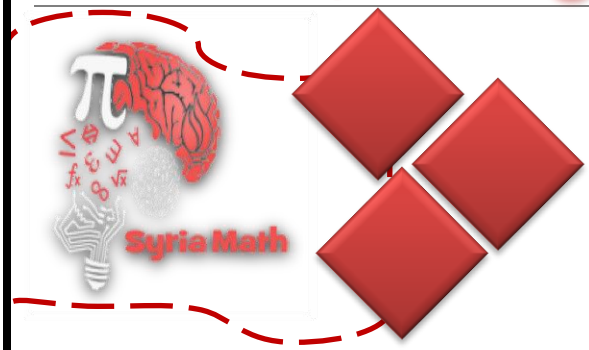


المحاضرة 6

الأولى والثانية

◄ دكتور المادة: شغف زوربا

◄ عنوان المحاضرة: Convex Analysis

التحليل المحدب

التحليل المحدب اداة مهمة [1]لأبحاث [2]المسائل الأمثلية في فضاء علاقات الترتيب الخطي لسببين رئيسيين.

[3]علاقة الترتيب الجزئي في فضاء شعاعي حقيقي يمكن [4]توصيفها [5]بالمخروط المحدب ولذلك النظريات المتعلقة بالمخاريط المحدبة مستخدمة جدا. [6]بالاضافة لذلك [7]مسلمات الفصل مفيدة بشكل خاص [8]لتطوير نظرية لاغرانج.

في هذا الجزء الاول الذي [9]يتألف من ثلاثة اقسام سوف نعرض كل هذه النتائج في [10]التحليل المحدب والتي هي [11]ضرورية للنظريات التالية في مسائل الامثلية المتجهية

النظريات الاكثر أهمية هي مسلمات الفصل ،نظرية جيمس ونظرية كرين روتمان.

Convex Analysis

Convex analysis turns out to be a powerful tool for the [1]investigation of [2]vector optimization problems in a partially ordered linear space for two main reasons.

[3]A partial ordering in a real linear space can be [4]characterized by a [5]convex cone and, therefore, theorems concerning convex cones are very useful.

[6]Furthermore, [7]separation theorems are especially helpful for the [8]development of a Lagrangian theory.

- In this first part which [9]consists of three chapters we present all these results on[10] convex analysis which are [11]necessary for the following theory on vector optimization.

The most important theorems are separation theorems, a James theorem and a Krein-Rutman theorem.

الفصل الاول
الفضاءات الخطية

على الرغم من ان نتائج عديدة للنظرية الموصوفة في الجزء الثاني من هذا الكتاب صحيحة في اطار مجرد نوعا ما فإننا نحصر اهتماماتنا [1]بالفضاءات الخطية (الشعاعية) الحقيقية.

-للسهولة نلخص في هذا الجزء التعاريف المعروفة للفضاءات الخطية[2]المجموعات المحدبة الخطية و بالاضافة الى تعريف (المحدبة محليا) [3]الفضاءات الخطية التبولوجية ونشرح [4]العلاقات المرتبة جزئيا كما في المجموعات الخطية.

أخيرا ندرس بعض علاقات الترتيب الجزئية للفضاءات الخطية ونسرد العديد من الخصائص المعروفة.

Chapter 1
Linear Spaces

Although several results of the theory described in the second part
of this book are also valid in a rather abstract setting we restrict our attention to [1]real linear spaces.

- For convenience, we summarize in this chapter the well-known definitions of linear spaces and [2]convex sets as well as the definition of (locally convex)[3] topological linear spaces
and we consider [4]a partial ordering in such a linear setting.

Finally,we investigate some special partially ordered linear spaces and list various known properties.

1.1 الفضاءات الخطية والمجموعات المحدبة

سنسترجع تعريف الفضاءات الخطية الحقيقية ونعرض بعض المسميات(الرموز)الأخرى.

1.1 Linear Spaces and Convex Sets

We recall the definition of a real linear space and present some other notations.

WhatsApp : 0997378154 Facebook_Page : IOM

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية

Definition 1.1. Let X be a given set. [1]Assume that an addition on X,
i.e. a [2]map from $X \times X$ to X, and a [3]scalar multiplication on X, i.e. a map from $R \times X$ to X, is defined.
The set X is called areal linear space, if the following axioms are satisfied (for arbitrary $x, y, z \in X$ and $\lambda, \mu \in R$):
(a) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
(b) $x + y = y + x$,
(c) there is an element $0_X \in X$ with $x + 0_X = x$ for all $x \in X$,
(d) for every $x \in X$ there is a $y \in X$ with $x + y = 0_X$
(e) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$,
(f) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
(g) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,
(h) $1x = x$.
The element 0_X given under (c) is called the zero element of X.

تعريف1.1 ليكن X مجموعة معطاة. [1]نفرض الجمع في X، هذا يعني [2]تطبيق من $X \times X$ الى X [3]والضرب السلمي في X، هذا يعني تطبيق من $\mathbb{R} \times X$ الى X معرفين المجموعة X تدعى الفضاء الخطي الحقيقي اذا تحققت المسلمات الاتية(من اجل العناصر الكيفية:
$x, y, z \in X$ and $\lambda, \mu \in R$):
(a) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
(b) $x + y = y + x$,
(c)يوجد عنصر $0X \in X$ يحقق $x + 0X = x$ من اجل كل $x + 0X = x$
(d) $x + y = 0_X$ لكل $x \in X$ يوجد $y \in X$ يحقق
(e) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$,
(f) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
(g) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,
(h) $1x = x$.
العنصر 0_X المعطى في C يدعى العنصر الصفري ل X

Definition 1.2. Let S and T be nonempty subsets of a real linear space X.
Then we define [1]the algebraic sum of S and T as
$S + T := \{x + y \mid x \in S \text{ and } y \in T\}$
and the [2]algebraic difference of S and T as
$S - T := \{x - y \mid x \in S \text{ and } y \in T\}$.
For an arbitrary $\lambda \in$ R the notation λ S will be used as
$\lambda S := \{\lambda x \mid x \in S\}$.
It is important to note that the set equation $S + S = 2S$ does not hold in general for a nonempty subset S of a real linear space.

تعريف 1.2 لتكنS و T مجموعتين جزئيتين غيرخاليتين من الفضاء الحقيقي X.
عندئذ نعرف [1]المجموع الجبري S و T *بالشكل*
$S + T := \{x + y \mid x \in S \text{ and } y \in T\}$
[2]والفرق الجبري ل S و T *بالشكل*
$S - T := \{x - y \mid x \in S \text{ and } y \in T\}$.
من اجل عنصر عشوائي $\lambda \in$ R فالرمز λ S سنستخدمه بالشكل
$\lambda S := \{\lambda x \mid x \in S\}$.
من المهم ان نلاحظ ان معادلة المجموعة $S + S = 2S$ ليست محققة في الحالة العامة لأجل مجموعة جزئية غير خالية S من الفضاء الشعاعي الحقيقي.

Definition 1.3. Let X be a real linear space. The set X' Is defined to be the set of all linear maps from X to R. If we define for all $\phi, \psi \in X'$ and all $\lambda \in R$
$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$ for all $x \in X$
and
$(\lambda\phi)(x) = \lambda\, \phi(x)$ for all $x \in X$,
then X' is a real linear space [1]itself and it is called the [2]algebraic dual space of X. The algebraic dual space of X' is denoted by X'' and it is called the second algebraic dual space of X.

تعريف1.3 لتكنX فضاء خطي حقيقي .المجموعة X' تعرف بأنها مجموعة كل التطبيقات الخطية من X الى R اذا عرفنا لكل $\phi, \psi \in X$ وكل $\lambda \in R$
$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$ for all $x \in X$
و $(\lambda\phi)(x) = \lambda\, \phi(x)$ for all $x \in X$,
اذاً X' فضاء خطي حقيقي [1]بحد ذاته ويدعى [2]الفضاء الثنوي الجبري ل X.الفضاء الثنوي الجبري ل X' يرمز له ب X'' ويدعى الفضاء الثنوي الجبري الثاني ل X

The most important [1]class of subsets in a real linear space are convex sets.
Definition 1.4. Let S be a subset of a real linear space X.
(a) Let some $\bar{x} \in S$ be given. The set S is called [2]starshaped at $\bar{x}$,

[1]صف المجموعات الجزئية الأكثر اهمية في الفضاء الخطي الحقيقي هي المجموعات المحدبة.
تعريف1.4 لتكن S مجموعة جزئية من فضاء خطي حقيقيX.
(a)لتكن $\bar{x} \in S$ معطى. المجموعة تدعى [2]نجمية الشكل عند$\bar{x}$

إذا كان لكل $x \in S$
$\lambda x + (1-\lambda)\bar{x} \in S \; for\; all\; \lambda \in [0,1]$
(b)المجموعة S تدعى محدبة اذا كان لكل $x, y \in S$
$\lambda x + (1-\lambda)y \in S \; for\; all\; \lambda \in [0,1]$
(C)المجموعة S تدعى [3]متوازنة اذا كانت غير خالية و
$\alpha S \subset S \; for\; all\; \alpha \in [-1,1].$
(d)المجموعة S تدعى [4]محدبة تماما ذا كانت نجمية ومتوازنة.
[5]وضوحا، المجموعة الفارغة محدبة والمجموعة النجمية التي تكون نجمية عند كل نقطة هي نجمية ايضا

If for every $x \in S$
$\lambda x + (1-\lambda)\bar{x} \in S \; for\; all\; \lambda \in [0,1]$
(b) The set S is called convex, if for every $x, y \in S$
$\lambda x + (1-\lambda)y \in S \; for\; all\; \lambda \in [0,1]$
(c) The set S is called [3]balanced, if it is nonempty and
$\alpha S \subset S \; for\; all\; \alpha \in [-1,1].$
(d) The set S is called[4] absolutely convex, if it is convex and balanced.
[5]Obviously, the empty set is convex and a set which is starshaped at every point is convex as well.

