نظري

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄ المحاضرة الخامسة عشر

عنوان المحاضرة : التراكيب الخطية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـتمهيدة التراكيب الخطية

تمهيدية التراكيب الخطية :

ليكن لدينا X فضاء منظم ، ولتكن المجموعة $\{x_1, x_2, \dots.., x_n\}$ جملة من الأشعة (منتهية) المستقلة خطياً "بغض النظر عن بعد الفضاء X "

بالتالي هذه المجموعة تولد فضاء جزئي منتهي الأبعاد كل عنصر منه يكتب على شكل تركيب خطي بدلالة هذه المجموعة

عندئذ يوجد $c >$ ٠ مستقل عن X بحيث :

$$(*) \quad \|\propto_1 x_1 + \cdots..+\propto_n x_n\| \geq c \sum_{i=1}^{n} |\propto_i|$$

بحيث أياً كانت الأعداد $\propto_1, \dots, \propto_n$

البرهان :

- لنفرض أن $|\propto_1| + |\propto_2| + \cdots..+|\propto_n| = S$ واضح تماماً

إذا كان $S = 0$ فإن كلاً من $\propto_i = 0$ ذلك أياً كان $i = 1,2, \dots, n$

بالتالي $(*)$ محققة أياً كان c .

- بفرض أن $\sum_{i=1}^{n} |\propto_i| = S \neq 0$

إذا فرضنا أن $\beta_i = \frac{\propto_i}{S}$ فإن $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\propto_i|}{S} = 1$

إذا قسمنا طرفي $(*)$ على S وبما أنه $S > 0$ يمكننا إدخاله للنظيم ويكافئ لدينا

$$\left\|\frac{\propto_1}{s}x_1 + \dots\dots\dots + \frac{\propto_n}{s}x_n\right\| \geq c\sum_{i=1}^{n}\frac{|\propto_i|}{s}$$

$$\|\beta_1 x_1 + \dots\dots\dots + \beta_n x_n\| \geq c\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|$$

$$(**)..\quad \|\beta_1 x_1 + \dots\dots + \beta_n x_n\| \geq c$$

يكفي البرهان على وجود عدد موجب c بحيث تكون (**) محققة ، لنفرض مؤقتاً أن (**) غير صحيحة أي أن :

$$\forall c\,;\quad \|\beta_1 x_1 + \cdots .. + \beta_n x_n\| < c$$

هذا يقتضي وجود متتالية من العناصر y_m بحيث :

$$y_m = \|{\beta_1}^m x_1 + \cdots .. + {\beta_n}^m x_n\| < c \quad ; \left(\sum_{i=1}|\beta_i| = 1\right)$$

بحيث أن $\|y_m\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

- لماذا المتتالية y_m موجودة ؟ (ممكن أن تكون المتتالية ثابتة)

بالتالي مهما c يوجد متتالية y_m بحيث $\|y_m\| =$ و $\|y_m\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

$\|\beta_1^m x_1, \dots\dots, \beta_n^m x_n\| < c$

نختار $c = {}^1\!/_m$ من أجل كل m نجد عنصر أي :

من أجل $m = 1$ يوجد $\beta_1^1 x_1 + \beta_2^1 x_2 + \dots\dots + \beta_n^1 x_n$

من أجل $m = 2$ يوجد $\beta_1^2 x_1 + \beta_2^2 x_2 + \dots\dots + \beta_n^2 x_n$

وبالتالي وجدت متتالية بحيث $0 \leq \|y_m\| < c = \frac{1}{m}$

عندما $m \to \infty$ فإن $c \to 0$ ومنه $\|y_m\| \to 0$

ولما كان $\sum_{i=1}^{n}|\beta_i^m| = 1$ ومنه $|\beta_i^m| \leq 1$ أياًكانت m وأياً كانت i فإن المتتالية:

$$(B_i^m) = (B_i^1, B_i^2, \dots\dots .)$$

نتجت عن ما يلي :

$$y_1 = \beta_1^1 x_1 + \beta_2^1 x_2 + \cdots + \beta_i^1 x_i + \cdots .. + \beta_n^1 x_n$$

$$y_2 = \beta_1^2 x_1 + \beta_2^2 x_2 + \ldots + \beta_i^2 x_i + \cdots .. + \beta_n^2 x_n$$

.

