5-12-٢٠١٨

نظري

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄ المحاضرة: الرابعة والعشرون

◄ عنوان المحاضرة: اختبارات تقارب متسلسلة الجداء

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١-اختبار دوبواريموند .

٢-جداء متسلسلتين.

٣-مبرهنات (ميرتي + كوشي + آبل)

مثال : ادرس حسب قيم $\mathfrak{Z}$ تقارب المتسلسلة

$$\sum \frac{1}{n}\mathfrak{Z}^n \Leftarrow \sum \mathfrak{Z}^n$$

وهنا نبدأ بتطبيق دالمبير

$$\left|\frac{\mathfrak{Z}_{n+1}}{\mathfrak{Z}_n}\right| = \left|\frac{\frac{\mathfrak{Z}^{n+1}}{n+1}}{\frac{\mathfrak{Z}^n}{n}}\right| = |\mathfrak{Z}|\left|\frac{n}{n+1}\right|$$

(هنا النسبة عدد حقيقي موجب) وبالتالي:

$$\lim_{n\to\infty} |\mathfrak{Z}|\left|\frac{n}{n+1}\right| = |\mathfrak{Z}|$$

وهنا نميز ثلاث حالات :

(١) $|\mathfrak{Z}| < 1 \Leftarrow l_{\mathfrak{Z}} < 1$ المتسلسلة متقاربة .

(٢) $|\mathfrak{Z}| > 1 \Leftarrow l_{\mathfrak{Z}} > 1$ المتسلسلة متباعدة.

(٣) $|\mathfrak{Z}| = 1 \Leftarrow l_{\mathfrak{Z}} = 1$ يفشل الاختبار .

المتسلسلة ليست متقاربة بالإطلاق على المحيط $D(0,1)$ أي عند $|\mathfrak{Z}| = 1$

وهنا نميز حالتين :

أ- $|\mathfrak{Z}| \neq 1$, $\mathfrak{Z} = 1$ وتصبح المتسلسلة

Syria Math Team

$$\lambda = 1 \Rightarrow \sum\left|\frac{3^n}{n}\right| = \sum\frac{1}{n}$$ ريمانية متباعدة

ب- $\lambda \neq 1 \, , |\lambda| = 1$

وحسب ديدكند $V_n = \frac{1}{n} \to 0 \, , a_n = 3^n$

$\sum a_n = \sum 3^n$ مجاميع جزئية محدود

$\sum(V_n - V_{n+1})$ متقاربة بالإطلاق

اختبار دوبواريموند

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n V_n$ متسلسلة عقدية

أذا تحقق الشرطين:

١)- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متقاربة.

٢)- $\sum_{n=0}^{\infty}(V_n - V_{n+1})$ متقاربة بالإطلاق .

فإن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n V_n$ متقاربة .

تمرين: أثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{n}$ متقاربة

$$a_n = \sin\frac{\pi}{n^2} \quad , V_n = \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(V_n - V_{n+1})$ متقاربة بالإطلاق (وأثبتنا ذلك سابقا)

$\sum a_n = \sum \sin\frac{\pi}{n^2}$ متقاربة

$\frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{\frac{\pi}{n^2}} \to 1 > 0$ حسب معيار نهاية النسبة.

تمرين: أثبت أن $\sum \frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{n^2}$ متقاربة بالإطلاق

$$0 \leq \sin\pi \leq 1$$

$$0 \leq \sin\frac{\pi}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Syria Math Team

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة فإن يقتضي $\sum\frac{\sin\frac{\pi}{n^2}}{n^2}$ متقاربة وبما أنها ذات الحدود حقيقية سالبة فإنها متقاربة بالإطلاق

◄ملاحظة :وهنا طلب الدكتور التقارب بالإطلاق وبالتالي لا نستخدم معايير التقارب (دالمبير – دوبواريموند)

جداء متسلستين

تعرف المتسلسلة الجداء $\sum_{n=0}^{\infty}P_n$ لمتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty}w_n\ ,\sum_{n=0}^{\infty}3_n$

◄ملاحظة :وهنا بإمكاننا أن نجعل المتسلسلة تبدأ من الصفر وبالتالي نأخذ الحدود من الصفر الى اللانهاية وبالتالي تصبح كل الحدود التي قبل a_0 نأخذها أصفار $(3_{11},3_{00},\dots)$

ونعرف الجداء بعدة طرق منها :

١) – **تشكيل P_n وفق الخطوات المائلة**

$$\begin{array}{cccc} \boxed{P_0} & \boxed{P_1} & \boxed{P_3} & \boxed{P_6} \\ 3_0w_0 & 3_0w_1 & 3_0w_2 & 3_0w_3\ \dots \\ \boxed{P_2} & \boxed{P_4} & \boxed{P_7} & \\ 3_1w_0 & 3_1w_1 & 3_1w_2 & 3_1w_3\ \dots \\ \boxed{P_5} & \boxed{P_8} & & \\ 3_2w_0 & 3_2w_1 & 3_2w_2 & 3_2w_3\ \dots \end{array}$$

هنا أخذنا P_1,P_0 وبالتالي P_2 هو الأسفل العنصر الذي على يسار P_1 والعمليات التي تجري بينهما هي مجموع كل عنصر من P هو عبارة عن جداء عنصر من 3_nw_n وبالتالي تكون الباقي بخطوط مائلة