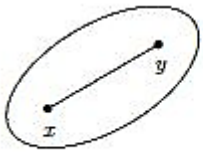


Figure 1.2: Convex set.

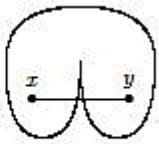


Figure 1.3: Non-convex set.

ملاحظة1.5
(a)[1]تقاطع [2]عدد كيفي للكثير من المجموعات المحدبة من فضاء شعاعي حقيقي يكون محدب
(b) اذا كانتS و T مجموعات جزئية محدبة [3]غير فارغة من فضاء شعاعي حقيقي X عندئذ [4]المجموع الجبري α S + β T محدب لكل α S + β T
[5]نتيجة ،لكل $\bar{x} \in X$ ،المجموعة [6]المنسجة $S + \{\bar{x}\}$تكون محدبة ايضا

Remark 1.5.
(a) The [1]intersection of [2]arbitrarily many convex sets of a real linear space is convex.
(b) If S and T are [3]nonempty convex subsets of a real linear space X,
then the [4]algebraic sum $\alpha S + \beta T$ is convex for all $\alpha, \beta \in R$.
[5]Consequently, for every $\bar{x} \in X$ the [6]translated set $S + \{\bar{x}\}$ is convex as well.

تعريف1.6 لتكن S مجموعة جزئية من فضاء خطي حقيقي X.
تقاطع كل المجموعات الجزئية المحدبة من X والتي [1]تحوي S تدعى [2]القشرة المحدبة لS ويرمز له ب $co(S)$.

Definition 1.6. Let S be a nonempty subset of a real linear space X. The intersection of all convex subsets of X that [1]contain S is called
the [2]convex hull of S and is denoted $co(S)$.

ملاحظة1.7 لكل مجموعتين جزئيتين غير خاليتين S و T من فضاء شعاعي حقيقي X [3]نحصل من اجل كل $\alpha, \beta \in R$
$co(\alpha S + \beta T) = \alpha co(S) + \beta co(T).$
بالتالي، نعتبر المجموعات التي هي اما [4]مفتوحة جبريا او [5]مغلقة

Remark 1.7. For two nonempty subsets S and T of a real linear space we [3]obtain for all $\alpha, \beta \in R$
$co(\alpha S + \beta T) = \alpha co(S) + \beta co(T).$
Next, we consider sets which are [4]algebraically open or [5]closed.

تعريف1.8 لتكن S مجموعة جزئية من فضاء خطي حقيقي X.
(a)المجموعة داخل(S):=$\{\bar{x} \in S$ بحيث :لكل $x \in X$ يوجد $\bar{\lambda} > 0$ يحقق $\bar{x} + \lambda x \in S$ لكل $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]\}$
تدعى [1]الداخل الجبري لS (او [2]نواة S)

Definition 1.8. Let S be a nonempty subset of a real linear space X.
(a) The set $cor(S) := \{\bar{x} \in S \mid for\; every\; x \in X\; there\; is\; a\; \bar{\lambda} > 0\; with\; \bar{x} + \lambda x \in S \; for\; all\; \lambda \in [0, \bar{\lambda}]\}$
is called the [1]algebraic interior of S (or the [2]core of S)

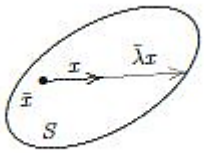


Figure 1.4: $\bar{x} \in cor(S)$.

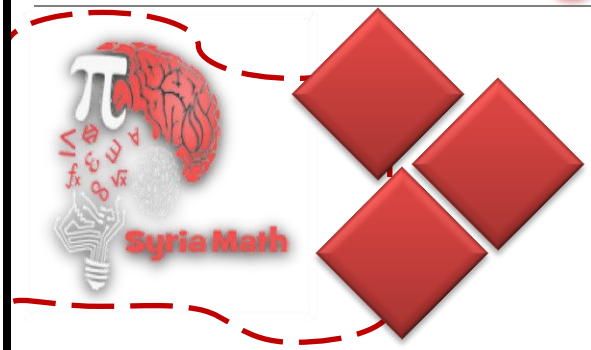
(b) The set S with $S = cor(S)$ is called algebraically open. (c) The set of all elements of X which do not belong to $cor(S)$ and $cor(X\backslash S)$ is called the [3]algebraically boundary of S (d) An element $\bar{x} \in X$ is called [4]linearly accessible from S, if there is an $x \in S, x \neq \bar{x}$, with the [5]property $\lambda x + (1-\lambda)\bar{x} \in S \; for \; all \; \lambda \in (0,1]$.	(b)المجموعة S حيث $S = \mathrm{cor}(S)$ تدعى مفتوحة جبريا (c)مجموعة كل العناصر من X والتي لاتنتمي لداخل S وداخل$X\backslash S$ تدعى [3]الحد الجبري ل S (a)العنصر $\bar{x} \in X$ يدعى [4]ممكن الوصول له خطيا من S، اذا وجد$x \in S, x \neq \bar{x}$ يحقق [5]الخاصية $\lambda x + (1-\lambda)\bar{x} \in S \; for \; all \; \lambda \in (0,1]$.
[1]The union of S and the set of all linearly accessible elements from S is called the [2]algebraic closure of S and it is denoted by $lin(S) := S \cup \{x \in X \mid x$ is linearly accessible from $S\}$. [3]In the case of $S = lin(S)$ the set S is called [4]algebraically closed. (e) The set S is called [5]algebraically bounded, if for every $\bar{x} \in S$ and every $x \in X \; there \; is \; a \; \bar{\lambda} > 0$ such that $\bar{x} + \lambda x \notin S \; for \; all \; \lambda \geq \bar{\lambda}$.	[1]اجتماع لS ومجموعة كل العناصر الممكن وصول اليها خطيا منS تدعى [2]مغلقة جبريا ل S ويرمز لها ب غلاقة(S):=S ∪ { x ∈ X بحيث x يمكن الوصول اليها جبريا من S } [3]في حالة $S = lin(S)$ المجموعة تدعى [4]مغلقة جبريا. (e)المجموعة S تدعى [5]محدودة جبريا اذا تحقق لكل $\bar{x} \in S$ و $x \in X$يوجد $\bar{\lambda} > 0$ مثل $\bar{x} + \lambda x \notin S$ لكل $\lambda \geq \bar{\lambda}$

ملاحظة: يجب فهم التعاريف والمصطلحات جيدا ،على سبيل المثال:

"من الممكن ان يأتي سؤال ما الفرق بين المفتوحة جبريا والمغلقة جبريا"

"ما تعريف المجموعة المحدبة"