.

$$y_m = \beta_1^m x_1 + \beta_2^m x_2 + \cdots + \beta_i^m x_i + \cdots .. + \beta_n^m x_n$$

تكون المتتالية محدودة لدى تثبيت i (عند النظر لمتتالية الأعمدة من أجل الأعداد β_i^m)

اي أن $\left(\beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}, \beta_i^{(3)}, \ldots\ldots, \beta_i^{(m)}, \ldots.\right) = (\beta_i^m)$ المتتالية العددية من $\mathbb{R}$

كل عنصر من عناصرها يحقق المحدودية وبالتالي المتتالية محدودة حسب مبرهنة (بولزانو فيرشتراس) كل متتالية محدودة تحوي متتالية جزئية متقاربة فيها .

مبرهنة بولزانو فيرشتراس تنص

على أن كل مجموعة غير فارغة من $\mathbb{R}$ محدودة وغير منتهية تملك نقطة جمع واحدة على الأقل .

بتطبيق هذه المبرهنة على المتتاليات :

بالتالي المتتالية لدينا محدودة وغير منتهية من العناصر فهي تملك نقطة وتجمع واحدة على الاقل

في كل متتالية عامود يتحقق هذا الشرط وبالتالي تملك نقطة تجمع يقابلها متتالية جزئية تتقارب إلى هذه النقطة أي لكل عامود هناك متتالية جزئية متقاربة .

هدفنا الحصول على متتالية جزئية من y_m تكون متقاربة :

المتتالية في العامود الأول $\left(\beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \beta_1^{(3)}, \ldots\ldots, \beta_1^{(m)}, \ldots.\right) = (\beta_1^m)$ حسب مبرهنة بولزانو فيرشتراس تحوي متتالية جزئية متقاربة وليكن β_1 نهاية هذه الجزئية

نأخذ العناصر المقابلة لهذه المتتالية الجزئية المتقاربة مع مقابلاتها في العمود الثاني بالتالي تتشكل متتالية من العمود الثاني محدودة وغير منتهية وبالتالي تملك جزئية متقاربة بفرض أن β_2 نهاية هذه الجزئية. المتتالية في العمود الثاني اذا اخذنا ما يقابلها من المتتالية في العمود الأول ستكون المتتالية الجزئية من متتالية متقاربة فهي متقاربة .

نأخذ العناصر المقابلة للمتتالية الجزئية في العمود الثاني مع ما يقابلها في العمود الثالث ستتشكل متتالية محدودة غير منتهية حسب مبرهنة فايرشتراس تملك جزئية متقاربة

نتابع هذا العمل حتى العمود n وبأخذ ما يقابلها مع المتتاليات الأعمدة من العمود الأول حتى $n-1$ هي متتالية جزئية من متقاربة فهي متقاربة .

بالتالي يتشكل لدينا متتالية جزئية متقاربة من y_m لنرمز لها بـ y'_m بحيث أن كل عامود يتقارب من $\beta_i'^{(m)} \to \beta_i$

أي $y'_m = \beta_1'^{(m)} x_1, \beta_2'^{(m)} x_2 + \cdots . + \beta_n'^{(m)} x_n \to y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$

حيث $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1$ وهذا يعني أنه لا يمكن ان تكون الأعداد β_i أصفار كلها بما أن $\{x_1, \dots \dots, x_n\}$ مستقلة خطياً فإن $y \neq 0$ ومن جهة أخرى $y'_m \longrightarrow y$

يقتضي أن $\|y'_m\| \longrightarrow \|y\|$ (استناداً إلى استمرار النظيم ولما كان $\|y_m\| \longrightarrow 0$ فرضاً و y'_m جزئية من y_m فلا بد أن يكون $\|y'_m\| \longrightarrow 0$

هذا يقتضي $\|y\| = 0$ ولكن هذا يناقض كون $y \neq 0$ وبالتالي قد أثبتنا صحة التمهيدية

-مبرهنة التمام :

كل فضاء جزئي منتهي البعد Y من فضاء منظم X لابد أن يكون تاماً وبوجه خاص فإن كل فضاء منظم منتهي البعد تام . ((سيتم البرهان في المحاضرة القادمة)).

انتهت المحاضرة

إعداد: بسمة نصر الله ، تقى إسماعيل ، رشا القرصة