

نظري

◀ دكتور المادة: يوسف الوادي

◀ المحاضرة: الرابعة عشر ◀ عنوان المحاضرة: الجداء

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١- تعريف الجداء

٢- مبرهنات على الجداء

تعريف : لتكن $(M_i)_{i \in I}$ أسرة من المودولات على حلقة R نعرف جداء هذه الأسرة على أنه الزوج

$$(P, (f_i)_{i \in I})$$

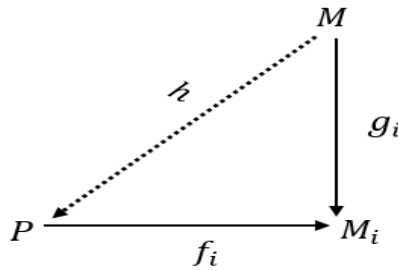
حيث P مودول على R وحيث $(f_i: P \rightarrow M_i)_{i \in I}$ أسرة تشاكل مودولية تحقق ما يلي :
 من أجل أي مودولي M على R وأي أسرة تشاكلات مودولية:

$$(g_i: M \rightarrow M_i)_{i \in I}$$

يوجد تشاكل مودولي وحيد :

$$h: M \rightarrow P$$

تجعل المخطط التالي تبديلياً

وذلك أي $\forall i \in I$ أن $f_i \circ h = g_i$ **مبرهنة:** إذا كانت $(M_i)_{i \in I}$ أسرة مودولات على حلقة R وكان : $(P, (f_i)_{i \in I})$ جداء هذه الأسرة فإن f_i غامر $\forall i \in I$

الإثبات :

حسب التعريف الأخير يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: M \rightarrow P$ بحيث $f_i o h = g_i$ فإذا أخذنا

$$i \in I \quad M = M_i$$

$$g_i = \begin{cases} I_{M_i} \\ g_j = 0 \quad i \neq j \end{cases}$$

وبالتالي فإن $f_i o h = I_{M_i}$ ومن هذه العلاقة يكون f_i غامر

مبرهنة: إذا كان $(P, (f_i)_{i \in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ على حلقة R فإن القضايا الآتية متكافئة :

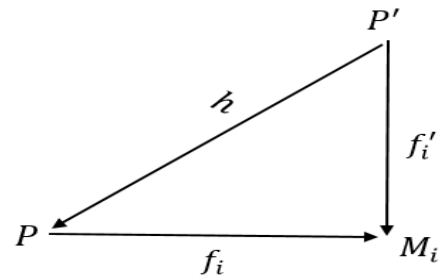
$$1- (P', (f'_i)_{i \in I}) \text{ جداء للأسرة } (M_i)_{i \in I}$$

$$2- \text{ يوجد تماثل مودولي وحيد } h: P' \rightarrow P \text{ بحيث يحقق } \forall i \in I \quad f_i o h = f'_i$$

الإثبات :

(1) \Leftrightarrow (2) بما أن $(P, (f_i)_{i \in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ لذلك من أجل أي مودول P' على R

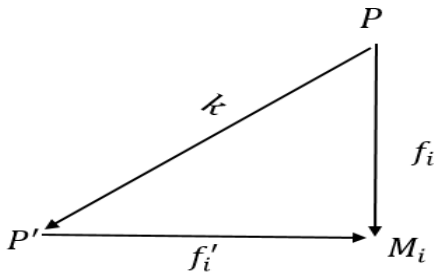
ومن أجل الأسرة (M_i) فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: P' \rightarrow P$ يجعل المخطط :



تبدلياً

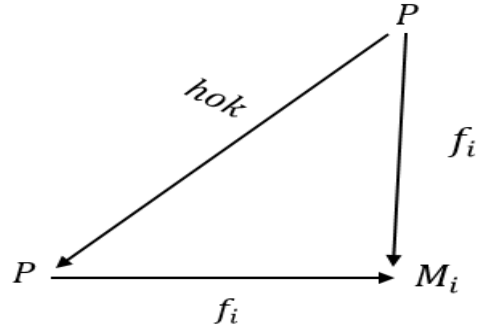
أي $f_o h = f'_i$ (*) وبما أن الزوج (P', f'_i) جداء أيضاً للأسرة ذاتها فإنه من أجل المودول P

والأسرة $(M_i)_{i \in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $k: P \rightarrow P'$ يجعل المقرر التالي تبدلياً :