إعداد سماح علوان **تالا شوباصي** أميرة غليون



المحاضرة الثالثة

◄ دكتور المادة: شغف زهريا

◄ عنوان المحاضرة: Convex analysis

These [1]algebraic notions have a special [2]geometric meaning. Take the [3]intersections of the set S with each [4]straight line in the real linear space X and consider these intersections as subsets of the real line $\mathbb{R}$. Then the set S is [5]algebraically open, if these subsets are open; S is [6]algebraically closed, if these subsets are closed; and S is [7]algebraically bounded, if these subsets are bounded	هذه [1]المفاهيم الجبرية تملك معنى [2]هندسي خاص لنأخذ [3]تقاطع المجموعة S مع كل خط [4]مستقيم في الفضاء الخطي الحقيقي X ولنعتبر هذه التقاطعات كمجموعات جزئية من المحور الحقيقي $\mathbb{R}$. عندئذ المجموعة S [5]مفتوحة جبريا اذا كانت هذه المجموعات الجزئية مفتوحة:S [6]مغلقة جبريا اذا كانت هذه المجموعات الجزئية مغلقة:S [7]محدودة جبريا اذا كانت هذه المجموعات الجزئية محدودة
Lemma 1.9. For a nonempty convex subset S of a real linear space we have: $(a)\bar{x} \in cor(S), \tilde{x} \in lin(S)$ $\Rightarrow \{\lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\bar{x} \mid \lambda \in [0,1)\} \subset cor(S)$, (b) cor(cor(S)) = cor(S), (c) cor(S) and lin(S) are convex, (d) $cor(S) \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ lin(cor(S)) = lin(S) and cor(lin(S)) = cor(S).. A proof of Lemma 1.9 which is [1]rather technical may be found in Kirsch-Warth-Werner [188, p. 9]. Another important class of subsets in a real linear space [2]is introduced in	**تمهيدية1.9** من أجل مجموعة جزئية محدبة غير خالية S من فضاء خطي حقيقي لدينا: $\bar{x} \in cor(S), \tilde{x} \in lin(S)$ (a) $\Rightarrow \{\lambda\tilde{x} + (1-\lambda)\bar{x} \mid \lambda \in [0,1)\}$ $\subset cor(S)$ cor(cor(S)) = cor(S) (b) cor(S) and lin(S) (c) مجموعتان محدبتان $cor(S) \neq \emptyset$ (d) $\Rightarrow$ lin(cor(S)) = lin(S) and cor(lin(S)) = cor(S). برهان التمهيدية 1.9، وهو [1]تقنيّ إلى حد ما، يمكن إيجاده في مرجع Kirsch-Warth-Werner. صفّ هام آخر من المجموعات الجزئية في فضاء شعاعي حقيقي [2]سيتم تقديمه
Definition 1.10. Let C be a nonempty subset of a real linear space X. (a) The set C is called [1]a cone, if $x \in C, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in C$ (b) A cone C is called [2]pointed, if $C \cap (-C) = \{0X\}$ (c) A cone C is called [3]reproducing, if $C - C = X$. In this case one also says that C [4]generates X.	**تعريف 1.10:** لتكن C مجموعة جزئية غير خالية من فضاء خطي حقيقي X. (a) المجموعة C تدعى [1]مخروط إذا تحقق: $x \in C, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in C$ (b) ندعو المخروط C [2]بالمخروط المدبب إذا كان: $C \cap (-C) = \{0X\}$ (c) ندعو المخروط C [3]بالمخروط المولد إذا كان: $C - C = X$. في هذه الحالة يمكننا القول أيضاً أن C [4]يولد X.

المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

(d) A nonempty convex subset B of a convex cone C $\neq$ {0X} is called a [5]base for C, if each x $\in$ C\{0X} has [6]a unique [7]representation of the form
$x = \lambda b$ for some $\lambda > 0$ and some $b \in B$

(d) ندعو المجموعة B غير الخالية المحدبة والجزئية من المخروط المحدب $C \neq \{0_X\}$ [5]قاعدة ل C إذا كان كل x من $C\backslash\{0_X\}$ يملك [7]تمثيلاً [6]وحيداً من الشكل:
$x = \lambda . b$ أجل من $\lambda > 0$ و $b \in B$

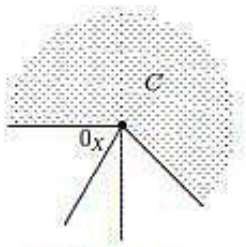


Figure 1.5: Cone.

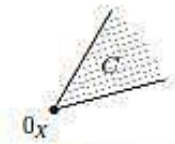


Figure 1.6: Pointed cone.

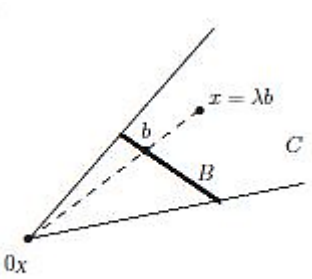


Figure 1.7: Base B for C.

Sometimes a cone is also called a [1]wedge and a [2]pointed wedge is called a cone. But in this book we use [3]the terms in Definition 1.10.
By definition each cone contains the [4]zero element of the real linear space. The simplest cones in a real linear space $X$are $\{0X\}$ and X its self. $\{0X\}$ is also called the [5]trivial cone
From a [6]geometric point of view a [7]nontrivial cone is a set of [8]rays [9]emanating from the [10]origin.
[11]Consequently, each cone is [12]starshaped at $0X$.
For the [13]investigation [14]of partial orderings convex cones are very important. They are [15]characterized by

في بعض الأحيان أيضاً ندعو المخروط باسم آخر [1]مخروط،و [2] المخروط المدبب يدعى مخروط ، لكن في هذا الكتاب سنستخدم [3]مصطلحات التعريف 1.10.
بالتعريف كل مخروط يحتوي على [4]العنصر الصفري من الفضاء الشعاعي الحقيقي. المخاريط الأكثر بساطة في الفضاء الشعاعي الحقيقي X هي $\{0_X\}$ و X نفسه.
$\{0_X\}$ يدعى [5]بالمخروط التافه.
من [6]وجهة نظر هندسية [7]المخروط غير التافه هو مجموعة من [8]الأشعة التي [9]تنطلق من [10]المبدأ. [11]بالنتيجة كل مخروط يكون [12]نجمي الشكل عند 0_X.
إن [13]دراسة المخاريط المحدبة هامة جداً من أجل دراسة [14]الترتيبات الجزئية. [15]وتم وصفها في التمهيدية التالية:

Lemma 1.11. A cone C in a real linear space is convex [1]if and only if $C + C \subset C$.
[2]Proof.
(a)[3]Assume that C is a convex cone. Then for every $x, y \in C$ we have

$$\frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in C$$

[4]implying $x + y \in C$. So, the [5]inclusion $C + C \subset C$ is true.
(b) For [6]arbitrary x, y $\in$ C and $\lambda \in [0,1]$ we [7]obtain
$\lambda x \in C$ and $(1-\lambda)y \in C$.
With the inclusion $C + C \subset C$ we then get
$\lambda x + (1-\lambda)y \in C$,
i.e. the cone C is convex.
The [8]algebraic interior of a convex cone has

تمهيدية 1.11: يكون المخروط C محدباً في الفضاء الشعاعي الحقيقي [1]إذا وفقط إذا كان: $C + C \subset C$
[2]الإثبات:
(a) [3]لنفترض أن C مخروط محدب، عندئذ من أجل كل x,y من C لدينا:

$$\frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in C$$

وهذا [4]يقتضي أن x+y من C، فيكون [5]الاحتواء $C + C \subset C$ محققاً.
(b) من أجل عنصرين [6]كيفيين x,y من C، وλ من [0,1] [7]نحصل على:
$\lambda x \in C$ و $(1-\lambda)y \in C$.

مع الاحتواء $C + C \subset C$ نحصل بعد ذلك على:
$\lambda x + (1-\lambda)y \in C$
وهذا يعني أن المخروط C محدب.

