نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الثالثة عشر ◄ عنوان المحاضرة: الترابط

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ المجموعتان غير المتصلتين.

٢ـ الخط المضلعي.

٣ـ مبرهنات .

تكلمنا في المحاضرة السابقة عن المجموعة المترابطة والآن سنأخذ تعريف اخر للترابط.

تعريف: نقول عن مجموعة $A \subseteq \mathbb{C}$ إنها غير مترابطة إذا أمكن كتابتها كاجتماع لمجموعتين غير متصلتين .

المجموعتان غير المتصلتين : لتكن $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$ نقول عن A_1 , A_2 أنهما غير متصلتان ((منفصلتان تماماً))

إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطان:

$$\overline{A_1} \cap A_2 = \emptyset$$

$$A_1 \cap \overline{A_2} = \emptyset$$

◄ **ملاحظة**: إن: A_1 , A_2 غير متصلتين $\Leftarrow$ A_1 , A_2 منفصلتان والعكس في الحالة العامة غير صحيح .

البرهان: نعلم أن أي مجموعة محتوى في لصاقتها وبفرض أن A_1 , A_2 غير متصلتين عندئذٍ:

إن $A_2 \subseteq \overline{A_2}$ $\emptyset \subseteq A_1 \cap A_2 \subseteq A_1 \cap \overline{A_2} = \emptyset$

وأخذ التقاطع مع A_1 من الطرفين :

A_1 , A_2 منفصلتان $\Rightarrow$ $\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset$

مثال على أن العكس غير صحيح: لنأخذ $A_1 = \mathrm{D}(0,1)$ قرص مفتوح

$A_2 = \overline{D}(2,1)$ لصاقة القرص المفتوح

نلاحظ أن $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ، إن $1 \in A_2$ ، ولكن $1 \notin A_1$ لأن A_1 قرص مفتوح

$\Leftarrow A_1 , A_2$ منفصلتان.

لكن لو أخذنا $\overline{A_1} \cap A_2 = \{1\} \neq \emptyset$

$\Leftarrow A_1 , A_2$ متصلتان.

مبرهنة: $B \subseteq A$ مجموعة مفتوحة ومغلقة (في آن واحد)

إن A مجموعة مترابطة $\Leftrightarrow$ إما $A = B$ أو $B = \emptyset$

هذا يعني أن المجموعة الوحيدة المفتوحة والمغلقة في آن واحد في مجموعة مترابطة هي إما المجموعة الخالية أو المجموعة بكاملها .

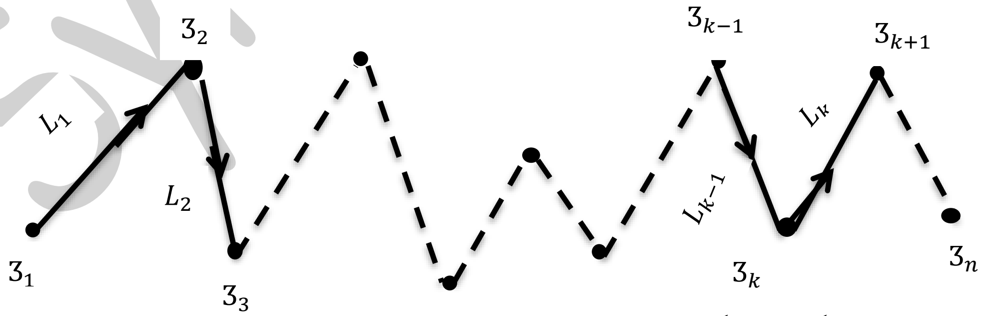
مبرهنة إذا كانت G غير مترابطة $G = (A \backslash B)$ وكانت $D \subseteq G$ مترابطة فإن $D \subseteq A$ أو $D \subseteq B$.

مبرهنة إذا كانت $B \subseteq A \subseteq \overline{B}$ وكانت B مترابطة ، إن المجموعة المحتواة بين مترابطة و لصاقتها هي مترابطة أي أن A مترابطة .

نتيجة : إذا كانت B مترابطة فإن $\overline{B}$ مترابطة لأن $B \subseteq \overline{B} \subseteq \overline{B}$.

الخط المضلعي في $\mathbb{C}$

لتكن $z_1, z_2, \dots \dots \dots, z_n \in \mathbb{C}$ ولنرمز بـ L_k بالقطعة المستقيمة التي بدايتها z_k ونهايتها z_{k+1}



نسمي السلسلة المستمرة المرتبة خطاً مضلعاً يصل z_1 بـ z_n

*يجب أن يكون الخط المضلعي الذي يصل بين نقطتين عددها منتهي

و عندما نقول خط مضلعي هذا يعني أن عدد القطع المستقيمة المشكّلة له منتهية.

مبرهنة: إذا أمكن وصل أي نقطتين في مجموعة A بخط مضلعي واقع بأكمله في A (محتوى في A)

فإن A مجموعة مترابطة

والعكس غير صحيح فقد تكون مجموعة مترابطة وفيها زوج واحد على الأقل من النقاط ولا يمكن الوصل بينهما بخط مضلعي واقع في المجموعة.

مثال على ذلك : أي دائرة في المستوي العقدي هي مجموعة مترابطة وأن أي نقطتين منها لا يمكن وصلهما بخط مضلعي واقع(مرسوم) على الدائرة.

