، لذا $K^c \in \tau'$، ومنه $\bigcup_{i\in I} A_i$ من τ_∞.

(c) إذا كانت $(A_\alpha)_{\alpha\in I_1}$ من τ، و $(A_\beta)_{\beta\in I_2}$ من τ' حيث $I_1 \cup I_2 = I$.

$$\bigcup_{\alpha\in I_1} A_\alpha = A \in \tau \subseteq \tau_\infty$$

$$\bigcup_{\beta\in I_2} A_\beta = \bigcup_{\beta\in I_2} K_\beta^c = \left(\bigcap_{\beta\in I_2} K_\beta\right)^c = K^c \in \tau' \subseteq \tau_\infty$$

ومنه:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{\alpha\in I_1} A_\alpha \cup \bigcup_{\beta\in I_2} A_\beta = A \cup K^c = (A^c \cap K)^c$$

إنَّ K مجموعةٌ مُتراصَّةٌ في $\mathbb{X}$ الهاوسدورف فهي مُغلقةٌ في $(\mathbb{X},\tau)$، و A مجموعةٌ مفتوحةٌ في $(\mathbb{X},\tau)$ فإنَّ A^c مجموعة مُغلقةٌ في $(\mathbb{X},\tau)$، وبما أنَّ $A^c \cap K$ مجموعةٌ مُغلقةٌ جزئيةٌ من المجموعة K المُتراصَّة، فإنَّ $A^c \cap K$ مُتراصَّةٌ في $(\mathbb{X},\tau)$، ومنه $(A^c \cap K)^c \in \tau' \subseteq \tau_\infty$.

لنثبت أنَّ $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءٌ جزئيٌّ كثيفٌ في $(\mathbb{X}_\infty,\tau_\infty)$.

إنَّ $\mathbb{X} \subseteq CL(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{X}_\infty$، لنثبت أنَّ $\infty \in CL(\mathbb{X})$ فيتم المطلوب.

ليكن U جواراً لـِ ∞، فإنَّ $U = K^c$ حيث K مجموعةٌ جزئيّةٌ مُتراصَّةٌ في $\mathbb{X}$.

ولمّا كان $\mathbb{X}$ غيرُ مُتراصٍّ فإنَّ $K \neq \mathbb{X}$، ومنه الجوار $U = \mathbb{X}_\infty - K = \underbrace{(\mathbb{X} - K)}_{\neq\phi} \cup \{\infty\}$ يحوي نقاطاً من $\mathbb{X}$

أي $\infty \in CL(\mathbb{X})$، وبالتّالي $CL(\mathbb{X}) = \mathbb{X}_\infty$.

(2) $(\mathbb{X}_\infty, \tau_\infty)$ فضاءٌ مُتراصٌّ.

لتكن $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$ تغطيةً مفتوحةً لِـ $\mathbb{X}_\infty$، أي: $\mathbb{X}_\infty = \bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{O}_\alpha$.

بما أنَّ $\infty \in \mathbb{X}_\infty$ و $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$ تغطيةٌ لِـ $\mathbb{X}_\infty$، توجدُ $\alpha_0 \in A$ بحيث أنَّ $\infty \in \mathcal{O}_{\alpha_0}$.

إنَّ $\mathcal{O}_{\alpha_0} = K^c$ حيث K مجموعةٌ مُتراصَّةٌ في $\mathbb{X}$.

إنَّ $\{\mathcal{O}_\alpha \cap \mathbb{X} \;:\; \alpha \in A - \{\alpha_0\}\}$ تغطيةٌ مفتوحةٌ لِـ K المُتراصَّة في $\mathbb{X}$، ومنه توجدُ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ من $A - \{\alpha_0\}$ بحيث أنَّ: $K \subseteq (\mathcal{O}_{\alpha_1} \cap \mathbb{X}) \cup (\mathcal{O}_{\alpha_2} \cap \mathbb{X}) \cup \dots \cup (\mathcal{O}_{\alpha_n} \cap \mathbb{X})$، ومنه:

$$\mathbb{X}_\infty = K^c \cup K \subseteq \mathcal{O}_{\alpha_0} \cup \mathcal{O}_{\alpha_1} \cup \mathcal{O}_{\alpha_2} \cup \dots \cup \mathcal{O}_{\alpha_n} \subseteq \mathbb{X}_\infty \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{X}_\infty = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{O}_{\alpha_i}$$

أي أنَّ $\{\mathcal{O}_{\alpha_0}, \mathcal{O}_{\alpha_1}, \mathcal{O}_{\alpha_2}, \dots, \mathcal{O}_{\alpha_n}\}$ تغطيةٌ جزئيةٌ منتهيةٌ لِـ $\mathbb{X}_\infty$ من التّغطية الكيفيّة $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$.

وبالتّالي الفضاء $(\mathbb{X}_\infty, \tau_\infty)$ مُتراصٌّ.

(3) $(\mathbb{X}_\infty, \tau_\infty)$ فضاءٌ T_2.

لتكن x و y من $\mathbb{X}_\infty$ بحيث أنَّ $x \neq y$، نُميّزُ حالتين:

(a) x و y من $\mathbb{X}$:

بما أنَّ $\mathbb{X}$ فضاءٌ T_2 توجدُ $\mathcal{O}_x \in \mathcal{V}_x$ و $\mathcal{O}_y \in \mathcal{V}_y$ بحيث أنَّ $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \phi$.

(b) $x = \infty$ و $y \in \mathbb{X}$:

بما أنَّ $\mathbb{X}$ مُتراصٌّ محلّيّاً، يوجدُ جوارٌ $\mathcal{W}$ لِـ y ذو لصاقةٍ $\overline{\mathcal{W}}$ مُتراصَّةٍ في $\mathbb{X}$، لذا $\overline{\mathcal{W}}^c$ جوارٌ لِـ $x = \infty$ في $\mathbb{X}_\infty$، خُذْ $\mathcal{O}_x = \overline{\mathcal{W}}^c$ و $\mathcal{O}_y = \mathcal{W}$ نرى أنَّ $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \phi$.

(١٠) التّراصُّ في الفضاءات المترية

تعريف:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً:

(a) تُسمَّى جماعةٌ $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$ من المجموعات المفتوحة من $\mathbb{X}$ تغطيةً مفتوحةً لـِ $\mathbb{X}$ إذا انتمى كلُّ عنصر x من $\mathbb{X}$ لواحدةٍ على الأقل من المجموعات $\mathcal{O}_\alpha$ $(\alpha \in A)$، وتكون التّغطيةُ المفتوحةُ منتهيةً إذا كانت مجموعةُ الأدلةِ A مجموعةً منتهيةً.

(b) يُقالُ إنَّ الفضاءَ المتري $(\mathbb{X}, d)$ مُتراصٌّ إذا حوت كلُّ تغطيةٍ مفتوحةٍ لـِ $\mathbb{X}$ تغطيةً جزئيةً منتهيةً لـِ $\mathbb{X}$.

تعريف:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً، و E مجموعةً جزئيةً من $\mathbb{X}$. يُقالُ إنَّ المجموعةَ E مُتراصَّةٌ إذا كان الفضاءُ المتريُ $(E, d|_E)$ مُتراصّاً.

