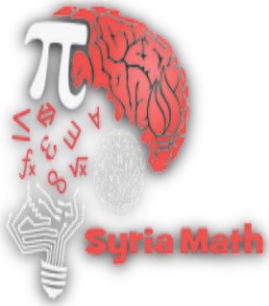

◄ دكتور المادة: جمال الملي

◄ المحاضرة: الحادية عشر ◄ عنوان المحاضرة: الفضاء المتري

مراجعة بعض المفاهيم المهمة :

هل الفضاء $c[a,b]$ هو فضاء منتظم؟؟؟

نعم إن الفضاء $c[a,b]$ فضاء منتظم لأن فيه التقارب منتظم وذلك :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 \in N ; n \geq N_0 ; d(x_n, x) = max|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

$$a \leq t \leq b$$

وهذا محقق بالاستقلالية عن الموضع t أي أنه تابع ل ε فقط

وهذا يكافئ $x_n \longrightarrow x \iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 \in N ; n \geq N_0 ; |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \qquad \forall t \in [a,b]$$

بعض الأمثلة على الفضاءات المترية غير التامة :

١- الفضاء Q :

هو الفضاء غير التام بخصوص المترك المعرف المألوف

وهو فضاء جزئي من R وغير تام بالنسبة للمترك المحدد بالمساواة:

$$\forall x, y \in Q : d(x,y) = |x - y|$$

لنأخذ المتتالية $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ وهي متتالية من عناصر Q ونلاحظ أن المتتالية x_n متقاربة من العدد e لكن $e \neq 0$ وبالتالي وجدنا كوشية وغير متقاربة في هذا الفضاء ومنه الفضاء Q غير تام بخصوص المترك المعرف .

٢- الحدوديات : إن المترك المألوف على $c[a,b]$ هو ال sup أو max لأن $[a,b]$ مجال مغلق لأن

$$\forall x, y \in [a,b] : \qquad d(x,y) = \sup|x(t) - y(t)|$$

Syria Math Team

$$\text{Or } d(x,y) = max|x(t) - y(t)| \qquad a \le t \le b$$

إن x مستمرة وy مستمر والفرق لهما مستمر والقيمة المطلقة مستمرة لهما وأن الاستمرار على مجال مغلق يبلغ فيه التابع المستمر ال $\min, max$.

في موضعين من ساحة التعريف على الأسفل معرفة على كامل المجال $[a,b]$ ومستمرة حتى الموضع يبلغ ال max وموضع يبلغ ال min والدالة مستمرة والمجال مغلق .

إن الدالة منتظمة حيث أصغر حداً أعلى هو sup وهو ينطبق على min .

وأن الاستمرار على المجال مغلق يؤدي إلى الحدودية لكن الحدودية لوحدها لا تكفي .

لنبرهن أن الحدوديات فضاء غير تام :

لنفرض الفضاء P فضاء كثيرات الحدود وهو مستمر لأنه عبارة عن مجموع دوال مستمرة وبالتالي فإن الفضاء P هو فضاء جزئي في الفضاء $c[a,b]$ كالتالي :

$$d(x,y) = max|x(t) - y(t)| \qquad a \le t \le b \qquad x,y \in P$$

إن (P,d) هو فضاء غير تام والبراهان على ذلك نأخذ متتالية من الفضاء (P,d) حيث تكون متتالية كوشية ولكن سنجد أن هذه المتتالية غير متقاربة ضمن هذا الفضاء

ولنظر في كثيرات الحدود المتتالية :

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} \qquad ; n \ge 0$$

كثير حدود من الدرجة n بالمتحول (x) حيث :

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1 + \frac{x}{1!}$$

$$x_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n-1!}$$

إن هذه المتتالية من هذا الفضاء لأن كل عنصر من عناصرها هو عبارة عن كثير حدود أي أنها متتالية من P ونلاحظ أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ متقاربة ومجموعها e^x .

أصبح لدينا متتالية كوشية ومتقاربة من e^x في هذا الفضاء لكن $e^x \neq P$ لأنه ليس كثير حدود .

وبالتالي (P,d) فضاء غير تام بخصوص المترك المعرف عليه .

انتهت المحاضرة

Syria Math Team

إعداد: بسمة نصر الله – تقى إسماعيل – رشا القرصة

Syria Math Team