أي أن $f'_i o k = f_i$ (**)

من (*) و (**) أصبح لدينا $f_i'oh = f_i'$ و $f_i'ok = f_i$
 ←نعوض $f_i(ok) = f_i$ أي ان $f_i'o(hok) = f_i$ بذلك يكون المخطط :



تبديلي ولكن نعلم أن : $I_P \circ f_i = f_i$ ولدينا التشاكل الوحيد hok الذي يجعل المخطط الأخير تبديلي :
 ←بالمقارنة :

$$hok = I_P$$

بطريقة مشابهة نثبت أن $koh = I_P$ وبالتالي فإن

$$h \text{ تماثل مودولي ويكون } k = h^{-1}$$

(2) ⇔ (1) لدينا فرضا تماثل مودولي $h: P' \rightarrow P$ بحيث

$$f_i'oh = f_i' \text{ وبالتالي } h^{-1}$$

$$(f_i'oh)oh^{-1} = f_i'oh^{-1}$$

$$f_i'o(hoh^{-1}) = f_i'oh^{-1} \text{ أي}$$

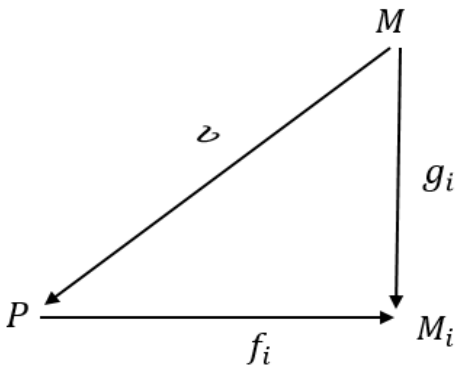
$$f_i = f_i'oh^{-1}$$

وبما ان $(P, (f_i)_{i \in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i \in I}$

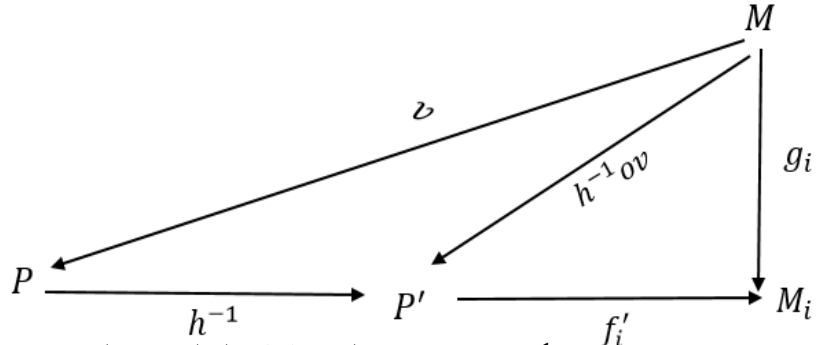
فإنه من اجل مودول ما M ومن اجل أسرة التشاكل

$$g_i: M \rightarrow M_i$$

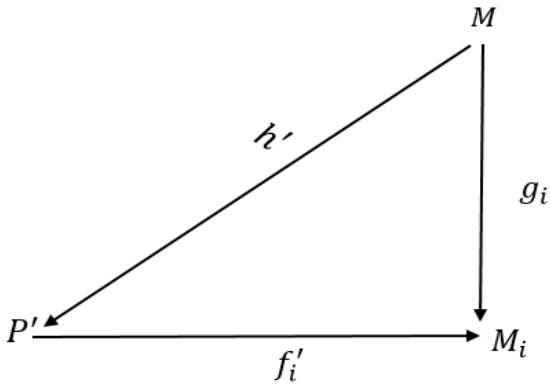
يوجد تشاكل مودولي وحيد $v: M \rightarrow P$ بحيث المخطط :



تبدلياً أي : $f_i o v = g_i$ لناخذ من جديد المخطط :



أي يوجد $h' = h^{-1} o v : M \rightarrow P'$ والمخطط التالي تبديلي :



$$f'_i o h' = f'_i o (h^{-1} o v) = g_i \text{ : أي}$$

$$\text{ولكن } g_i = f_i o v$$

$$f'_i o h' = f'_i o (h^{-1} o v) = (f'_i o h^{-1}) o v = f_i o v = g_i$$

وهذا معناه أن $(P', (f'_i)_{i \in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i \in I}$



انتهت المحاضرة

إعداد: هلا هيج - مرغد جوده - بكس مشرف