مثال:

(1) كلُّ فضاءٍ متري منتهٍ لابُدَّ وأن يكون مُتراصّاً. (برِّر)

(2) لنأخذ $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ إنَّ المجموعة $K = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ مُتراصَّةٌ. (برِّر)

نتيجة:

في أيِّ فضاءٍ متري إذا أضفنا لمجموعة قيم متتالية متقاربة نهايتها نحصل على مجموعةٍ مُتراصَّةٍ.

تعريف:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً، و E مجموعةً جزئيةً من $\mathbb{X}$. يُقالُ إنَّ المجموعةَ E مُتراصَّةٌ نسبيّاً إذا كانت اللّصاقة $\bar{E}$ مجموعةً مُتراصَّةً في $\mathbb{X}$.

تعريف:

يُقالُ إنَّ الفضاءَ المتري $(\mathbb{X}, d)$ مُتراصٌّ بالتّوالي إذا حوت كلُّ متتاليةٍ من عناصر $\mathbb{X}$ متتاليةً جزئيةً متقاربة.

تعريف:

يُقالُ إنَّ الفضاءَ المتري $(\mathbb{X}, d)$ محدودٌ كلّيّاً:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{X} \quad \mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i, \varepsilon)$$

وتُسمَّى المجموعة الجزئية A شبكة $-\varepsilon$ لِـ $\mathbb{X}$.

مبرهنة:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً، القضايا التّالية متكافئة:

(1) الفضاءُ $\mathbb{X}$ مُتراصٌّ.

(2) لكلِّ مجموعةٍ جزئيةٍ غيرِ منتهيةٍ من $\mathbb{X}$ نقطة تجمع (واحدة على الأقل).

(3) الفضاءُ $\mathbb{X}$ مُتراصٌّ بالتّوالي، أي تحوي كلُّ متتاليةٍ من عناصر $\mathbb{X}$ متتاليةً جزئيةً متقاربةً.

(4) الفضاءُ $\mathbb{X}$ محدودٌ كلّيّاً وتام.

نورد لكم الآن تمهيديات نصوصها هامة جداً إلا أن التمهيديات من ١ و حتى ٧ غير مطلوبٍ برهانها

تمهيدية (1):

كلُّ مجموعةٍ جزئيةٍ مُغلقةٍ من فضاءٍ متري مُتراصٍّ لابُدَّ وأن تكون مُتراصَّةً.

البرهان:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً مُتراصّاً، و F مجموعةً جزئيةً مُغلقةً من $\mathbb{X}$، و $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha \in A}$ تغطيةً مفتوحةً لِـ F.

بما أنَّ F مجموعةٌ مُغلقةٌ من $\mathbb{X}$ فإنَّ F^c مجموعةٌ مفتوحةٌ من $\mathbb{X}$.

تشكِّلُ الأسرة $\Gamma = \{F^c, \mathcal{O}_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ تغطيةً مفتوحةً للفضاء $\mathbb{X}$ المُتراصّ، لذا توجدُ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ من A بحيث أنَّ $\mathbb{X} = F^c \cup \mathcal{O}_{\alpha_1} \cup \mathcal{O}_{\alpha_2} \cup \dots \cup \mathcal{O}_{\alpha_n}$، ومنه $F \subseteq \mathcal{O}_{\alpha_1} \cup \mathcal{O}_{\alpha_2} \cup \dots \cup \mathcal{O}_{\alpha_n}$، أي أنَّ $\{\mathcal{O}_{\alpha_1}, \mathcal{O}_{\alpha_2}, \dots, \mathcal{O}_{\alpha_n}\}$ تغطيةٌ منتهيةٌ لِـ F جزئيةٌ من التّغطية الأصلية $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha \in A}$، ولمّا كانت $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha \in A}$ تغطيةً مفتوحةً كيفيّةً لِـ F نستنتج أنَّ المجموعة F مُتراصَّةٌ.

تمهيدية (2):

الشّرط اللّازم والكافي ليكون فضاءٌ متريٌّ $(\mathbb{X}, d)$ مُتراصّاً بالتّوالي هو أن يكون لكلّ مجموعةٍ جزئيةٍ غيرِ منتهيةٍ نقطة تجمع (واحدة على الأقل).

البرهان:

لنفرض أنَّ $(\mathbb{X}, d)$ فضاءٌ متريٌّ مُتراصٌّ بالتّوالي، ولنبرهن أنَّ لكلِّ مجموعةٍ جزئيةٍ غيرِ منتهيةٍ نقطة تجمع (واحدة على الأقل).

لتكن $\mathbb{Y}$ مجموعةً جزئيةً غيرَ منتهيةٍ من $\mathbb{X}$، و $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليةً من العناصر المختلفة من $\mathbb{Y}$، فإنَّ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليةٌ من عناصر $\mathbb{X}$.

بما أنَّ الفضاءَ $(\mathbb{X}, d)$ مُتراصٌّ بالتّوالي تحوي المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليةً جزئيةً $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ متقاربةً من عنصرٍ $a \in \mathbb{X}$ وإنَّ النّهاية a هي نقطة تجمع للمجموعة $\mathbb{Y}$.

لنفرض أنَّ لكلِّ مجموعةٍ جزئيةٍ غيرِ منتهيةٍ نقطة تجمع (واحدة على الأقل)، ولنبرهن أنَّ الفضاءَ المتري $(\mathbb{X}, d)$ مُتراصٌّ بالتّوالي.

لتكن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليةً من عناصر الفضاء $\mathbb{X}$، إذا وجد $a \in \mathbb{X}$ بحيث أنَّ $a_n = a$ لأجل عدد غير منتهٍ من قيم n، فإنَّ المتتالية $\{a, a, \dots, a, \dots\}$ متتاليةٌ جزئيةٌ من المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربةٌ من a.

إذا تكرَّر كلُّ عنصرٍ من عناصر المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ عدداً منتهياً من المرّات، لنختر المتتالية الجزئية $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ التي عناصرها مختلفة مثنى مثنى، حسب الفرض للمجموعة $\{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots\}$ نقطة تجمع (واحدة على الأقل) ويمكن اختيار متتالية جزئية متقاربة من نقطة التجمع تلك وستكون هذه المتتالية جزئية من $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

تمهيدية (3):

كلُّ فضاءٍ متري مُتراصٍّ لابُدَّ وأن يكون مُتراصّاً بالتّوالي.

البرهان:

حسب التمهيدية (2) يجب إثبات أنَّ لكلِّ مجموعةٍ جزئيةٍ غيرِ منتهيةٍ نقطة تجمع (واحدة على الأقل).

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً مُتراصّاً، ولتكن $\mathbb{Y}$ مجموعةً جزئيةً غيرَ منتهيةٍ من $\mathbb{X}$، ولنبرهن أنَّ لِـ $\mathbb{Y}$ نقطة تجمع (واحدة على الأقل).

لنفرض مؤقتاً أنَّ $\mathbb{Y}$ لا نقاط تجمع لها، عندئذٍ لأيِّ $y \in \mathbb{Y}$ توجدُ كرةٌ مفتوحةٌ $N(y, \varepsilon_y)$ لاتحوي سوى العنصر y من $\mathbb{Y}$.

بما أنَّ $\mathbb{Y}' = \phi \subseteq \mathbb{Y}$ فإنَّ المجموعة $\mathbb{Y}$ مجموعةٌ مُغلقةٌ من الفضاء $\mathbb{X}$ المتراصّ حسب التّمهيدية (1) إنَّ المجموعة $\mathbb{Y}$ مُتراصَّةٌ.