٢) – **تشكل P_n وفق مربعات** :

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{P_0} & \boxed{P_1} & & \boxed{P_4} & \\ 3_0w_0 & 3_0w_1 & & 3_0w_2 & \dots \\ \boxed{P_3} & \boxed{P_2} & \downarrow & \boxed{P_5} & \downarrow \\ 3_0w_0 & \leftarrow & 3_0w_1 & 3_0w_2 & \dots \\ & & & & \downarrow \\ \boxed{P_8} & & \boxed{P_7} & \boxed{P_6} & \downarrow \\ 3_0w_0 & \leftarrow & 3_0w_1 & \leftarrow\ 3_0w_2 & \dots \end{array}$$

وهنا العمليات التي تجري بينهما هي جمع وتشكل لـ P_i بشكل مربعات

٣) – **تشكيل P_n وفق كوشي** :

P_0

Syria Math Team

$$3_0w_0 \quad 3_0w_1 \quad 3_0w_2 \quad \dots$$
$$\times \qquad \times$$
$$P_1 = \; 3_1w_0 \quad 3_1w_1 \quad 3_1w_2 \quad \dots$$
$$\times \qquad \times$$
$$P_2 = \; 3_2w_0 \quad 3_2w_1 \quad 3_2w_2 \quad \dots$$

وبالتالي فإن الطريقة الأولى والثانية صعبة في تحديد الصيغة العامة لحد لنونية ولكن طريقة الثالثة نجد لها طريقة لصياغة الحد النوني ومنه

$$P_n = 3_0w_n + \; 3_1w_{n-1} + \cdots + \; 3_nw_0 = \sum_{k=0}^{\infty} 3_kw_{n-k}$$

◄ملاحظات :

١- عندما نقول جداء متسلسلتين فنقصد به جداء كوشي للمتسلسلتين
٢- أن تقارب إحدى متسلسلات الجداء المعرفة بالطرق السابقة لا يقتضي تقارب متسلسلة جداء معرفة بطريقة أخرى
إما أذا كانت أحداها متقاربة بالإطلاق فإن جميعها ستكون متقاربة بالإطلاق ويكون لجميعها المجموع ذاته
٣- أن تقارب متسلسلتين لا يقتضي بالضرورة تقارب متسلسلة الجداء لهما تقاربها

مثال معاكس (متقاربتين متسلسلة الجداء لهما متباعدة)

أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

متقاربة حسب لايبنز (متناقصة وحدها العام يسعى الى الصفر) إلا أن جداء هذه المتسلسلة بنفسها متباعدة

$$\left(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$$

لأن لنفرض أن متسلسلة الجداء هي P_n

$$\Rightarrow P_n = \sum_{n=0}^{\infty} 3_kw_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}$$

Syria Math Team

$$= \underbrace{(-1)^n}_{\text{ثابت المجموع}} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}}_{\text{حدها العام للمتسلسلة الجداء}}$$

$$= (k+1)(n-k+1) = -k^2 + nk + k + n - k + 1$$

$$= -\left(k^2 - nk + \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{4}\right) + 1 + n$$ هنا استخدمنا إتمام لمربع كامل

$$= -\left(k - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4} + n + 1$$

$$= -\left(k - \frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2$$

طرح حدين و أخذنا الحد الأكبر لإزالة منه المطروح

$$(k+1)(n-k+1) \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{2}{n+2}$$

وهنا سيكون المجموع $n+2$ مرة وبالتالي

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$$: متقاربة وتسعى ل ٢

$$|P_n| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

$$b_n \geq a_n$$

$\lim b_n \geq \lim a_n$ وبالتالي $|P_n| \nrightarrow 0$ لأن $|P_n| \geq \frac{2(n+1)}{2}$ وأيضاً $P_n \nrightarrow 0$ متباعدة

وبالنتيجة : $|P_n| \nrightarrow 0 \Longleftarrow$ إذا الطويلة متقاربة من الصفر وهذا يؤدي إلى أن P_n لا تسعى إلى الصفر متباعدة $\sum P_n$.

مبرهنة ميرتن

Syria Math Team

إذا كانت $\sum 3_n , \sum w_n$ متسلسلتين عقديين أحدهما متقاربة والأخرى متقاربة بالإطلاق فإن جداء كوشي لها متسلسلة متقاربة وفي حاله التقارب يكون مجموع متسلسلة الجداء مساوياً لجداء مجموعتين $\sum 3_n , \sum w_n$.

مبرهنة كوشي

إذا كان $S = \sum 3_n , \sigma = \sum w_n$ متسلسلتين متقاربتين بالإطلاق فإن متسلسلة الجداء لهما ستكون متقاربة بالإطلاق فإن $\sum P_n = S.\sigma$.

مبرهنة آبل

إذا كانت المتسلسلتان $\sum 3_n , \sum w_n$ والمتسلسلة الجداء لهما $\sum P_n$ متسلسلات متقاربة فإن متسلسلة الجداء سيساوي جداء مجموعي $\sum 3_n , \sum w_n$.

انتهت المحاضرة

إعداد: كمال الرفاعي – باسل أبو عيسى – هالة مصطفى

Syria Math Team