◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة السادسة عشرة　　عنوان المحاضرة: المتجهات العشوائية

سندرس في هذه المحاضرة الفصل الرابع و الذي يدرس المتجهات العشوائية المنقطعة و توزيعاتها الاحتمالية و لكن قبل ذلك .. سنورد حل تمرين عما سبق

تمرين: ليكن X متغيراً عشوائياً دالة توزيعه الاحتمالية :

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & ; x>0\\ 0 & ; \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ X وتحقق من ذلك ، ثم عين $P(X>10)$.

الحل

$$f_X(x)=\left(F_X(x)\right)'=(1-e^{-x})'=e^{-x}$$

فتصبح دالة الكثافة الاحتمالية بالشكل :

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & ; x>0\\ 0 & ; \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

وللتحقق نجد أنَّ : $f_X(x)\geq 0$ فالشرط الأول محقق ، فنتحقق من الشرط الثاني :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x).dx=\int_{-\infty}^{0}(0).dx+\int_{0}^{+\infty} e^{-x}.dx=0+[-e^{-x}]_0^{+\infty}=0+1=1$$

ومنه الشرط الثاني أيضاً محقق فنجد أنها دالة كثافة احتمالية فعلية ، وإنَّ :

$$P(X>10)=1-P(X\leq 10)=1-F(10)=1-[1-e^{-10}]=e^{-10}$$

أو : $P(X>10)=\int_{10}^{\infty} e^{-x}.dx=[-e^{-x}]_{10}^{+\infty}=0-(-e^{-10})=e^{-10}$

المتجهات (الأشعة) العشوائية

- تعريف المتجه (الشعاع) العشوائي :

ليكن (Ω,f,P) فضاءً احتمالياً و $X=(x_1,x_2,\dots,x_d)$ تطبيق من Ω في R^d أي :

$$X:(\Omega,f)\to\left(R^d,\ \underbrace{\beta(R^d)}_{\text{جبر بوريل على } R}\right)$$

أي أنه من أجل $B\in\beta(R^d)$ فإن $B=I_1\times I_2\times\dots\times I_d$ حيث I_i مجال حقيقي و يكون الحديث :

$$[X\in B]=[(x_1,x_2,\dots,x_d)\in I_1\times I_2\times\dots\times I_d]$$

$$=[x_1\in I_1,x_2\in I_2,\dots,x_d\in I_d]$$

$$\bigcap_{i=1}^{i=d}[x_i\in I_i]$$

فإذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall B\in\beta(R^d)\quad:[X\in B]\in f$$

(أي أن الصورة العكسية وفق التطبيق X لأي مجموعة بوريلية ($B\in\beta(R^d)$) هي حدث من f عندئذٍ نقول عن X إنه متجه عشوائي أو شعاع عشوائي

- **في حالة خاصة عندما $d=1$ نحصل على المتغير العشوائي :**
$X:\Omega\to R$

مبرهنة (١) : ليكن (Ω,f,P) فضاءً احتمالياً و لتكن الدالة $X:\Omega\to R^d$ عندئذٍ الشرط اللازم و الكافي ليكون Xشعاعاً عشوائياً هو أن تكون مركباته $x_1,x_2,\dots,x_d$ متغيرات عشوائية

مبرهنة (٢):ليكن X شعاعاً عشوائياً في R^d و $f:R^d\to R^\alpha$ دالة مستمرة عندئذٍ foX هو شعاع عشوائي

نتائج: إذا كان X متغيراً عشوائياً في R فإن :

١- $X+a$ متغير عشوائي حيث a ثابت حقيقي
٢- X^n هو متغير عشوائي
٣- مجموع متغيرات عشوائية $X_1+X_2+\cdots+X_n$ هو متغير عشوائي

دراسة الشعاع العشوائي (الثنائي) R^2 :

- ليكن $z=(x,y)$ شعاعاً عشوائياً في R^2 منفصلاً قيمه (x_i,y_j) حي $i,j=1,2,\dots$

عندئذٍ الدالة المعرفة بالشكل $f_{(X,Y)}(x,y) = P(X = x_i, Y = y_j) : i,j = 1,2,\dots$ تمثل الكثافة الاحتمالية المشتركة للشعاع (X,Y) و نرمز لها $f_{(X,Y)}(x,y)$ و ندعو الدالتين $f_X(x_i)$ و $f_Y(y_i)$ بدالتي الكثافة الهامشية لـ X و Y على الترتيب حيث :

$$f_X(x_i) = P(X = x_i)$$
$$f_Y(y_j) = P(Y = y_j)$$

و تجدر الإشارة إلى أن كلا الدالتين يمكن إيجادهما من دالة الكثافة المشتركة كما يلي :

$$f_X(x_i) = \sum_j f_{(X,Y)}(x_i, y_j)$$

$$f_Y(y_j) = \sum_i f_{(X,Y)}(x_i, y_j)$$

و يمكن وصف الكثافة المشتركة و الهامشية في جدول كما يلي :