interesting [9]properties listed below.	[8]الداخل الجبري للمخروط المحدب له [9]خصائص مهمة سيتم تعدادها في الأسفل
Lemma 1.12. Let C be a convex cone in a real linear space X with a [1]nonempty algebraic interior. Then: (a) cor$(C) \cup \{0_X\}$ is a [2]convex cone, (b) $cor(C) = C + cor(C)$. [3]Proof. (a) Take arbitrary $\bar{x} \in cor(C)$ and $\mu > 0$. For every $x \in X$ there is a $\bar{\lambda} > 0$ with $$\bar{x} + \frac{\lambda}{\mu} x \in C \text{ for all } \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$$ [4]Since C is a cone, we get $$\mu\left(\bar{x} + \frac{\lambda}{\mu} x\right) = \mu\bar{x} + \lambda x \in C \text{ for all } \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$$ So, we obtain $\mu\bar{x} \in cor(C)$ and with Lemma 1.9, (c) [5]the assertion is [6]obvious. (b) The inclusion $\text{cor(C)} = \{0X\} + \text{cor(C)} \subset \text{C} + \text{cor(C)}$ is clear. For the proof of the [7]converse [8]inclusion we take arbitrary $\tilde{x} \in C, \bar{x} \in cor(C)$ and $x \in X$. Then there is a $\bar{\lambda} > 0$ with $$\bar{x} + \lambda x \in C \text{ for all } \lambda \in [0, \bar{\lambda}].$$ Since C is [9]assumed to be convex, we conclude with Lemma 1.11 $$\tilde{x} + \bar{x} + \lambda x \in C \text{ for all } \lambda \in [0, \bar{\lambda}].$$ [10]implying $\tilde{x} + \bar{x} \in cor(C)$. So, we conclude $C + cor(C) \subset cor(C)$. The following lemma gives a [11]sufficient [12]condition for a cone to be [13]reproducig	**تمهيدية 1.12:** ليكن لدينا المخروط المحدب C في الفضاء الشعاعي الحقيقي X، مع داخل جبري [1]غير خالي، عندئذ: (a) $cor(C)\ U\ \{0_X\}$ [2]مخروط محدب. (b) $cor(C) = C + cor(C)$ [3]الإثبات: (a) لنأخذ العنصر العشوائي $\bar{x}$ من داخل (C) و $\mu > 0$. من أجل كل x من X يوجد $\bar{\lambda} > 0$ بحيث: $$\bar{x} + \frac{\lambda}{\mu} x \in C \text{ لكل } \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$$ [4]بما ان C مخروط نحصل على $$\mu\left(\bar{x} + \frac{\lambda}{\mu} x\right) = \mu\bar{x} + \lambda x \in C \text{ لكل } \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$$ فنحصل على $\mu\bar{x}$ ينتمي إلى داخل (C) ومن التمهيدية 1.9 من الخيار (c) أن [5]القضية [6]واضحة. (b) الاحتواء $\text{cor(C)} = \{0X\} + \text{cor(C)} \subset \text{C} + \text{cor(C)}$ واضح (محقق وضوحاً). من أجل برهان [8]الاحتواء [7]العكسي سنأخذ عشوائياً $\tilde{x} \in C$ و $\bar{x}$ من داخل C و $x \in X$ عندئذ يوجد $\bar{\lambda} > 0$ بحيث: $$\bar{x} + \lambda x \in C \text{ لكل } \lambda \in [0, \bar{\lambda}].$$ بما أن C محدبة [9]فرضاً نستنتج من خلال التمهيدية 1.11 أن: $$\tilde{x} + \bar{x} + \lambda x \in C \text{ لكل } \lambda \in [0, \bar{\lambda}].$$ وهذا [10]يقتضي أن: $\tilde{x} + \bar{x}$ من داخل C لذلك نستنتج أن: $C + cor(C) \subset cor(C)$. التمهيدية التالية تعطي [12]شرطاً [11]كافياً ليصبح المخروط [13]مولداً.
Lemma 1.13. A cone C in a real linear space X is [1]reproducing, if $cor(C) \neq \varnothing$. Proof. If cor(C) is nonempty, take some $\bar{x} \in cor(C)$ and any $x \in X$. Then there is a $\bar{\lambda} > 0$ with $\bar{x} + \bar{\lambda} x \in C$ implying $$x \in \frac{1}{\bar{\lambda}} C - \left\{\frac{1}{\bar{\lambda}} \bar{x}\right\} \subset C - C$$ So, we get $X \subset C - C$ and together with the	**تمهيدية 1.13:** يكون المخروط C في الفضاء الشعاعي الحقيقي X [1]مولدا إذا كان $\text{cor(C)} \neq \emptyset$. الإثبات: إذا كانت cor(C) غير خالية، نأخذ $\bar{x}$ ما من cor(C) وأي x من X، عندئذ توجد $\bar{\lambda} > 0$ حيث $\bar{x} + \bar{\lambda} x$ تنتمي إلى C، وهذا يقتضي: $$x \in \frac{1}{\bar{\lambda}} C - \left\{\frac{1}{\bar{\lambda}} \bar{x}\right\} \subset C - C$$ بذلك نحصل على $X \subset C - C$ ، وبجمعه مع

[2]trivial inclusion $C - C \subset X$ we obtain the [3]assertion. Next, we [4]turn [5]our attention to the notion of a [6]base B of a nontrivial convex cone. [7]Because of the [8]convexity of B and the [9]uniqueness of λ we have $O_X \notin B$. **Lemma 1.14**. Each [10]nontrivial convex cone with a base in a real linear space is [11]pointed.	[2]الاحتواء التافه $X \subset C - C$ نحصل على [3]القضية. ثم [4]نلفت [5]انتباهنا لمفهوم [6]القاعدة B من المخروط المحدب غير التافه. [7]بسبب [8]تحدب B [9]ووحدانية λ يكون لدينا 0_x لا تنتمي إلى B. **تمهيدية 1.14:** كل مخروط محدب [10]غير تافه مع قاعدة في الفضاء الشعاعي الحقيقي يكون [11]مدبباً.
Definition 1.15. Let S be a nonempty subset of a real linear space. The cone $cone(S) := \{x \in X \mid x = \lambda s$ $for\ some \lambda \geq 0\ and\ some\ s \in S\}$ is called the cone [1]generated by S It is an important property of a base B of a cone C that $cone(B) = C$. If $0_X \in cor(S)$ for a nonempty subset S of a real linear space X, then $cone(S) = X$.	**تعريف 1.15:** لتكن لدينا S مجموعة جزئية غير خالية من فضاء شعاعي حقيقي، المخروط: $cone(S) := \{x \in X \mid x = \lambda s ; \lambda \geq 0;$ $s \in S\}$ يسمى المخروط المولَّد بـS (كما في الشكل 1.8). خاصة مهمة للقاعدة B للمخروط C هي: $cone(B) = C$. إذا كان $0_X \in cor(S)$ من أجل المجموعة الجزئية الغير خالية S من الفضاء الخطي الحقيقي X، عندئذ $cone(S) = X$.

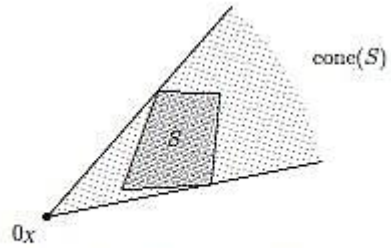
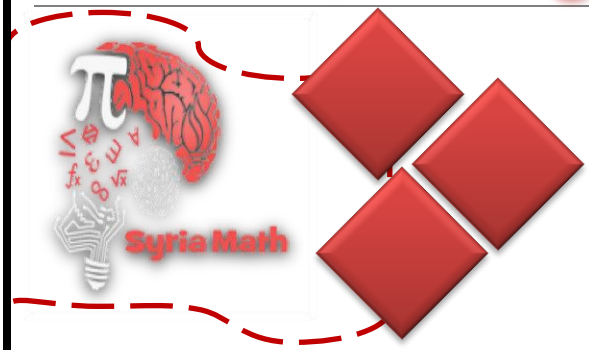


Figure 1.8: Cone generated by S.

إعداد سماح علوان **تالا شوباصي** أميرة غليون



المحاضرة الرابعة

◄ دكتور المادة: شغف زوريا

◄ عنوان المحاضرة: Convex Analysis

1.2 Partially Ordered Linear Spaces

[1]In addition to the linear [2]structure of a space we [3]consider a [4]partial ordering which is given in many real linear spaces being of [5]practical interest.

الفضاءات الشعاعية المرتبة جزئياً:

[1]بالإضافة إلى [2]البنية الجبرية لفضاء ما [3]سندرس [4]علاقة ترتيب جزئي تعرّف في عدة فضاءات شعاعية وهي ذات [5]أهمية عملية

Definition 1.16. Let X be a real linear space.

(a) Each nonempty subset R of the[1] product space $X \times X$ is called a [2]binary relation R on X (we write xRy for $(x,y) \in R$)

(b) Every binary relation $\leq$ on X is called a [3]partial ordering on X, if the following [4]axioms are [5]satisfied (for [6]arbitrary $w,x,y,z \in X$):

(i) $x \leq x$;

(ii) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$;

(iii) $x \leq y, w \leq z \Rightarrow x + w \leq y + z$;

(iv) $x \leq y,\ \alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$

(c) A partial ordering $\leq$ on X is called [7]antisymmetric, if the following [8]implication holds for arbitrary $x, y \in X$:

$$x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$$

تعريف 1.16: ليكن لدينا X فضاء شعاعي حقيقي.

(a) كل مجموعة جزئية غير خالية R من [1]الفضاء الناتج عن الجداء X × X تدعى [2]علاقة ثنائية R على X. (نكتب xRy لكل (x,y) من R)

(b) كل علاقة ثنائية $\leq$ على X تدعى [3]علاقة ترتيب جزئي على X إذا كانت [4]القضايا التالية [5]محققة (من أجل $w,x,y,z \in X$ [6]كيفية):

$$x \leq x \quad (i)$$

$$x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z; \quad (ii)$$

$$x \leq y, w \leq z \Rightarrow x + w \leq y + z; \quad (iii)$$

$$x \leq y, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y \quad (iv)$$

(c) علاقة ترتيب الجزئي $\leq$ على X تدعى [7]تخالفية إذا تحقق [8]الاقتضاء التالي :

من أجل العناصر العشوائية $x, y \in X$

$$x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$$

In Definition 1.16, (b) with axiom (i) the partial ordering is [1]reflexive and with (ii) it is [2]transitive. The axioms (iii) and (iv) [3]guarantee the [4]compatibility of the partial ordering with the [5]linear structure of the space.