لأيِّ $y \in \mathbb{Y}$ إنَّ المجموعة وحيدة العنصر $\{y\}$ مجموعةٌ مفتوحةٌ في الفضاء المتري $(\mathbb{Y}, d|_{\mathbb{Y}})$ (لأنّها أثر الكرة المفتوحة $N(y, \varepsilon_y)$ في الفضاء المتري $(\mathbb{X}, d)$ على المجموعة الجزئية $\mathbb{Y}$).

ولمّا كانت المجموعةُ $\mathbb{Y}$ غيرَ منتهيةٍ تشكِّلُ الجماعةُ $\Gamma = \{\{y\} \ : \ y \in \mathbb{Y}\}$ تغطيةً مفتوحةً لِـ $\mathbb{Y}$، وهذه التّغطية Γ لاتحوي تغطيةً جزئيةً منتهيةً لِـ $\mathbb{Y}$ المُتراصّة، وهذا تناقض ومنه الفرض المؤقت خاطئ أي لابُدَّ وأن يكون للمجموعة $\mathbb{Y}$ نقطة تجمع واحدة على الأقل، وبالتّالي الفضاء المتري $(\mathbb{X}, d)$ مُتراصٌّ بالتّوالي.

تمهيدية (4):

كلُّ مجموعةٍ جزئيةٍ مُتراصَّةٍ بالتّوالي من فضاءٍ متري لابُدَّ وأن تكون محدودةً ومغلقةً.

البرهان:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً، ولتكن K مجموعةً جزئيةً مُتراصَّةً بالتّوالي من $\mathbb{X}$.

لنثبت -أوّلاً- أنَّ المجموعةَ K محدودةٌ، أي أنَّ قطر K المُعطى بِـ:

$$\delta(K) = sup\{d(x, y) \ : \ x, y \in K\}$$

منتهٍ.

لنفرض مؤقتاً أنَّ $\delta(K) = +\infty$، عندئذٍ لأجل $y_1 \in K$ مثبت يوجد $y_2 \in K$ بحيث أنَّ $d(y_1, y_2) > 1$.

بما أنَّ $\delta(K) = +\infty$، يوجدُ $y_3 \in K$ بحيث أنَّ $d(y_1, y_3) > 1 + d(y_1, y_2)$.

بالمتابعة بحيث لأي $n \in \{2,3, \dots\}$ نختار y_n بحيث أنَّ $d(y_1, y_n) > 1 + d(y_1, y_{n-1})$.

التي بدورها تقتضي أنَّ $d(y_1, y_m) > 1 + d(y_1, y_n)$ لأجل $m > n$، وحسب متراجحة المثلّث نجد أنَّ:

$$d(y_n, y_m) \geq |d(y_1, y_m) - d(y_1, y_n)| > 1$$

لذلك لاتحوي المتتالية $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من عناصر المجموعة K المُتراصَّة بالتّوالي متتاليةً جزئيةً متقاربةً، وهذا تناقض، ومنه الفرض الوقت خاطئ لذلك $\delta(K) < +\infty$ أي المجموعة K محدودة.

لنثبت -الآن- أنَّ المجموعة K مُغلقةٌ.

لتكن $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتاليةً من عناصر K متقاربةً من $a \in \mathbb{X}$، لنثبت أنَّ $a \in K$ لتكون K مُغلقةً.

بما أنَّ المجموعةَ K مُتراصَّةٌ بالتّوالي تحوي المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليةً جزئيةً $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ متقاربةً من عنصرٍ $\bar{a} \in K$، بيد أنَّ المتتالية الأصلية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربةٌ من a، لذا نجد أنَّ $a = \bar{a} \in K$، وبالتّالي K مُغلقةٌ.

تمهيدية (5):

الفضاءُ المتري المُتراصُّ بالتّوالي لابُدَّ وأن يكون محدوداً كلّيّاً وتامّاً.

البرهان:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً مُتراصّاً بالتّوالي.

لنثبت أنَّ $\mathbb{X}$ محدودٌ كلّيّا.

ليكن $\varepsilon > 0$، و A مجموعة نقاط الفضاء $\mathbb{X}$ التي البعد فيما بينها أكبر أو يساوي ε (إذا كانت $p \in A$ و $q \in A$ بحيث $p \neq q$ فإنَّ $d(p,q) \geq \varepsilon$)، ولنبرهن أنَّ المجموعةَ A منتهيةٌ.

لنفرض مؤقتاً أنَّ المجموعةَ A غيرُ منتهيةٍ، لذا يمكن بناء متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathbb{X}$ بحيث $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ طالما $m \neq n$. من الواضح أنَّ المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لا يمكن أن تحوي متتاليةً جزئيةً متقاربةً، وهذا تناقض كون الفضاء $\mathbb{X}$ مُتراصٌّ بالتّوالي، ومنه الفرض المؤقت خاطئ أي المجموعة A منتهية.

لنثبت $p_1 \in A$، إذا كان ممكناً أن نختار $p_2 \in A$ بحيث $d(p_1, p_2) \geq \varepsilon$، إذا لم يكن ممكناً نقف.

إذا كان ممكناً أن نختار $p_3 \in A$ بحيث $d(p_2, p_3) \geq \varepsilon$ و $d(p_1, p_3) \geq \varepsilon$، إذا لم يكن ممكناً نقف.

بالمتابعة (إذا كان ممكناً) أن نختار النّقاط $p_1, p_2, \dots, p_m$ بحيث $d(p_i, p_j) \geq \varepsilon$ لأجل $1 \leq i \leq j \leq m$، عندئذٍ لنختار نقطة $p_{m+1} \in A$ بحيث $d(p_i, p_{m+1}) \geq \varepsilon$ لأجل $i = \overline{1:m}$، إذا لم يكن ممكناً نقف.

في هذه الحالة كلُّ نقطةٍ من $\mathbb{X}$ محتواةٌ في كرةٍ مفتوحةٍ نصف قطرها ε ومركزها احدى النّقاط $p_1, p_2, \dots, p_m$ لذا لدينا شبكة$-\varepsilon$ منتهية لِـ $\mathbb{X}$، وبالتّالي $\mathbb{X}$ محدود كلّيّاً.

لنثبت أنَّ $\mathbb{X}$ تامٌّ.

لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كوشي من عناصر $\mathbb{X}$، بما أنَّ $\mathbb{X}$ مُتراصٌّ بالتّوالي تحوي المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئيةً متقاربةً من عنصر x من $\mathbb{X}$ ومنه (حسب تمرين) المتتالية الأصلية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ومن نفس العنصر x، وبالتّالي الفضاء $\mathbb{X}$ تامٌّ.

تمهيدية (6):

الفضاء المتري المحدودُ كلّيّاً والتّام لابُدَّ وأن يكون مُتراصّاً بالتّوالي.

قضيّة مساعدة:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً متريّاً مُتراصّاً بالتّوالي، و $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$ تغطيةً مفتوحةً غيرَ منتهيةٍ لِـ $\mathbb{X}$. عندئذٍ يوجدُ $\varepsilon > 0$ بحيث كلُّ كرةٍ نصف قطرها ε محتواةٌ في واحدة على الأقل من المجموعات المفتوحة $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$.