Y \ X	x_1	x_2	…	x_i	…	$\sum$
y_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_2,y_1)$	…	$f(x_i,y_1)$	…	$f_y(y_1)$
y_2	$f(x_1,y_2)$	$f(x_2,y_2)$	…	$f(x_i,y_2)$	…	$f_y(y_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$
y_j	$f(x_1,y_j)$	$f(x_2,y_j)$	…	$f(x_i,y_j)$	…	$f_Y(x_i,y_j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$
$\sum$	$f_X(x_1)$	$f_X(x_2)$	…	$f_X(x_i)$	…	$\boxed{1}$

حيث أن الكثافة المشتركة لـ (X,Y) تحقق :

$$1)\ \forall x \in R_x \quad ,\forall y \in R_y \quad : 1 \geq f(x,y) \geq 0$$
$$2)\ \sum_x \sum_y f(x,y) = 1$$

- **دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة : و تعرَّف بـ :**

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

- الشعاع العشوائي الثنائي المستمر :

ليكن $z=(x,y)$ شعاعاً عشوائياً في R^n مستمراً (مجموعة قيمه مجموعة غير منتهية أو غير قابلة للعد) عندئذ نقول عن الدالة :

$$f:\Omega \to R^2$$

إنها دالة كثافة احتمالية للشعاع العشوائي (X,Y) إذا حقق الشرطين :

$$1)\forall x,y\in R \quad f_{XY}(x,y)\geq 0$$

$$2)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy=1$$

و الكثافتين الهامشيتين لـ X,Y تحسبان كما يلي :

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy \quad \& \quad f_y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx$$

- **دالة التوزيع الاحتمالي المشترك هي :**

$$F_{XY}(x,y)=P(X\leq x,Y\leq y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)du\,dv$$

الاستقلال العشوائي :

نقول عن متغيرين عشوائيين X,Y إنهما مستقلان عشوائياً إذا كان :

$$P(X\leq x,Y\leq y)=P(X\leq x).P(Y\leq y)$$

و هذا الشرط يكافئ الشرط التالي :

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x).f_Y(y)$$

فائدة دالة التوزيع الاحتمالي و خواصها :

١- تسمح بحساب احتمالات من الشكل $P\big((a<x\leq b)\&(c<y\leq d)\big)$حيث :

$$P\big((a<x\leq b).(c<y\leq d)\big)$$
$$=F_{XY}(b,d)-F_{XY}(a,d)-F_{XY}(b,c)+F_{XY}(a,c)$$

٢- احتمال :

$$P\big((a \le x \le b),(c \le y \le d)\big) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$$

٣- $F_X(x) = F_{XY}(x,+\infty)$ و $F_y(y) = F_{XY}(\infty, y)$

٤- $\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{XY}(x,y)$ أي أن الكثافة المشتركة هي المشتق الثاني لدالة التوزيع مرة لـ x و مرة لـ y

◀ **ملاحظة:** يمكن تعميم كل ما سبق من أجل شعاع عشوائي $X \in R^d$

تمرين : ليكن X متغيراً عشوائياً دالة الكثافة الاحتمالية له معرفة بالجدول :

X	0	1
$f_X(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

و ليكن Y متغيراً عشوائياً **مستقلاً عن X** دالة كثافته الاحتمالية معرفة بالجدول :

Y	0	1	2
$f_Y(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

و المطلوب :

١- عين $f_{XY}(x,y)$

٢- عين دالة الكثافة للمتغير $Z = X + Y$

الحل :

١- بما أن X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإن $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

و بالتالي جدول الكثافة المشتركة يكون:

$X \backslash Y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	$f(0,0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$	$f(0,1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$f(0,2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$	$f_X(0) = \frac{1}{3}$

1	$f(1,0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{12}$	$f(1,1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$	$f(1,2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$	$f_X(1)=\frac{2}{3}$
$f_y(y)$	$f_Y(0)=\frac{1}{4}$	$f_Y(1)=\frac{1}{2}$	$f_Y(2)=\frac{1}{4}$	1

٢- من أجل المتغير العشوائي $Z=X+Y$ لنعين قيم R_z : (نجمع قيم x مع قيم y بكل التباديل الممكنة)

$$R_Z=\{0,1,2,3\}$$

و الاحتمالات الموافقة لقيم Z هي :

$$P(Z=0)=P(X+Y=0)=P(X=0,Y=0)=f(0,0)=\frac{1}{12}$$

$$P(z=1)=P(X+Y=1)=P\big((X=0,Y=1)\cup(X=1,Y=0)\big)$$

$$=f(0,1)+f(1,0)=\frac{2}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(Z=2)=P\big((X=1,Y=1)\cup(X=0,Y=2)\big)=f(1,1)+f(0,2)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

$$P(Z=3)=P(X=1,Y=2)=f(1,2)=\frac{1}{8}$$

و بالتاي جدول الكثافة لـ Z :

Z	0	1	2	3	Σ
$f_Z(z)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{36}$	1

انتهت المحاضرة

إعداد: خديجة الرفاعي – ولاء المخبر – نهى الحبشية