نظري

◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄ المحاضرة : الرابعة عشر ◄ عنوان المحاضرة: الجداء

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١ـتعريف الجداء

٢ ـ مبرهنات على الجداء

تعريف : لتكن $(M_i)_{i\in I}$ اسرة من المودولات على حلقة R نعرف جداء هذه الأسرة على أنه الزوج

$$(P,(f_i)_{i\in I})$$

حيثP مودول على R وحيث $(f_i : P \to M_i)_{i\in I}$ أسرة تشاكل مودولية تحقق ما يلي :

من أجل أي مودولي M على R وأي أسرة تشاكلات مودولية:

$$(g_i : M \to M_i)_{i\in I}$$

يوجد تشاكل مودولي وحيد :

$$h : M \to P$$

تجعل المخطط التالي تبديلياً

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g_i"] \\ P \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

وذلك أي : $\forall i \in I$ أي أن $f_i o h = g_i$

مبرهنة : إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على حلقة R وكان :

$(P,(f_i)_{i\in I})$ جداء هذه الأسرة فإن f_i غامر $\forall i \in I$

الإثبات :

حسب التعريف الأخير يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: M \to P$ بحيث $f_i oh = g_i$ فإذا أخذنا $M = M_i$ لكل $i \in I$

$$g_i = \begin{cases} I_{M\,i} & \\ g_j = 0 & i \neq j \end{cases}$$

وبالتالي فإن $f_i oh = I_{M_i}$ ومن هذه العلاقة يكون f_i غامر

مبرهنة : إذا كان $(P, (f_i)_{i\in I})$ جداء للاسرة $(M_i)_{i\in I}$ على حلقة R فإن القضايا الآتية متكافئة :

١- $(P', (f_i')_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$
٢- يوجد تماثل مودولي وحيد $h: P' \to P$ بحيث يحقق $\forall i \in I \;\; f_i oh = f_i'$

الإثبات :

$(1) \Leftarrow (2)$ بما أن $(P, (f_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ لذلك من اجل أي مودول P' على R

ومن اجل الأسرة (M_i) فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: P' \to P$ يجعل المخطط :

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f_i'"] \\ P \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

تبديلياً

أي $foh = f_i' \;\;......(*)$ وبما أن الزوج(P', f_i') جداء أيضا للأسرة ذاتها فأنه من أجل المودول P

والأسرة $(M_i)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $k: P \to P'$ يجعل المقرر التالي تبديليا :

١

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "f_i"] \\ P' \arrow[r, "f_i'"'] & M_i \end{tikzcd}$$

أي أن $f_i' ok = f_i \;\; ... ... (**)$

من $(*)$و$(**)$ أصبح لدينا $f_i'ok = f_i$ و $f_ioh = f_i'$

⇐نعوض $(f_ioh)ok = f_i$ أي ان $f_io(hok) = f_i$ بذلك يكون المخطط :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "hok"'] \arrow[d, "f_i"] \\ P \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

تبديلي ولكن نعلم أن : $I_Pof_i = f_i$ ولدينا التشاكل الوحيد hok الذي يجعل المخطط الأخير تبديلي :

⇐بالمقارنة :

$$hok = I_P$$

بطريقة مشايهة نثبت أن $koh = I_P$ وبالتالي فإن

h تماثل مودولي ويكون $k = h^{-1}$

$(2) \Leftarrow (1)$ لدينا فرضا تماثل مودولي $h: P' \to P$ بحيث

$f_ioh = f_i'$ وبما أن h^{-1} وبالتالي

$$(f_ioh)oh^{-1} = f_i'oh^{-1}$$

أي $f_io(hoh^{-1}) = f_i'oh^{-1}$

$$f_i = f_i'oh^{-1}$$

وبما ان $(P, (f_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

فإنه من اجل مودول ما M ومن اجل أسرة التشاكل

$$g_i: M \to M_i$$

يوجد تشاكل مودولي وحيد $v: M \to P$ بحيث المخطط :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "v"'] \arrow[d, "g_i"] \\ P \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

تبديليا أي : $f_i o v = g_i$ لنأخذ من جديد المخطط :

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[dll, "v"'] \arrow[dl, "h^{-1}ov"] \arrow[d, "g_i"] \\ P \arrow[r, "h^{-1}"'] & P' \arrow[r, "f_i'"'] & M_i \end{tikzcd}$$

أي يوجد $h' = h^{-1}ov : M \to P'$ والمخطط التالي تبديلي :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "h'"'] \arrow[d, "g_i"] \\ P' \arrow[r, "f_i'"'] & M_i \end{tikzcd}$$

أي : $f_i' o h' = f_i' o (h^{-1} o v) = g_i$

ولكن $g_i = f_i o v$

$$f_i' o h' = f_i' o (h^{-1} o v) = (f_i' o h^{-1}) o v = f_i o v = g_i$$

وهذا معناه أن $(P', (f_i')_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا همج – رغد جوده – بكر مشرف