تمهيدية (7):

الفضاء المتري المُتراصُّ بالتّوالي لابُدَّ وأن يكون مُتراصّاً.

البرهان:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً متريّاً مُتراصّاً بالتّوالي، و $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$ تغطيةً مفتوحةً غيرَ منتهيةٍ لِـ $\mathbb{X}$ حسب القضيّة المساعدة يوجدُ $\varepsilon > 0$ بحيث كلُّ كرةٍ ذات نصف قطر ε محتواةٌ في واحدة من المجموعات المفتوحة $\mathcal{O}_\alpha$.
وفق التمهيدية (5) إنَّ الفضاء $\mathbb{X}$ محدودٌ كلّيّاً لذلك توجد $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ بحيث $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{k} N(p_i, \varepsilon)$، وكون $N(p_i, \varepsilon) \subseteq \mathcal{O}_{\alpha_i}$ تشكّلُ $\{\mathcal{O}_{\alpha_1}, \mathcal{O}_{\alpha_2}, \dots, \mathcal{O}_{\alpha_k}\}$ تغطيةً جزئيةً منتهيةً لِـ $\mathbb{X}$ من التّغطية الأصلية $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$ لِـ $\mathbb{X}$، وبالتّالي $\mathbb{X}$ مُتراص.

معايير التّراص في الفضاءات المترية:

(1) تحوي كلُّ تغطيةٍ مفتوحةٍ للفضاء تغطيةً جزئيةً منتهيةً للفضاء.

(2) تحوي كلُّ متتاليةٍ من عناصر الفضاء متتاليةً جزئيةً متقاربةً.

(3) كلُّ مرشّحةٍ أعظميةٍ متقاربةٌ.

(4) أيُّ جماعةٍ من المجموعات المغلقة المتمتعة بخاصة التّقاطع المنتهي لابُدَّ وأن يكون تقاطعُها غيرَ خالٍ.

(5) لأيِّ مجموعةٍ جزئيةٍ غيرِ منتهيةٍ نقطة تجمع (واحدة على الأقل).

(6) الفضاء بأكمله محدودٌ كلّيّاً وتامٌّ.

المرجع:

[1] E. Copson. Metric Spaces. Cambridge University Press. 1968. (P.72)

مبرهنة: (مطلوبة نصاً و برهاناً)

كلُّ مجموعةٍ جزئيةٍ مُتراصَّةٍ في فضاء هاوسدورف لابُدَّ وأن تكون مُغلقةً.

البرهان:

ليكن $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً تبولوجيّاً هاوسدورف، ولتكن $K \subseteq \mathbb{X}$ مجموعةً جزئيةً مُتراصَّةً.

لإثبات أنَّ K مجموعةٌ مُغلقةٌ يجبُ إثبات أنَّ K^c مجموعةٌ مفتوحةٌ، وذلك بإثبات أنَّها جوارٌ لكلِّ نقطةٍ من نقاطها.

لأيِّ $x \in K^c$ مثبت، لنثبت أنَّهُ يوجدُ جوارٌ مفتوحٌ U لِـ x بحيث أنَّ $x \in U \subseteq K^c$.

أيّاً كان $y \in K$ فإنَّ $x \neq y$، وبما أنَّ $\mathbb{X}$ فضاءُ هاوسدورف، فإنَّ:

$$\exists U_x^{(y)} \in \mathcal{V}_x \qquad \exists U_y^{(x)} \in \mathcal{V}_y \qquad : \qquad U_x^{(y)} \cap U_y^{(x)} = \phi$$

نلاحظ أنَّ $K \subseteq \bigcup_{y\in K} U_y^{(x)}$، أي $\left\{U_y^{(x)} \ : \ y \in K\right\}$ تغطيةٌ مفتوحةٌ للمجموعة K المُتراصَّة، ومنه توجدُ $y_1, y_2, \dots, y_n$ من K بحيث أنَّ $K \subseteq U_{y_1}^{(x)} \cup U_{y_2}^{(x)} \cup \dots \cup U_{y_n}^{(x)}$.

لنأخذ $U = U_x^{(y_1)} \cap U_x^{(y_2)} \cap \dots \cap U_x^{(y_n)}$، نلاحظ أنَّ U مجموعةٌ مفتوحةٌ (لأَنَّها تقاطعٌ منتهٍ لمجموعاتٍ مفتوحةٍ) تحوي x (لأنَّ $x \in U_x^{(y_i)}$ لأيِّ $i = \overline{1:n}$).

إذا كان $z \in K$ يوجدُ $U_{y_i}^{(x)}$ حيث $i \in \{1,2,..,n\}$ بحيث $z \in U_{y_i}^{(x)}$ ومنه $z \notin U_x^{(y_i)}$ أي $z \notin U$، وبالتّالي $U \subseteq K^c$.

ولمّا كانت x نقطةً كيفيّةً من K^c، نستنتج أنَّ K^c مجموعةٌ مفتوحةٌ وبالتّالي K مجموعةٌ مُغلقةٌ.

مثال معاكس:

خُذْ $(\mathbb{R},\tau_{cf})$ و $\mathbb{P} = \{2,3,5,7,11,13, \dots . \}$ (مجموعة الأعداد الأوّليّة)، لاحظ أنَّ $\mathbb{P}$ مجموعةٌ مُتراصَّةٌ لكنّها ليست مُغلقةً (ولا مفتوحة).

(١١) تتمات

مبرهنة بيير:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً تامّاً، حيث $\mathbb{X} \neq \phi$.

إذا كانت $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليةً من المجموعات المفتوحة الكثيفة في $\mathbb{X}$، فإنَّ تقاطعَها $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{O}_n$ (ليس بالضّرورة مجموعةً مفتوحةً) مجموعةٌ كثيفةٌ في $\mathbb{X}$.

النّقطة الثّابتة:

النّقطة الثّابتة لتطبيق $T: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ لمجموعةٍ $\mathbb{X}$ في نفسها هي نقطةٌ x من $\mathbb{X}$ تكون صورتُها وفق التّطبيق النّقطة x ذاتها (بمعنى أنَّ x ((تبقى ثابتةً)) وفق T)، أي أنَّ:

$$Tx = x$$

الأمر الذي يعني بأنَّ الصّورة Tx تتطابقُ و العنصر x.

التّقليص:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً.

يُدعى التّطبيقُ $T: (\mathbb{X}, d) \longrightarrow (\mathbb{X}, d)$ تقليصاً على $\mathbb{X}$ إذا وجد عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ α وأصغر تماماً من الواحد بحيث أنَّهُ إذا كان x و y عنصرين من $\mathbb{X}$ فإنَّ:

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

مبرهنة النّقطة الثّابتة لباناخ (مبرهنة التّقليص):

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً، حيث $\mathbb{X} \neq \phi$.

إذا كان $(\mathbb{X}, d)$ تامّاً وكان التّطبيقُ $T: (\mathbb{X}, d) \longrightarrow (\mathbb{X}, d)$ تقليصاً على $\mathbb{X}$، فإنَّهُ توجدُ لِـ T نقطة ثابتة واحدة بالضّبط.

