◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الثانية والعشرون

◄ عنوان المحاضرة: اختبارات التقارب

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـاختبار كوشي .

٢ـاختبار دالامبير.

تكلمنا في المحاضرة السابقة عن اختبارات التقارب بالإطلاق ، وتحدثنا عن الاختبار الأول وهو اختبار المقارنة والآن سنتاب حديثنا عن هذه الاختبارات ، وسنبدأ باختبار كوشي.

٢ اختباركوشي (الجذر النوني)

لتكن $\sum z_n$ متسلسلة عقدية و $l = \overline{\lim}\sqrt[n]{|z_n|}$

عندئذ :

١) إذا كانت $l < 1$ فإن $\sum z_n$ متقاربة بإطلاق .

٢) إذا كانت $l > 1$ فإن $\sum z_n$ متباعدة.

٣) إذا كانت $l = 1$ (حالة شك) يفشل الاختبار في تحديد طبيعة المتسلسلة .

مثال:

(١) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ هذه المتسلسلة متباعدة لأن حدها العام لا يسعى إلى الصفر إلا أن :

$$l = \overline{\lim}\sqrt[n]{|-1^n|} = \overline{\lim}\sqrt[n]{1} = 1$$

(٢) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n^2}$

وهي متسلسلة متقاربة بالإطلاق لأن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i^n}{n^2}\right|$$ متقاربة $\big(($ريمانية $p = 2 > 1)\big)$

تذكرة :

$\sqrt[p]{n^p} \to 1$

وأن : $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{i^n}{n^2}\right|} = \overline{\lim} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$

نلاحظ أن كلا المثالين يبينان فشل اختبار كوشي في حالة كانت النهاية العليا لمتتالية الجذور النونية تساوي الواحد .

وقد يأتي السؤال بالإمتحان على الشكل التالي :

أعط مثالاً تبين فيه أن اختار كوشي يفشل في حالة كانت النهاية العليا تساوي الواحد ويجب أن نذكر المثالين (١) و (٢) .

تمرين

ادرس حسب قيم العدد العقدي $\mathfrak{z}$ تقارب بالإطلاق لـ $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \mathfrak{z}^{n^2}$

الحل: لنطبق الجذر النوني :

$$\sqrt[n]{|\mathfrak{z}_n|} = \sqrt[n]{n^n |\mathfrak{z}|^{n^2}} = n|\mathfrak{z}|^n$$

و هنا نميز حالتين

ملاحظة :

التابع الأسي أقوى من أي تابع كثير حدود فنهايته تتغلب على نهاية كثير حدود

١- $|\mathfrak{z}| > 1$ وبالتالي $\xrightarrow{\text{يسعى}} \infty$ متباعدة $\infty > 1$

٢- $|\mathfrak{z}| = 1$ وبالتالي $\xrightarrow{\text{يسعى}} 1$

٣- $|\mathfrak{z}| < 1$:وبالتالي سوف تصبح هنا حالة عدم تعين وبالتالي هي متقاربة بإطلاق $0 < 1$

بالنتيجة تكون :

١- $\mathfrak{z} \in D(0,1) \Longleftarrow$ المتسلسلة $\sum n^n \mathfrak{z}^{n^2}$ متقاربة بالإطلاق .

٢- $\mathfrak{z} \in \mathbb{C} \backslash D(0,1) \Longleftarrow$ المتسلسلة متباعدة .