لإثبات ذلك واضح أنه لا يمكن الوصل بين أي نقطتين من الدائرة بخط مضلعي واقع بأكمله على الدائرة أي((مرسوم على قوس الدائرة)) ، لكنها مترابطة لأنه يمكننا أن نجعل الرؤوس مستمرة

لو أخذنا التابع γ مستمر:

$$\gamma : [0\,,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \;\rightarrow \gamma(t) = z_0 + re^{it}$$

إن $\gamma([0\,,2\pi]) = C(z_0, r)$ صورة المجال.

$$|\gamma(t) - z_0| = \left|re^{it}\right| = r$$

لو أخذنا $\gamma(t) - z_0 = re^{it}$

$z_0 + re^{it}$ مستمر على $\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ γ مستمر على $[0\,,2\pi]$.

وأن صورة $[0\,,2\pi]$ وفق γ المستمر في الدائرة $C(z_0, r)$

$\Leftarrow C(z_0, r)$ مترابطة لأنها صورة مجموعة مترابطة وهي المجال $[0\,,2\pi]$ وفق تابع مستمر γ .

إذاً: إن المجموعات المترابطة في $\mathbb{R}$ هي إما عبارة عن نقطة أو مجال.

الآن سنقوم بحل تمرين الوظيفة الذي اعطي في محاضرة سابقة :

أثبت أن صورة دائرة غير مارة من القطب الشمالي على كرة ريمان وفق الإسقاط المجسادي هو مستقيم في المستوي العقدي.

وإذا كانت الكرة مارة من القطب الشمالي فإن مسقطها هو مستقيم في المستوي العقدي الموسع

$C^{\infty} = C \cup \{\infty\}$

إن C تتعين بمعادلتين ديكارتيتين :

معادلة المستوي $P: Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$

معادلة الكرة $S: {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1$

ونعلم أن بعد مركز الإحداثيات عن المستوي هو أصغر من نصف القطر ((أصغر من ١))

مركز الإحداثيات $(0,0,0)$

$$d = \frac{|A(0) + B(0) + C(0) + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} < 1$$

$$\frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} < 1$$

$$|D| < \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad \dots *$$

ولنأخذ نقطة كيفية من الكرة $\mathrm{M}(x_1, x_2, x_3) \in S$

ونعلم أن x_1, x_2, x_3 بالإسقاط المجسادي هي $x_3 = \frac{|3|^2 - 1}{|3|^2 + 1}$, $x_2 = \frac{2Im\,3}{|3|^2+1}$, $x_1 = \frac{2Re\,3}{|3|^2+1}$

نعوضهم في معادلة المستوي P :

$$A\left(\frac{2Re\,3}{|3|^2 + 1}\right) + B\left(\frac{2Re\,3}{|3|^2 + 1}\right) + C\left(\frac{|3|^2 - 1}{|3|^2 + 1}\right) + D = 0$$

لكننا نعلم أن $|3|^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2$, $\mathrm{Im}3 = \mathrm{y}$, $\mathrm{Re}3 = \mathrm{x}$

بالتالي نضرب معادلة المستوي P ب $1 + \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2$:

$$2Ax + 2By + C(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 1) + D(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + 1) = 0$$

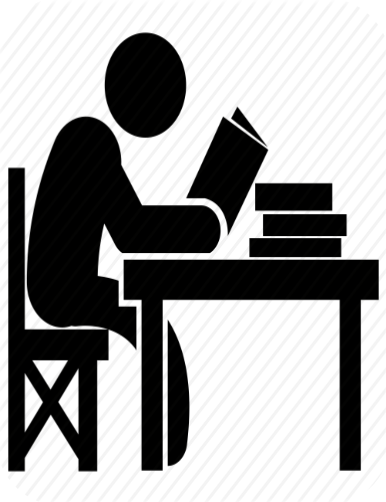
ومنه $(C + D)\mathrm{x}^2 + (C + D)\mathrm{y}^2 + 2Ax + 2By - C + D = 0 \quad \dots **$

الآن سنميز حالتين :

الحالة الأولى : إذا كانت الدائرة مارة من القطب الشمالي أي أنها مارة من $N(0,0,1)$

لنعوضها بمعادلة المستوي P فنجد أن : $C=-D \quad \dots ***$

الآن لنعوض *** في ** :



$$2Ax+2By+2D=0$$

نقسم على ٢ : $Ax+By+D=0$

وهي تمثل معادلة مستقيم .

الحالة الثانية : الدائرة لا تمر من القطب الشمالي أي أن $C\neq -D$

أو $C+D\neq 0$ وبذلك يمكننا أن نقسم ** على $(C+D)$

$$x^2+y^2+\frac{2Ax}{(C+D)}+\frac{2By}{(C+D)}+\frac{D-C}{(C+D)}=0 \quad \dots **$$

نتمم إلى مربع كامل ، نضيف ونطرح $+\frac{B^2}{(C+D)^2}-\frac{B^2}{(C+D)^2}=0$ ، $+\frac{A^2}{(C+D)^2}-\frac{A^2}{(C+D)^2}=0$.

ومنه $\left(x+\frac{A}{C+D}\right)^2+\left(y+\frac{B}{C+D}\right)^2+\frac{-D^2-C^2-B^2-A^2}{(C+D)^2}=0$

نوحد المقامات : $\left(x+\frac{A}{C+D}\right)^2+\left(y+\frac{B}{C+D}\right)^2=\frac{-D^2+C^2+B^2+A^2}{(C+D)^2}$

ومنه إن $D^2<C^2+B^2+A^2$

$$0<C^2+B^2+A^2-D^2$$

وهي معادلة الدائرة التي مركزها $\left(\frac{-A}{C+D},\frac{-B}{C+D}\right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{C^2+B^2+A^2-D^2}}{(C+D)}$

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي – باسل أبو عيسى – هالة مصطفى