حول المسافة الوترية :

لتكن a_1 و a_2 و b_1 و b_2 أعداداً حقيقيّةً غيرَ سالبةٍ، حسب متراجحة مينكوفسكي $(p = 2)$ فإنَّ:

$$((a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (a_1^2+a_2^2)^{\frac{1}{2}}+(b_1^2+b_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

لتكن x و y و z أعداداً عقديّةً، ولنعوض في العلاقة السّابقة:

$$a_1 = |x-y| \qquad b_1 = |y-z| \qquad a_2 = |x-y||z| \qquad b_2 = |y-z||x|$$

نجد أنَّ:

$$((|x-y|+|y-z|)^2+(|x-y||z|+|y-z||x|)^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq (|x-y|^2+|x-y|^2|z|^2)^{\frac{1}{2}}+(|y-z|^2+|y-z|^2|x|^2)^{\frac{1}{2}}$$

نلاحظ أنَّ:

$$(|x-y|^2+|x-y|^2|z|^2)^{\frac{1}{2}} = \left(|x-y|^2(1+|z|^2)\right)^{\frac{1}{2}} = |x-y|\sqrt{1+|z|^2}$$

$$(|y-z|^2+|y-z|^2|x|^2)^{\frac{1}{2}} = \left(|y-z|^2(1+|x|^2)\right)^{\frac{1}{2}} = |y-z|\sqrt{1+|x|^2}$$

بالتّعويض في العلاقة السّابقة:

$$((|x-y|+|y-z|)^2+(|x-y||z|+|y-z||x|)^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq |x-y|\sqrt{1+|z|^2}+|y-z|\sqrt{1+|x|^2} \quad (*)$$

بما أنَّ:

$$|x-z| \leq |x-y|+|y-z|$$

فإنَّ:

$$|x-z|^2 \leq (|x-y|+|y-z|)^2 \quad (1)$$

وبما أنَّ:

$$|x-z||y| = |xy-zy| = |xy-xz+xz-zy| = |x(y-z)+z(x-y)|$$
$$\leq |y-z||x|+|x-y||z|$$

فإنَّ:

$$|x-z|^2|y|^2 \leq (|x-y||z|+|y-z||x|)^2 \quad (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد أنَّ:

$$|x-z|^2+|x-z|^2|y|^2 \leq (|x-y|+|y-z|)^2+(|x-y||z|+|y-z||x|)^2$$

بجذر طرفي العلاقة السّابقة:

$$(|x-z|^2+|x-z|^2|y|^2)^{\frac{1}{2}} \leq ((|x-y|+|y-z|)^2+(|x-y||z|+|y-z||x|)^2)^{\frac{1}{2}} \quad (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نجد أنَّ:

$$(|x-z|^2+|x-z|^2|y|^2)^{\frac{1}{2}} \le |x-y|\sqrt{1+|z|^2}+|y-z|\sqrt{1+|x|^2}$$

نلاحظ أنَّ:

$$(|x-z|^2+|x-z|^2|y|^2)^{\frac{1}{2}} = \left(|x-z|^2(1+|y|^2)\right)^{\frac{1}{2}} = |x-z|\sqrt{1+|y|^2}$$

بالتّعويض في العلاقة السّابقة:

$$|x-z|\sqrt{1+|y|^2} \le |x-y|\sqrt{1+|z|^2}+|y-z|\sqrt{1+|x|^2}$$

بالتّقسيم على $\left(\sqrt{1+|y|^2}\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|x|^2}\right)$ نجد أنَّ:

$$\frac{|x-z|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|z|^2}} \le \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}+\frac{|y-z|}{\sqrt{1+|y|^2}\sqrt{1+|z|^2}}$$

بالضّرب بـِ (2) نجد أنَّ:

$$\frac{2|x-z|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|z|^2}} \le \frac{2|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}+\frac{2|y-z|}{\sqrt{1+|y|^2}\sqrt{1+|z|^2}}$$

أي:

$$\sigma(x,z) \le \sigma(x,y)+\sigma(y,z)$$

وهو المطلوب.

حل أسئلة دورة الفصل الأوّل 2016 – 2017

السّؤال الأوّل: (40)

(1) عرِّف الفضاء التّبولوجي المُترابط، ثُمَّ هل مجموعةُ الأعدادِ الطّبيعيّةِ المزوّدةِ بتبولوجيا المتممات المنتهية هي فضاءٌ مُترابطٌ ؟ برّر.

وهل مجموعةُ مضاعفاتِ العددِ الأوّلي 2017 هي مجموعةٌ مُغلقةٌ في هذا الفضاء ؟ وهل هي مفتوحةٌ فيه ؟ برّر.

الحل:

الفضاءُ التّبولوجي المُترابطُ (51) تعريف (1).

نعم هي فضاءٌ مُترابطٌ، لاحظ صفَّ المجموعاتِ المفتوحةِ وصفَّ المجموعاتِ المُغلقةِ.

مجموعةُ مضاعفاتِ العددِ الأوّلي 2017 ليست مفتوحةً ولامُغلقةً (لاهي ولا متممتها منتهية).

(2) **عرِّف الفضاء المُتراصّ، وأثبتْ أنَّ جداء فضاءين مُتراصَّين يكون مُتراصّاً.**

الحل:

الفضاءُ المُتراصُّ (43) تعريف (1).

ليكن كل من $(\mathbb{X}_1, \tau_1)$ و $(\mathbb{X}_2, \tau_2)$ فضاءً تبولوجيّاً مُتراصّاً.

لتكن $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ مُزوَّدةً بتبولوجيا الجداء τ (والتي هي أصغرُ تبولوجيا تجعل تطبيقاتِ الإسقاطِ مستمرةً).

لتكن $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ مُرشّحةً أعظميةً على $\mathbb{X}$.

ليكن $pr_i: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}_i$ (حيث $i = 1,2$) تطبيق الإسقاط على $\mathbb{X}_i$، إنَّ تطبيق الإسقاط غامرٌ ونعلم أنَّ صورة المرشّحة الأعظمية وفق تطبيقٍ غامرٍ هي مُرشّحةٌ أعظميةٌ ومنه $\mathfrak{F}_i = pr_i(\mathfrak{F})$ مرشحةٌ أعظميةٌ على $\mathbb{X}_i$ المُتراصّ فهي متقاربةٌ، ومنه يوجدُ $x_i \in \mathbb{X}_i$ بحيث أنَّ $\mathfrak{F}_i \longrightarrow x_i$ (حيث $i = 1,2$).

بما أنَّ $\mathfrak{F}_1 \longrightarrow x_1$ و $\mathfrak{F}_2 \longrightarrow x_2$ فإنَّ $\mathcal{V}_{x_1} \subseteq \mathfrak{F}_1$ و $\mathcal{V}_{x_2} \subseteq \mathfrak{F}_2$.

ومنه لأيٍّ $V_1 \in \mathcal{V}_{x_1}$ و $V_2 \in \mathcal{V}_{x_2}$ فإنَّ $V_1 \in \mathfrak{F}_1$ و $V_2 \in \mathfrak{F}_2$.

وبما أنَّ $\mathfrak{F}_1 = pr_1(\mathfrak{F})$ و $\mathfrak{F}_2 = pr_2(\mathfrak{F})$، وتطبيقات الإسقاط غامرة فإنَّه توجدُ $F_1 \in \mathfrak{F}$ و $F_2 \in \mathfrak{F}$ بحيث أنَّ $V_1 = pr_1(F_1)$ و $V_2 = pr_2(F_2)$.

بما أنَّ F_1 و F_2 من $\mathfrak{F}$ و $\mathfrak{F}$ مُرشّحة فإنَّ $E = F_1 \cap F_2$ من $\mathfrak{F}$.