٣ اختبار دالامبير:

لتكن $\sum 3_n$ متسلسلة عقدية وليكن $L = \overline{\lim} \left|\frac{3_{n+1}}{3_n}\right|$

$$l = \underline{lim} \left|\frac{3_{n+1}}{3_n}\right|$$

عندئذ:

١ $L < 1$ فإن $\sum 3_n$ متقاربة بالإطلاق

٢ $l > 1$ فإن $\sum 3_n$ متباعدة

٣ $l \geq 1 \geq L$ يفشل المعيار في تحديد طبيعة المتسلسلة وكحالة خاصة من ٣ إذا كان $l = L = 1$ يفشل المعيار

تمرين

بين فيما إذا كان اختبار كوشي يبين لنا طبيعة المتسلسلة التالية :

$$1 + a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$$

حيث b, a ثابتان عقديان يحققان $\quad 0 < |a| < |b| < 1$

الحل :

$$\sqrt[n]{|3_n|}, \sqrt[n]{1} = 1, \sqrt{|a|}, \sqrt[3]{|b|}, \sqrt[4]{|a^2|}, \sqrt[5]{|b^2|}$$

$$1, |a|^{\frac{1}{2}}, |b|^{\frac{1}{3}}, |a|^{\frac{1}{2}}, |b|^{\frac{2}{5}}, |a|^{\frac{1}{2}}, \ldots$$

و هنا إذا أردنا إثبات تباعد متتالية يجب أيجاد متتاليتين تسعى كل منها إلى النهاية

إن المتتالية الجزئية :

$$|a|^{\frac{1}{2}}, |a|^{\frac{1}{2}}, |a|^{\frac{1}{2}}, \ldots . \longrightarrow |a|^{\frac{1}{2}}$$

ثم إن :

$$1, |b|^{\frac{1}{3}}, |b|^{\frac{2}{5}}, |b|^{\frac{3}{7}}, \ldots, |b|^{\frac{n}{2n+1}}, \ldots . . \longrightarrow |b|^{\frac{1}{2}}$$

بالتالي : $|b|^{\frac{1}{2}}$ نقطة تجمع لـ $\left\{\sqrt[n]{|3_n|}\right\}$

وظيفة :

أثبت أن $|a|^{\frac{1}{2}}$, $|b|^{\frac{1}{2}}$ هما نقطتا تجمع وحيدتان للمتتالية $\sqrt[n]{|3_n|}$

وبعد أثبات الوظيفة تصبح لنا النهاية العليا

$\Leftarrow$ المتسلسلة متقاربة بالإطلاق $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|3_n|} = |b|^{\frac{1}{2}} < 1$

وبالتالي متتالية الجذر النوني ليست متقاربة لأنها لا نستطيع تطبيق اختبار كوشي

طلب اضافي

إذا كانت المتسلسلة متقاربة فاحسب مجموعها

$$1 + a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$$

وبما أن المتسلسلة متقاربة بالإطلاق فإننا نستطيع إجراء عدد غير منتهي من التبديل بين حدود المتسلسلة

$$= \underbrace{(1 + a + a^2 + \cdots)}_{\text{متسلسلة هندسية أساسها } a \text{ و حدها الأول } 1} + \underbrace{(b + b^2 + b^3 + \cdots)}_{\text{متسلسلة هندسية أساسها } b \text{ و حدها الأول } b}$$

ملاحظة : هذه المساواة صحيحة لأن المتسلسلة متقاربة بالإطلاق ولو كانت متقاربة لا يجوز التفرقة

$$= \frac{1}{1-a} + \frac{b}{1-b} = \frac{1 - \cancel{b} + \cancel{b} - ab}{(1-a)(1-b)} = \frac{1 - ab}{(1-a)(1-b)}$$

بالتالي اختبار كوشي ينجح من تعيين طبيعة المتسلسلة .

ملاحظة:

إذا كانت المتسلسلة متقاربة بالإطلاق فإن تغير ترتيب حدودها بأي شكل لن يغير من طبيعتها ولن يغير مجموعها ، ولكن المتقاربة شرطياً يمكن أن تتغير طبيعتها عند تغيير حدودها .

النتيجة:من المثال السابق نستنتج أن اختبار كوشي لتقارب المتسلسلات هو أقوى من اختبار دالامبير بمعنى أنه قد يفشل معيار دالامبير من تحديد طبيعة متسلسلة بينما ينجح معيار كوشي

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي – باسل أبو عيسى – هالة مصطفى