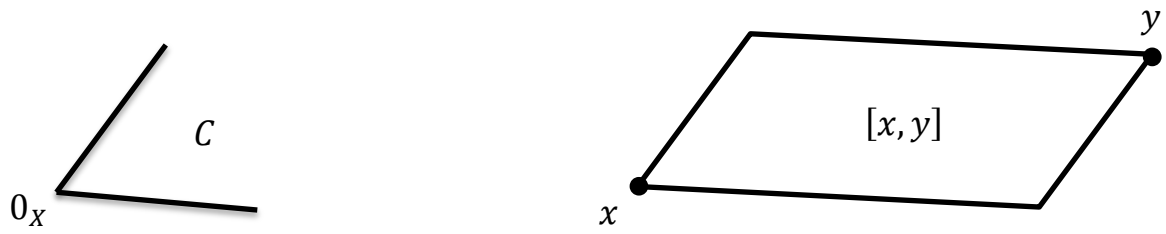
في التعريف 1.16 البند (b) والقضية (i) تكون علاقة الترتيب الجزئي [1]انعكاسية، ومع القضية (ii) تكون [2]متعدية. القضايا (iii) و (iv) [3]تضمن [4]توافق علاقة الترتيب الجزئي مع [5]البنية الخطية للفضاء.

Definition 1.17. A real linear space [1]equipped with a partial ordering is called [2]a partially ordered linear space.

تعريف 1.17: الفضاء الشعاعي الحقيقي [1]المزود بعلاقة ترتيب جزئي يدعى [2]فضاء شعاعي مرتب جزئياً.

WhatsApp : 0997378154 Facebook_Page : IOM
المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

It is [3]important to note that in a partially ordered linear space [4]two arbitrary elements [5]cannot be compared, in general, in terms of the partial ordering. A [6]significant [7]characterization of a partial ordering in a real linear space is given by Theorem 1.18	[3]من المهم ملاحظة أنه في فضاء شعاعي مرتب جزئياً [5]لا يمكن مقارنة [4]عنصرين عشوائيين ،بشكل عام، في مفهوم الترتيب الجزئي. [7]صفة [6]جوهرية للترتيب الجزئي في فضاء شعاعي حقيقي تعطى بالنظرية 1.18.
Theorem 1.18. Let X be a real linear space. (a) If ≤ is a partial ordering on X, then the set $$C := \{x \in X \mid 0_X \leq x\}$$ is a [1]convex cone. If, in addition, ≤ is antisymmetric, then C is [2]pointed. (b) If C is a convex cone in X, then[3] the binary relation $$\leq_C := \{(x,y) \in X \times X \mid y - x \in C\}$$ is a [4]partial ordering on X. If, in addition, C is [5]pointed, then $\leq_C$ is [6]antisymmetric. This theorem is [7]easy to prove and is of great importance because a partial ordering can be investigated using [8]convex analysis. The next definition is [9]based on the [10]result of Theorem 1.18.	**النظرية 1.18:** ليكن لدينا X فضاء شعاعي حقيقي. (a) إذا كانت ≤ علاقة ترتيب جزئي على X فعندئذ المجموعة $$C := \{x \in X \mid 0_X \leq x\}$$ هي [1]مخروط محدب. وبالإضافة لذلك إذا كانت ≤ علاقة تخالفية يكون C [2]مخروطاً مدبباً. (b) إذا كان C مخروطاً محدباً في X تكون [3]العلاقة الثنائية: $$\leq_C := \{(x,y) \in X \times X \mid y - x \in C\}$$ علاقة [4]ترتيب جزئي على X. بالإضافة لذلك، إذا كان C [5]مخروطاً مدبباً فإن العلاقة $\leq_C$ [6]تخالفية. هذه النظرية [7]سهلة الإثبات وأهميتها عظيمة بسبب إمكانية دراسة الترتيب الجزئي باستخدام [8]التحليل المحدب. التعريف التالي [9]يعتمد على [10]نتيجة النظرية 1.18.
Definition 1.19. A convex cone [1]characterizing a partial ordering in a real linear space is called an [2]ordering cone. [3]Several [4]authors also call an ordering cone a [5]positive cone. We [6]denote $\leq_C$ as a partial ordering [7]induced by a convex cone C.	**تعريف 1.19:** المخروط المحدب الذي [1]يصف ترتيباً جزئياً في فضاء شعاعي حقيقي يسمى [2]مخروط مرتب. [3]العديد من [4]الكتّاب يدعون مخروط الترتيب [5]بالمخروط الموجب. [6]نرمز بـ $\leq_C$ للترتيب الجزئي [7]المعرف بالمخروط المحدب C.
Example 1.20. For $X = \mathbb{R}^n$ the ordering cone of the componentwise partial ordering on $\mathbb{R}^n$ is given by $$C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \; for\; all\; i \in \{1,\dots,n\}\} = \mathbb{R}^n_+$$ It is also called the [1]natural ordering cone. Other ordering cones in $\mathbb{R}^n$ are for instance $$\{x \in Rn \mid xi \geq 0\; for\; all\; i \in \{1,\dots,m\}\; and\; x_i = 0\; for\; all\; i \in \{m+1,\dots,n\}\; for\; some\; 1 \leq m < n$$ or $\{0_{\mathbb{R}_n}\}$ and $\mathbb{R}^n$ itself. $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $\{0\}$ and $\mathbb{R}$ are the only ordering cones in $\mathbb{R}$.	**مثال 1.20:** لدينا من أجل $X = \mathbb{R}^n$ المخروط المرتب جزئياً بحسب المركبة على $\mathbb{R}^n$، ويعطى بـ: $$C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid xi \geq 0 \; for\; all\; i \in \{1,\dots,n\}\} = \mathbb{R}^n_+$$ يدعى أيضاً [1]مخروط الترتيب الطبيعي. مخاريط مرتبة أخرى في $\mathbb{R}^n$ على سبيل المثال $$\{x \in Rn \mid xi \geq 0\; for\; all\; i \in \{1,\dots,m\}\; and\; x_i = 0\; for\; all\; i \in \{m+1,\dots,n\}\; for\; some\; 1 \leq m < n$$ أو $\{0_{\mathbb{R}_n}\}$ و$\mathbb{R}^n$ نفسه. $\mathbb{R}_+$، $\mathbb{R}_-$، $\{0\}$ و $\mathbb{R}$ هي مخاريط الترتيب الوحيدة في $\mathbb{R}$.