لاحظ أنَّ:

$$V_1 = pr_1(F_1) \supseteq pr_1(F_1 \cap F_2) = pr_1(E) = E_1$$
$$V_2 = pr_2(F_2) \supseteq pr_2(F_1 \cap F_2) = pr_2(E) = E_2$$

ومنه:

$$V_1 \times V_2 \supseteq E_1 \times E_2 \supseteq E = F_1 \cap F_2$$

ومنه $V_1 \times V_2$ من $\mathfrak{F}$ كون $\mathfrak{F}$ مُرشّحة و $V_1 \times V_2 \supseteq E \in \mathfrak{F}$.

وهذا كافٍ لتحقّق المطلوب، أي $\mathcal{V}_x \subseteq \mathfrak{F}$ حيث $x = (x_1, x_2)$ و $\mathfrak{F} \longrightarrow x$.

وبالتّالي فضاءُ الجداء $(\mathbb{X}, \tau)$ مُتراصٌّ.

السّؤال الثّاني: برّر صحّة أو خطأ مايلي: (30)

(a) **صَفُّ المجالاتِ المفتوحةِ هو مُرشّحةٌ على مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيّةِ.**

الحل:

لا، لاحظ أنَّ $[-1,2] \subseteq]0,1[$.

(b) **كُلُّ فضاءٍ متري هو فضاءٌ ناظميٌ.**

الحل:

يجب إثبات أنَّ كُلَّ فضاءٍ متري هو T_1 و T_4 (عُدْ إلى ملف الفضاء المتري ومسلمات الفصل).

(c) **كُلُّ فضاءٍ مُتراصٍّ وهاوسدورف يكون فضاءً مُنتظماً.**

الحل:

يجب إثبات أنَّهُ فضاءُ T_1 و T_3.

بما أنَّهُ فضاء هاوسدورف فهو فضاء T_1، بقي إثبات أنَّهُ فضاءُ T_3.

لتكن K مجموعةً مُغلقةً غيرَ خاليةٍ و $p \notin K$، بما أنَّ الفضاء $(\mathbb{X}, \tau)$ مُتراصٌّ و K مجموعةٌ مُغلقةٌ فإنَّ K مجموعةٌ مُتراصَّةٌ.

ليكن $x \in K$ فإنَّ $x \neq p$، وبما أنَّ $\mathbb{X}$ هاوسدروف، فإنَّهُ:

$$\exists U_x^{(p)} \in \mathcal{V}_x \quad \exists U_p^{(x)} \in \mathcal{V}_p \quad : \quad U_x^{(p)} \cap U_p^{(x)} = \phi$$

نلاحظ أنَّ $K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x^{(p)}$، أي $\left\{U_x^{(p)} \ : \ x \in K\right\}$ تغطيةٌ مفتوحةٌ لِـ K المُتراصَّة ومنه توجدُ $x_1, x_2, \dots, x_n$ من K بحيث أنَّ $K \subseteq U_{x_1}^{(p)} \cup U_{x_2}^{(p)} \cup \dots \cup U_{x_n}^{(p)}$.

لنأخذ $\mathcal{O}_K = U_{x_1}^{(p)} \cup U_{x_2}^{(p)} \cup \dots \cup U_{x_n}^{(p)}$، و $\mathcal{O}_p = U_p^{(x_1)} \cap U_p^{(x_2)} \cap \dots \cap U_p^{(x_n)}$ تحققان المراد.

(d) **كُلُّ فضاءٍ مُتراصٍّ وهاوسدورف يكون فضاءً ناظمياً.**

الحل:

لتكن F_1 و F_2 مجموعتين غير خاليتين مغلقتين وغير متقاطعتين من $\mathbb{X}$ المتراص فإنَّ F_1 و F_2 مجموعتان مُتراصتّان.

لأجل $x \in F_1$ (حسب ماسبق) يوجدُ جوارٌ مفتوحٌ $\mathcal{O}_x$ لِـ x وجوارٌ مفتوحٌ $\mathcal{O}_{F_2}^{(x)}$ لِـ F_2 بحيث أنَّ:

$$\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_{F_2}^{(x)} = \phi$$

نلاحظ أنَّ $F_1 \subseteq \bigcup_{x \in F_1} \mathcal{O}_x$، أي $\{\mathcal{O}_x \ : \ x \in F_1\}$ تغطيةٌ مفتوحةٌ لِـ F_1 المُتراصَّة، ومنه يوجد $(x_i)_{i=1}^{n}$ من F_1 بحيث أنَّ $F_1 \subseteq \mathcal{O}_{x_1} \cup \mathcal{O}_{x_2} \cup \dots \cup \mathcal{O}_{x_n}$.

لنأخذ:

$$\mathcal{O}_{F_1} = \mathcal{O}_{x_1} \cup \mathcal{O}_{x_2} \cup \dots \cup \mathcal{O}_{x_n} \qquad \mathcal{O}_{F_2} = \mathcal{O}_{F_2}^{(x_1)} \cap \mathcal{O}_{F_2}^{(x_2)} \cap \dots \cap \mathcal{O}_{F_2}^{(x_n)}$$

يتم المطلوب.

السّؤال الثّالث: (30)

اذكر نصَّ مبرهنة تيتس. (37)

ثُمَّ اذكر نصَّ مبرهنة هان – باناخ:

ليكن f داليّاً خطّيّاً محدوداً على فضاءٍ جزئي $\mathbb{Y}$ من فضاءٍ مُنظَّمٍ $\mathbb{X}$. عندئذٍ يوجدُ داليٌ خطّيٌ محدودٌ $\tilde{f}$ على $\mathbb{X}$ يُشكِّلُ ممدداً لِـ f إلى $\mathbb{X}$ وله النّظيم نفسه $\|\tilde{f}\|_{\mathbb{X}} = \|f\|_{\mathbb{Y}}$ حيث $\|f\|_{\mathbb{Y}} = \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{Y}\\ \|x\|=1}} |f(x)|$ و $\|\tilde{f}\|_{\mathbb{X}} = \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{X}\\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)|$. (وحيث $\|f\|_{\mathbb{Y}} = 0$ في الحالة التّافهة $\mathbb{Y} = \{0\}$).

وأخيراً اذكر توطئة يوريسون وفكرة إثباتها.

نصُّها (36) ثُمَّ عُدْ إلى ملف "كلمات حول الفضاء T_4 "

حل أسئلة مقرّر التّبولوجيا (2)
لطلاب السّنة الرّابعة رياضيّات

السّؤال الأوّل:

لنأخذ مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ مُزوَّدةً بالتّبولوجيا المولَّدة بالمجالاتِ $]-\infty, b]$. عيّن لصاقة مجموعة قواسم العدد 721 ثُمَّ داخلها ومحيطها. ثُمَّ هل الفضاء التّبولوجي النّاتج هو فضاءٌ مُتراصٌ وهل هو فضاء T_2 ؟ بِرّر.

الحل:

مجموعة قواسم العدد 721 هي $\mathcal{D} = \{1,7,103,721\}$، وإنَّ $\bar{\mathcal{D}} = [1,+\infty[$ و $\mathcal{D}^{\circ} = \phi$ و $Fr(\mathcal{D}) = [1,+\infty[$.

ليس مُتراصّاً، خُذْ التّغطية المفتوحة $\{\mathcal{O}_n =]-\infty, n] \quad : \quad n \in \mathbb{N}\}$ ماذا تلاحظ.

ليس T_2 كونه ليس T_1 خُذْ $x = 0$ و $y = 1$ لاحظ أنَّ أيَّ جوارٍ لِـ y سيحوي x.

السّؤال الثّاني:

هل صَفُّ المجالاتِ $]a, +\infty[$ قاعدةٌ لمرشّحة على $\mathbb{R}$ ؟ بِرّر ذلك.

الحل:

ليكن $\mathcal{B} = \{[a, +\infty[\quad : \quad a \in \mathbb{R}\}$.

إنَّ $[1, +\infty[\in \mathcal{B}$ ومنه $\mathcal{B} \neq \phi$.

وأيّاً كان $a \in \mathbb{R}$ فإنَّ $a + 1 \in [a, +\infty[$ ومنه $\phi \notin \mathcal{B}$.

وإذا كان $A_1 = [a_1, +\infty[$ و $A_2 = [a_2, +\infty[$ من $\mathcal{B}$ فإنَّ $A = [max\{a_1, a_2\}, +\infty[$ من $\mathcal{B}$ ومُحتوى في $A_1 \cap A_2$.

أثبتْ أنَّ كُلّ مُرشّحةٍ أعظميةٍ على فضاءٍ مُتراصٍّ ستكون متقاربةً فيه.

الحل:

راجع النّظري.

السّؤال الثّالث:

عرِّف ما يلي:

الفضاء T_3 : (33) تعريف أو مبرهنة (1). الفضاء $T_{3\frac{1}{2}}$: (34) تعريف. الفضاء T_4 : (35) تعريف أو (36) مبرهنة (1) أو تمهيدية يوريسون أو (37) مبرهنة تيتس في التّمديد. الفضاء غير المترابط : (51) تعريف (1).

ثُمَّ أثبتْ أنَّهُ إذا كان الفضاءُ التّبولوجيُ $(\mathbb{X}, \tau)$ غيرَ مُترابطٍ فثمة تطبيقٌ مستمرٌ و غامرٌ منطلقه $\mathbb{X}$ ومستقره المجموعة $\{0, 1\}$ والمزوَّدة بالتّبولوجيا المتقطعة، و هل العكس صحيح ؟ برّر.

الحل:

لنفرض أنَّ الفضاءَ التّبولوجي $(\mathbb{X}, \tau)$ غيرُ مُترابطٍ، ومنه:

$$\exists \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \tau \quad \mathcal{O}_1 \neq \phi \quad \mathcal{O}_2 \neq \phi \quad \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \phi \quad \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = \mathbb{X}$$

لنعرِّف التّطبيق $f: (\mathbb{X}, \tau) \longrightarrow (\{0,1\}, \tau_\delta)$ (حيث $\tau_\delta = \mathcal{P}(\{0,1\})$) على النّحو التّالي:

لأيِّ $x \in \mathcal{O}_1$ فإنَّ $f(x) = 0$، ولأيِّ $x \in \mathcal{O}_2$ فإنَّ $f(x) = 1$، من الواضح أنَّ التّطبيقَ f غامرٌ.

إنَّ صَفَّ المجموعاتِ المفتوحةِ في المستقر هو $\{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$، ونلاحظ أنَّ:

$f^{-1}(\phi) = \phi$ وهي مجموعةٌ مفتوحةٌ في المنطلق.

$f^{-1}(\{0\}) = \mathcal{O}_1$ وهي مجموعةٌ مفتوحةٌ في المنطلق.

$f^{-1}(\{1\}) = \mathcal{O}_2$ وهي مجموعةٌ مفتوحةٌ في المنطلق.

$f^{-1}(\{0,1\}) = \mathbb{X}$ وهي مجموعةٌ مفتوحةٌ في المنطلق.

وبالتّالي التّطبيق f مستمرٌ.

والعكس صحيح.

لنفرض أنَّهُ يوجدُ تطبيقٌ $f: (\mathbb{X}, \tau) \longrightarrow (\{0,1\}, \tau_\delta)$ (حيث $\tau_\delta = \mathcal{P}(\{0,1\})$) مستمرٌ وغامرٌ.

لنأخذ $\mathcal{O}_1 := f^{-1}(\{0\})$ و $\mathcal{O}_2 := f^{-1}(\{1\})$، نلاحظ أنَّ:

إنَّ $\mathcal{O}_1$ و $\mathcal{O}_2$ مجموعتان غيرُ خاليتين (لأنَّ التّطبيق f غامرٌ).
إنَّ $\mathcal{O}_1$ و $\mathcal{O}_2$ مجموعتان مفتوحتان (كونهما الخيال العكسي للمجموعتين $\{0\}$ و $\{1\}$ -على التّرتيب- المفتوحتين في المستقر وفق التّطبيق f المستمر).
$\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{0\} \cap \{1\}) = f^{-1}(\phi) = \phi$.
$\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{0\} \cup \{1\}) = f^{-1}(\{0,1\}) = \mathbb{X}$.
وبالتّالي الفضاءُ التّبولوجيُ $(\mathbb{X}, \tau)$ غيرُ مُترابطٍ.

مشروع إجابات على أسئلة مقرَّر التّبولوجيا 2

الدورة الثّانية $2017 - 2018$

السّؤال الأوّل:

(1) $\mathcal{L}$ قاعدةٌ لتبولوجيا على $\mathbb{X}$ إذا وفقط إذا كان:

$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ و $\mathbb{X} =$ اتحادٌ لعناصرٍ من $\mathcal{L}$ و تقاطعُ عنصرين من $\mathcal{L}$ هو اتحادٌ لعناصرٍ من $\mathcal{L}$.

$(1')$ $\mathcal{L}$ قاعدةٌ لتبولوجيا τ على $\mathbb{X}$ إذا وفقط إذا كان:

$\mathcal{L} \subseteq \tau$ و كلُّ عنصرٍ من τ هو اتحادٌ لعناصرٍ من $\mathcal{L}$.

$(1'')$ $\mathcal{L}$ قاعدةٌ لتبولوجيا τ على $\mathbb{X}$ إذا وفقط إذا كان:

$$\forall \mathcal{O} \in \tau \; : \; x \in \mathcal{O} \quad \Longrightarrow \quad \exists \ell \in \mathcal{L} \; : \; x \in \ell \subseteq \mathcal{O}$$

(2) $\mathcal{L}$ قاعدةٌ لجوارات النّقطة a إذا وفقط إذا كان:

$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}_a$ حيث $\mathcal{V}_a$ جماعة جميع جوارات a و كلُّ جوارٍ لِـ a لابُدَّ وأن يحويَ جواراً ينتمي إلى $\mathcal{L}$.

$$\forall V \in \mathcal{V}_a \qquad \exists \ell \in \mathcal{L} \; : \; a \in \ell \subseteq V$$

(3) $\mathcal{L}$ مرشَّحةٌ على $\mathbb{X}$ إذا وفقط إذا كان:

$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ و

$\mathbb{X} \in \mathcal{L}$ و $\phi \notin \mathcal{L}$.

$\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{L} \implies \mathcal{A}\cap\mathcal{B}\in\mathcal{L}$.

$\mathcal{A}\in\mathcal{L}\ ,\ \mathcal{A}\subseteq\mathcal{D} \implies \mathcal{D}\in\mathcal{L}$.