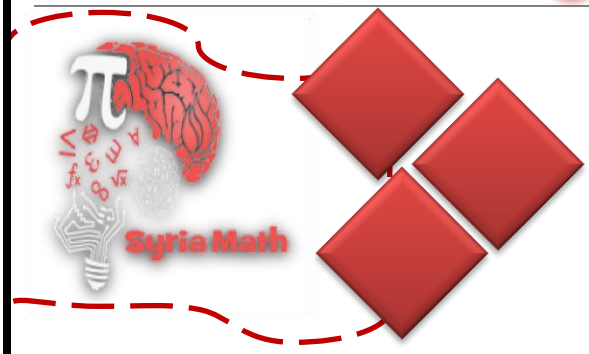
Ordering cones of special [2]infinite [3]dimensional linear spaces will be presented in Subsection 1.4	مخاريط الترتيب من الفضاءات الشعاعية ذات [3]البعد [2]غير المنتهي ستقدم في الفقرة 1.4.
Definition 1.21. Let X be a partially ordered linear space. For arbitrary elements $x, y \in X$ with $x \leq y$ the set $[x,y] := \{z \in X \mid x \leq z < y\}$ is called [1]the order interval between x and y (see Fig 1.9) If C is the [2]ordering cone in a [3]partially ordered [4]linear space, then the order interval between x and y can be written as $[x,y] = (\{x\} + C) \cap (\{y\} - C)$.	**تعريف 1.21:** ليكن X فضاء شعاعي مرتب جزئياً، من أجل عناصر عشوائية x,y∈X حيث x≤y، ندعو المجموعة: $[x,y] := \{z \in X \mid x \leq z < y\}$ [1]بالمجال المرتب بين x و y (كما في الشكل 1.9). إذا كان C [2]مخروط مرتب في [4]فضاء شعاعي [3]مرتب جزئياً، عندئذ المجال المرتب بين x و y يمكن كتابته بالشكل: $[x,y] = (\{x\} + C) \cap (\{y\} - C)$.
Figure 1.9: Order interval [x, y].	
Lemma 1.22. Let X be a partially ordered linear space with the ordering cone C. $Let\ x, y \in X\ with\ x \in \{y\} - C (i.e. x \leq_C y)$ be arbitrarily given. Then we have for $z := \frac{1}{2}(x + y)$: (a) The [1]order interval $[x - z, y - z]$ is [2]absolutely convex. (b) If $\mathrm{cor}(C) \neq \emptyset$ and $x \in \{y\} - \mathrm{cor}(C)$, then $z \in \mathrm{cor}([x,y])$. (c) If C is [3]algebraically closed, then $[x,y]$ is [4]algebraically closed. (d) If C is [5]algebraically closed and [6]pointed, then $[x,y]$ is [7]algebraically bounded.	**تمهيدية 1.22:** ليكن لدينا X فضاء شعاعي مرتب جزئياً بحيث C مخروط ترتيب. وليكن لدينا $x, y \in X$ حيث $x \in \{y\} - C$ (وهذا يعني $x \leq_C y$) معطاة لا على التعيين. عندئذ لدينا من أجل $z := \frac{1}{2}(x + y)$: (a) [1]المجال المرتب $[x - z, y - z]$ [2]محدب تماماً. (b) إذا كان cor(C)≠ ∅ و x ∈ {y} − cor(C) عندئذ z∈cor([x,y]). (c) إذا كان المخروط C [3]مغلق جبرياً عندئذ يكون المجال [x,y] [4]مغلق جبرياً أيضاً. (d) إذا كان C [5]مغلق جبرياً و [6]مدبب عندئذ [x,y] [7]محدود جبرياً.
Definition 1.23. Let X be a real linear space with a convex cone C_X. (a) The cone $C_{X'} := \{x' \in X' \mid x'(x) \geq 0\ for\ all\ x \in C_X\}$ is called the [1]dual cone for C_X. The partial ordering in X' which is [2]induced by $C_{X'}$ is called the [3]dual partial ordering.	**تعريف 1.23:** ليكن X فضاء شعاعي حقيقي، حيث C_X مخروط محدب. (a) المخروط: $C_{X'} := \{x' \in X' \mid x'(x) \geq 0\ for\ all\ x \in C_X\}$ يدعى [1]مخروط ثنوي لـ C_X. علاقة الترتيب الجزئية ف X' [2]الناتجة عن $C_{X'}$ تدعى [3]علاقة الترتيب الجزئية الثنوية.

المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

(b) The set $C_X^{\#\prime} := \{x' \in X' \mid x'(x) > 0$ $for\ all\ x \in C_X \setminus \{0_X\}\}$ is called the [4]quasi-interior of the [5]dual cone for C_X	(b) المجموعة: $C_X^{\#\prime} := \{x' \in X' \mid x'(x) > 0$ $for\ all\ x \in C_X \setminus \{0_X\}\}$ تدعى [4]الداخل التقريبي [5]للمخروط الثنوي لـC_X.
Notice that $C_{X'}$ is a convex cone so that Definition 1.23 . For $C_X = \{0_X\}$ we obtain $C_{X'} = X'$, and $for\ C_X = X$ we have $C_{X'} = \{0_{X'}\}$. If the quasi-interior $C_X^{\#\prime}$ of the dual cone for C_X is nonempty, then $C_X^{\#\prime} \cup \{0_{X'}\}$ is a nontrivial convex cone	نلاحظ ان $C_{X'}$مخروط محدب من التعريف 1.23 من أجل $C_X = \{0_X\}$ نحصل على $C_{X'} = X'$ ومن اجل $C_X = X$ لدينا $C_{X'} = \{0_{X'}\}$ اذا كان الداخل التقريبي $C_X^{\#\prime}$ للمخروط الثنوي لـC_X غير خالي ،عندئذ $C_X^{\#\prime} \cup \{0_{X'}\}$ مخروط محدب غير تافه

ملاحظة: يجب الانتباه الى احرف الجر TO,BY,IN..... لأنها تأتي في الامتحان

إعداد سماح علوان **تالا شوباصي** أميرة غليون



المحاضرة الخامسة والسادسة

◄ دكتور المادة: شغف زوربا

◄ عنوان المحاضرة: توصيف المقررات ومحادثة

اسماء المواد في قسم الرياضيات ((ممكن ان يأتي سؤال ترجمة او أي من المواد هي من ضمن دراستنا))

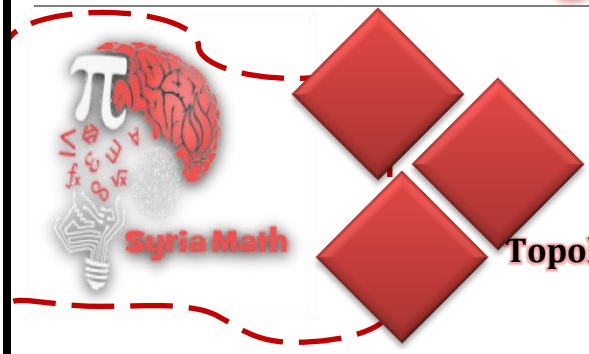
التحليل	Analysis
الثقافة	Culture
اللغة العربية	Arabic Language
اللغة الانكليزية	English Language
الجبر الخطي	Linear Algebra
الهندسة التحليلية	Analysis Geometry
مبادئ الاحصاء والاحتمالات	Principles of Probabilities and statistics
لغات البرمجة	Programming Languages
مبادئ عمل الحواسيب	Principles of Computers working
البنى الجبرية	Algebraic structure
المعادلات التفاضلية	Deferential Equations
تبولوجيا	Topology
ميكانيك	Mechanic
التحليل العددي	The Numerical Analysis
التحليل التابعي	Function Analysis
التحليل العقدي	Complex Analysis

المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Graph Theory	نظرية البيان
Discrete mathematics	الرياضيات المتقطعة
Theory of probability	نظرية الاحتمالات
History of mathematics	تاريخ الرياضيات
Automata theory	نظرية الاوتومات
Deferential Geometry	الهندسة التفاضلية
The Application of graph theory	تطبيقات نظرية البيان
Operation Research	بحوث العمليات
Numerical Solutions	حلول عددية
Algebraic Theory	نظرية الجبور
Number Theory	نظرية الاعداد
Measure Theory	نظرية القياس
Category theory	نظرية الفئات
Integral Equations	المعادلات التكاملية
Partial Deferential Equations	المعادلات التفاضلية الجزئية
Logic	المنطق

كانت المحاضرة السادسة عبارة عن محادثة بين الطلاب ((كيف تعرف عن نفسك))

إعداد سماح علوان **تالا شوباصي** أميرة غليون



المحاضرة السابعة

◄ دكتور المادة: شغف زوريا

◄ عنوان المحاضرة: Topological Linear Spaces

1.3 Topological Linear Spaces

In this section we [1]investigate [2]partially ordered linear spaces which are [3]equipped with a [4]topology. The important spaces as [5]locally [6]convex spaces and [7]normed spaces are considered, and [8]the connections

between topology and [9]partial ordering are [10]examined.

Definition 1.29. Let X be a nonempty set.
(a) A [1]topology $\mathcal{T}$ on X [2]is defined to be a [3]set of subsets of X which [4]satisfy the following axioms:

(i) every [5]union of sets of $\mathcal{T}$ [6]belongs to $\mathcal{T}$;
(ii) every [7]finite [8]intersection of sets of $\mathcal{T}$ belongs to $\mathcal{T}$;
(iii) $\varnothing \in \mathcal{T}$ and $X \in \mathcal{T}$.
In this case $(X, \mathcal{T})$ is called a [9]topological space and [10]the elements of $\mathcal{T}$ are called [11]open sets.

(b) Let $\mathcal{S}$ and $\mathcal{T}$ be two [12]topologies on X. $\mathcal{S}$ is called [13]finer than $\mathcal{T}$ (or $\mathcal{T}$ is called [14]coarser than $\mathcal{S}$), if every $\mathcal{T}$ -open set is $\mathcal{S}$ -open.

(c) Let $(X, \mathcal{T})$ be a topological space, let S be a subset of X and let some $x \in X$ be a given element. The set S is called a [15]neighborhood of x, if there is an [16]open set $\mathcal{T}$ with $x \in T \subset S$.

1.3الفضاءات الخطية التبولوجية

في هذا الفصل [1]سندرس الفضاءات الخطية [2]المرتبة جزئياً [3]المزودة [4]بتبولوجيا.

الفضاءات الأكثر أهمية مثل [6]الفضاءات المحدبة [5]محلياً [7]والفضاءات المنظمة سيتم أخذها بعين الاعتبار، وستتم [10]دراسة [8]علاقات الارتباط بين التبولوجيا [9]والترتيب الجزئي.