(4) $\mathcal{L}$ مرشَّحةٌ تتقاربُ إلى a إذا وفقط إذا كان :

كلُّ جوارٍ لِـ a ينتمي إلى $\mathcal{L}$ أي : $\mathcal{V}_a\subseteq\mathcal{L}$.

(5) $(\mathbb{X},\tau)$ مُتراصٌّ محلّيّاً (أو موضعيّاً) :

لكلِّ نقطةٍ منه جوارٌ ذو لصاقةٍ مُتراصَّةٍ، أي:

$$\forall x\in\mathbb{X}\ :\ \exists V\in\mathcal{V}_x\ :\ \bar{V}\ \text{مُتراصَّةٌ}$$

(خمسُ درجاتٍ لكلِّ إجابةٍ)

****

السّؤال الثّاني: (إختياري بين (أ) و (ب)) نظري

(أ) توطئة يوريسون + فكرةُ إثباتِها في الإتجاهين.

$27=10+10+7$.

(ب) مبرهنة تيخونوف + وإثباتها في الإتجاهين.

$27=10+10+7$.

****

السّؤال الثّالث: عملي 48 درجة

هنا $\mathbb{R}=\mathbb{X}$ و $\mathcal{O}$ مفتوحةٌ إذا كانت $\mathcal{O}$ اتحاداً لمجالاتٍ من النّمطِ $[a,b[$، لأنَّ $\{[a,b[\subseteq\mathbb{R}\ \ ,\ \ a\le b\}$ قاعدةٌ للتبولوجيا المعتبرة $\tau=\tau_{[a,b[}$.

(أ) $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءُ هاوسدورف (T_2) (6 درجات)

لأنَّه إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$ بحيث $x < y$ خُذْ $c = \frac{x+y}{2}$ نجد أنَّ $\mathcal{O}_x = [x, c[\in \mathcal{V}_x$ و $\mathcal{O}_y = [c, +\infty[\in \mathcal{V}_y$

و $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \phi$.

(ب) هل هو فضاءُ (T_3) ؟ (6 درجات)

نعم، يكفي أن نلاحظَ أنَّهُ يحقّق التّعريف الثّاني لِـ (T_3):

كلُّ جوارٍ لنقطةٍ منه $a \in \mathbb{X}$ يحوي جواراً آخر (مغلقاً)، ويكفي أن نلاحظَ أنَّ:

إذا كان $V = [a, b[\in \mathcal{V}_a$ فإنَّهُ يوجد c بحيث $a < c < b$ و $\mathcal{W} = [a, c[\subseteq V$.

و $\mathcal{W}$ مجموعةٌ مغلقةٌ (كما أنَّها مفتوحةٌ).

(ت) هل هو مُتراصٌّ ؟ (6 درجات)

لاحظ أنَّ:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [-n, n+1[$$

نجد أنَّ $\{\mathcal{O}_n = [-n, n+1[\ : \ n \in \mathbb{N}\}$ تغطيةٌ مفتوحةٌ لِـ $\mathbb{R}$ لانستطيع أن نستخرج منها تغطيةً جزئيةً منتهيةً، فهو غيرُ مُتراصٍّ.

(ث) هل هو مُترابطٌ ؟ (6 درجات)

لاحظ أنَّ $\mathbb{R} \neq [0, +\infty[= \mathcal{A}$ مفتوحةٌ و $\mathbb{R} \neq]-\infty, 0[= \mathcal{A}^c$ مفتوحةٌ أيضاً.

إنَّ $\mathcal{A}$ مفتوحةٌ ومغلقةٌ بآنٍ معاً و $\mathcal{A} \neq \mathbb{R}$ و $\mathcal{A} \neq \phi$ فهو غيرُ مُترابطٍ.

(ج) خذ $\mathcal{A} =]0,3]$ نجد $\bar{\mathcal{A}} = [0,3]$ وذلك لأنَّ $0 \in \bar{\mathcal{A}}$ (برّر)، و $\mathcal{A}^\circ =]0,3[$ وذلك لأنَّ $3 \notin \mathcal{A}^\circ$(برّر)، و $Fr(\mathcal{A}) = \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}^\circ = \{0,3\}$ و $\mathcal{A}$ ليست مغلقةً فلن تكون مُتراصَّةً لأنَّ كلَّ مُتراصَّةٍ في فضاء (T_2) تكون مغلقةً. $(6 + 6 + 6 + 6 = 24$ درجة)

****

RECOMMENDED BOOKS

[1] J. Dugundi. **Topology**. Boston: Allyn and Bacon. 1966.

[2] R. Engelking. **General Topology**. Heldermann Verlag. 1989.

[3] J. G. Hocking and G. S. Young. **Topology**. Courier Corporation. 1988. Reprint of the 1961 Original.

[4] J. L. Kelley. **General Topology**. Dover Publications, Inc., Mineola, New York. 2017. Reprint of the 1955 Original.

[5] K. Kuratowski. **Topology**. New York: Academic Press. 2 Vols. 1966-68.

[6] S. Lipschutz. **Schaum's Outline of General Topology**. McGraw Hill .Professional.1965.

[7] M. H. Mortad. **Introductory Topology: Exercises and Solutions**. World Scientific. 2014.

[8] J. R. Munkres. **Topology**. 2^{nd} Edition. Pearson Education Limited. 2014.

[9] G. K. Pedersen. **Analysis Now**. volume 118 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1989.

[10] G. F. Simmons. **Introduction to Topology and Modern Analysis**. Krieger Publishing Company. 2003. Reprint of the 1963 Original.

[11] S. Willard. **General Topology**. Dover Publications, Inc., Mineola, New York. 2004. Reprint of the 1970 Original.

RECOMMENDED BOOKS FOR TOPOLOGICAL GROUPS

[1] S. Berberian. **Lectures in Functional Analysis and Operator Theory**. Springer-Verlag. 1974.

[2] G. B. Folland. **A Course in Abstract Harmonic Analysis**. CRC Press. 2016.

[3] E. Hewitt and K. A. Ross. **Abstract Harmonic Analysis I**. Springer-Verlag. 1979.

[4] T. Husain. **Introduction to Topological Groups**. Saunders. 1966.

[5] M. Tkachenko. **Topological Groups and Related Structures**. Atlantis Press. 2008.

RECOMMENDED BOOKS FOR TOPOLOGICAL VECTOR SPACES

[1] D. Alpay. **An Advanced Complex Analysis Problem Book: Topological Vector Spaces, Functional Analysis, and Hilbert Spaces of Analytic Functions**. Springer International Publishing. 2015.

[2] V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov. **Topological Vector Spaces and Their Applications**. Springer. 2017.

[3] J. Horvath. **Topological Vector Spaces and Distributions**. Addison-Wesley Publishing. 1966.

[4] G. Kothe. **Topological Vector Spaces I**. Springer. 1969.

[5] F. Treves. **Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels**. Academic Press. 1967.

مراجع باللغة العربية

[1] **أملية د.صلاح الأحمد في الطبولوجيا** (موقع syriamath)

[2] **كتاب الطبولوجيا ١ د.صلاح الأحمد - د.عبد الواحد أبوحمدة – د.محمد بشير قابيل** (موقع syriamath)

[3] **مبادئ الطبولوجيا العامة د.خضر حامد الأحمد**