تعريف 1.29: لتكن X مجموعة غير خالية.

(a) [2]تعرف [1]التبولوجيا $\mathcal{T}$ على X على أنها [3]مجموعة المجموعات الجزئية من X التي [4]تحقق الخصائص التالية:

(i) كل [5]اجتماع لمجموعات من $\mathcal{T}$ [6]ينتمي إلى $\mathcal{T}$.

(ii) كل [8]تقاطع [7]منتهٍ لمجموعات من $\mathcal{T}$ ينتمي إلى $\mathcal{T}$.

(iii) $\varnothing \in \mathcal{T}$ و $X \in \mathcal{T}$

في هذه الحالة يسمى $(X, \mathcal{T})$ [9]فضاءً تبولوجياً، [10]وعناصر $\mathcal{T}$ تسمى [11]مجموعات مفتوحة.

(b) لتكن كل من $\mathcal{S}$ و $\mathcal{T}$ [12]تبولوجيا على X، تكون $\mathcal{S}$ [13]أدق من $\mathcal{T}$ (أو $\mathcal{T}$ [14]أخشن من $\mathcal{S}$) إذا كانت كل مجموعة $\mathcal{T}$ -مفتوحة هي أيضاً $\mathcal{S}$ -مفتوحة.

(c) ليكن $(X, \mathcal{T})$ فضاءً تبولوجياً، ولتكن S مجموعة جزئية من X، وليكن $x \in X$ عنصر معطى. تسمى المجموعة S [15]جواراً لـx إذا وجدت [16]مجموعة مفتوحة $\mathcal{T}$ بحيث $x \in T \subset S$.

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية
المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية

يسمى x [17]عنصراً داخلياً من S إذا وجد جوار $\mathcal{T}$ لـx [18]محتوى في S. -مجموعة جميع [19]العناصر الداخلية من S تسمى [20]داخل S، [21]ويرمز لها بـ$\text{int}(S)$. تسمى المجموعة S [22]مجموعة مغلقة إذا كانت $X\backslash S$ مجموعة مفتوحة. مجموعة جميع العناصر من X التي [24]يتقاطع [23]كل جوار لها مع المجموعة S تسمى [25]لصاقة (أو غلاقة) S، ويرمز لها بـ$cl(S)$. تسمى المجموعة S مجموعة [26]كثيفة في X إذا كان $X \subset cl(S)$	x is called an [17]interior element of S, if there is a neighborhood $\mathcal{T}$ of x [18]contained in S. -The set of all [19]interior elements of S is called the [20]interior of S and it is [21]denoted int(S). The set S is [22]called closed, if $X\backslash S$ is open. The set of all elements of X for which [23]every neighborhood [24]meets the set S is called the [25]closure of S and it is denoted $cl(S)$. The set S is called [26]dense in X, if $X \subset cl(S)$
(d)يسمى فضاء تبولوجي ($X, \mathcal{T}$) فضاء [1]قابل للفصل إذا [2]حوت X [5]مجموعة جزئية [4]كثيفة [3]قابلة للعد. (e) (i) تسمى [6]مجموعة غير خالية ومرتبة جزئياً I مجموعة [7]موجهة إذا كان أي عنصرين كيفيين في I [8]أعظميين فيها. (ii) [9]التطبيق من [10]مجموعة موجهة I إلى مجموعة غير خالية X يسمى [11]شبكة، ويرمز له $(x_i)_{i\in I}$ (iii) ليكن ($X, \mathcal{T}$) فضاءً تبولوجياً. نقول عن شبكة $(x_i)_{i\in I}$ انها [12]تتقارب لـ $x \in X$ ما ،إذا وجد من أجل كل جوار U لـx عنصر $n \in I$ بحيث: $i \geq n$ لكل $x_i \in U$ ($\leq$ ترمز لعلاقة الترتيب الجزئي على I) في هذه الحالة نكتب $x = \lim_{i\in I} x_i$. (iv) ليكن ($X, \mathcal{T}$) فضاءً تبولوجياً. نقول عن عنصر $x \in X$ أنه [13]نقطة تراكم (تجمّع) لشبكة $(x_i)_{i\in I}$إذا كان من أجل كل جوار U لـx وكل $n \in I$ يوجد $i \in I$ بحيث $i \geq n$ حيث $x_i \in U$	(d) A topological space ($X, \mathcal{T}$) is called [1]separable, if X [2]contains a [3]countable [4]dense [5]subset. (e) (i) A nonempty [6]partially ordered set I is called [7]directed, if two arbitrary elements in I are [8]majorized in I. (ii) A [9]map from a [10]directed set I to a nonempty set X is called a [11]net and is denoted $(x_i)_{i\in I}$. (iii) Let ($X, \mathcal{T}$) be a topological space. A net $(x_i)_{i\in I}$ is called to [12]converge to some $x \in X$, if for every neighborhood U of x there is an $n \in I$ so that $x_i \in U$ for all $i \geq n$ ($\leq$ denotes the partial ordering in I). In this case we write $x = \lim_{i\in I} x_i$. (iv) Let ($X, \mathcal{T}$) be a topological space. An element $x \in X$ is called a [13]cluster point of a net $(x_i)_{i\in I}$, if for every neighborhood U of x and every $n \in I$ there is an $i \in I$ with $i \geq n$ so that $x_i \in U$.

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية
المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية

(f) تسمى مجموعة جزئية غير خالية S من فضاء تبولوجي $(X, \mathcal{T})$ مجموعة [1]متراصة إذا كان لكل شبكة في S [2]نقطة تراكم في S .

(g) ليكن كل من $(X,\mathcal{S})$ و $(Y,\mathcal{T})$ فضاءً تبولوجياً. يكون التطبيق $f: X \longrightarrow Y$ [3]مستمراً عند $x \in X$ ما إذا كان من أجل كل [4]جوار V لـ$f(x)$ يوجد جوار U لـx بحيث $f(U) \subset V$.

يكون $f: X \longrightarrow Y$ [5]مستمراً على X إذا كان [6]مستمراً عند كل $x \in X$.

(h) يسمى الفضاء التبولوجي $(X, \mathcal{T})$ [7]منفصلاً (أو فضاء هاوسدورف) إذا كان لأي [8]عنصرين مختلفين جواران [9]منفصلان (غير متقاطعين).

صف هام من الفضاءات التبولوجية يقال عنها [10]فضاءات مترية.

(f) A nonempty subset S of a topological space $(X, \mathcal{T})$ is called [1]compact, if every net in S has a [2]cluster point in S.

(g) Let $(X,\mathcal{S})$ and $(Y,\mathcal{T})$ be two topological spaces. A map f :

$X \to Y$ is called [3]continuous at some $x \in X$, if to every [4]neighborhood V of $f(x)$ there is a neighborhood U of x with $f(U) \subset V$.

$f: X \to Y$ is called [5]continuous on X, if f is [6]continuous at every $x \in X$.

(h) A topological space $(X, \mathcal{T})$ is called [7]separated (or a Hausdorffspace), if any two [8]different elements have [9]disjoint neighborhoods.

An important class of topological spaces are so-called [10]metric spaces.

تعريف 1.30:

(a) لتكن X مجموعة غير خالية. نقول عن تطبيق $d: X \times X \to R_+$ أنه [1]تابع مسافة (مترك) إذا كان من أجل كل $x, y, z \in X$:

$$(i)\ d(x,y) = 0 \iff x = y;$$
$$(ii)\ d(x,y) = d(y,x);$$
$$(iii)\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

في هذه الحالة يسمى (X,d) [2]فضاءً متريا.

(b) يسمى فضاء تبولوجي $(X,\mathcal{T})$ [3]فضاء متور إذا [5]أمكن تعريف [4]التوبولوجيا الخاصة به من خلال دالة مسافة.

إذا كان (X,d) فضاءً متريا عندئذ من أجل أي $x \in X$ تسمى المجموعة $S(x)$ جواراً لـx إذا وجد $\varepsilon > 0$ بحيث:

$$\{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\} \subset S(x).$$

Definition 1.30.

(a)Let X be a nonempty set.
A map $d: X \times X \to R_+$ is called a [1]metric, if $(for\ all\ x, y, z \in X)$:

$$(i)\ d(x,y) = 0 \iff x = y;$$
$$(ii)\ d(x,y) = d(y,x);$$
$$(iii)\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

In this case (X,d) is called a [2]metric space.

(b) A topological space $(X, \mathcal{T})$ is called [3]metrizable, if [4]its topology [5]can be defined by a metric.

If (X,d) is a metric space, then for any $x \in X$ a set $S(x)$ is called a neighborhood of x, if there is an $\varepsilon > 0$ so that

$$\{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\} \subset S(x).$$

المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

مجموعة جميع الجوارات لـx [1]تعرف تبولوجيا على X.

فيما يلي سندرس فضاءً تبولوجياً $(X,\mathcal{T})$حيث X فضاء خطي حقيقي. في هذه الحالة [2]سيتطلب ذلك أن تكون [3]البنية الخطية والتبولوجية للفضاء [4]متوافقتين.

The set of all neighborhoods of x [1]defines a topology on X.

Next, we consider a topological space $(X,\mathcal{T})$ where X is now a real linear space. In this case we [2]require that the topological and the [3]linear structure of the space are [4]compatible.

تعريف 1.31: ليكن X فضاءً خطياً حقيقياً، ولتكن $\mathcal{T}$ [1]تبولوجيا على X.

(a) يسمى $(X,\mathcal{T})$ فضاء شعاعي تبولوجي حقيقي إذا كانت عمليتا [2]الجمع [3]والضرب بأعداد حقيقية مستمرتين، للتوضيح: التطبيقان:

$$(x,y) \mapsto x + y \; with \; x,y \in X,$$

$$(\alpha,x) \mapsto \alpha x \; with \; \alpha \in \mathbb{R} \; and \; x \in X$$

[4]مستمران على $X \times X$ و $\mathbb{R} \times X$ على [5]الترتيب.

في كثير من [6]الحالات نستخدم [7](للتبسيط) [8]الرمز X [9]عوضاً عن $(X,\mathcal{T})$ للدلالة على فضاء متري شعاعي حقيقي.

(b) مجموعة جزئية S من فضاء تبولوجي خطي حقيقي X تسمى مجموعة [11]محدودة إذا كان من أجل كل [11]جوار لصفر الفضاء (X) U يوجد $\lambda \in \mathbb{R}$ تحقق الخاصية $S \subset \lambda U$.

(c) تسمى مجموعة جزئية غير خالية S من فضاء تبولوجي خطي حقيقي X [12]مجموعة تامة إذا كانت كل [13]شبكة كوشي في S [14]تنتهي إلى x ∈ S ما.

([15]هذا يعني أنه من أجل كل شبكة $(x_i)_{i\in I}$ في S حيث $\lim_{(i,j)\in I\times I}(x_i - x_j) = 0$ يوجد x ∈ S حيث $(x = \lim_{i\in I} x_i$

(d) يكون فضاء تبولوجي خطي حقيقي X [16]شبه تام إذا كانت كل مجموعة غير خالية مغلقة ومحدودة في X تامة.

Definition 1.31. Let X be a real linear space and let $\mathcal{T}$ be a [1]topology on X.

(a) $(X,\mathcal{T})$is called a real topological linear space, if [2]addition and [3]multiplication with reals are continuous, i.e. the maps

$$(x,y) \mapsto x + y \; with \; x,y \in X,$$

$$(\alpha,x) \mapsto \alpha x \; with \; \alpha \in \mathbb{R} \; and \; x \in X$$

are [4]continuous on $X \times X$ and $\mathbb{R} \times X$, [5]respectively. In many [6]situations we use, for [7]simplicity, the [8]notation X [9]instead of $(X,\mathcal{T})$ for a real topological linear space.

(b) A subset S of a real topological linear space X is called [10]bounded,

if for each [11] 0_X-neighborhood U there is a $\lambda \in \mathbb{R}$ with the property $S \subset \lambda U$.

(c) A nonempty subset S of a real topological linear space X is called [12]complete, if each [13]Cauchy net in S [14]converges to some $x \in S$

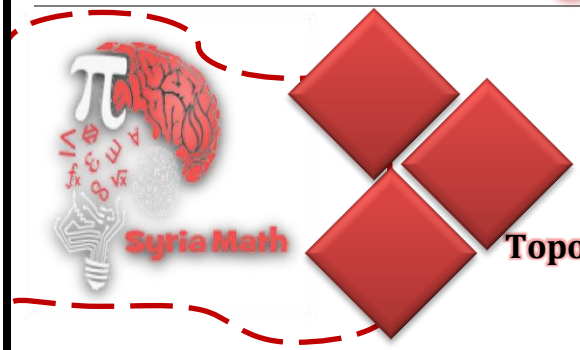
([15]i.e. for every net $(x_i)_{i\in I}$ in S with $\lim_{(i,j)\in I\times I}(x_i - x_j) = 0$ there is an $x \in S$ with $x = \lim_{i\in I} x_i$)

(d) A real topological linear space X is called [16]quasi-complete, if each nonempty, closed and bounded set in X is complete.

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

In Lemma 1.9 we listed some [17]results on the [18]algebraic interior and [19]closure of a set. Now we consider [20]the relationships between these notions and the [21]corresponding topological notions. For a proof of these results see Holmes [140, p. 59].	في التمهيدية 1.9 عددنا بعض [17]النتائج عن [18]الداخل الجبري [19]وغلاقة مجموعة. الآن سندرس [20]العلاقات بين هذه المفاهيم والمفاهيم التبولوجية [21]الموافقة لها. لبرهان هذه النتائج انظر مرجع هولمز[140, p. 59]
Lemma 1.32. Let S be a nonempty convex set of a real topological linear space X. Then the closure $cl(S)$ is convex. For $int(S) \neq \varnothing$ We have: (a) int(S) = cor(S); (b) cl(S) = cl(int(S)) and int(S) = int(cl(S)); (c) cl(S) = lin(S).	**تمهيدية 1.32:** لتكن S مجموعة غير خالية ومحدبة في فضاء تبولوجي خطي حقيقي X. عندها الغلاقة cl(S) تكون محدبة. من أجل $int(S)\neq\emptyset$ لدينا: (a) int(S) = cor(S); (b) cl(S) = cl(int(S)) and int(S) = int(cl(S)); (c) cl(S) = lin(S).

Netهي شبكة وهي بمعنى متتالية
يجب التركيز على احرف الجر والتفريق بينها مثل:
continuous at continuous on
إعداد سماح علواز **تالا شوباصي** أميرة غليون



المحاضرة 6 الثامنة

◄ دكتور المادة: شغف زهربا

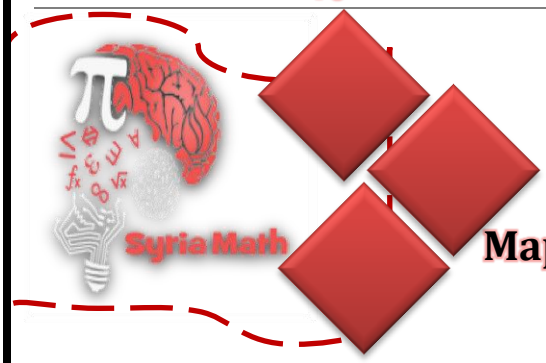
◄ عنوان المحاضرة: Topological Linear Spaces

Definition 1.33. Let X be a real topological linear space. (a) A subset $\mathcal{B}$ of the set $\mathcal{S}$ of 1neighborhoods of 0_X is called a 2base of neighborhoods of 0_X, if for every $S \in \mathcal{S}$ there is a set $T \in \mathcal{B}$ with $T \subset S$. (b) If X has a 3base of 4convex neighborhoods of 0_X, it is called a 5real locally convex topological linear space or a 6real locally convex space.	**تعريف 1.33:** ليكن X فضاء تبولوجي خطي حقيقي. (a) نقول عن مجموعة جزئية $\mathcal{B}$ من $\mathcal{S}$ (1مجموعة جوارات الصفر 0_X) أنها 2قاعده لجوارات الصفر إذا وجد من أجل كل $S \in \mathcal{S}$ مجموعة $T \in \mathcal{B}$ تحقق $T \subset S$. (b) إذا كان لدى X 3قاعدة من 4الجوارات المحدبة للصفر يسمى 5فضاء حقيقي خطي تبولوجي محدب محلياً، أو 6فضاء حقيقي محدب محلياً.
It 1can be shown that every topological linear space has a base of 3balanced neighborhoods of 3the origin. But in many practical situations one needs convex neighborhoods of the origin and, therefore, 4locally convex spaces are very useful in 5practice. For 6certain results in 7vector optimization we will 8assume that the algebraic sum of two sets is closed. A 9sufficient condition for the property of being closed is given by	1يمكن برهان أن كل فضاء خطي توبولوجي يملك قاعدة من 2الجوارات المتوازنة 3للمبدأ. لكن في العديد من الحالات العملية يحتاج المرء لجوارات محدبة للمبدأ، ولذلك الفضاءات المحدبة 4محلياً مفيدة جداً من 5الناحية العملية. من أجل بعض 6النتائج المعينة في 7الأمثلة المتجهية 8سنفترض أن المجموع الجبري لمجموعتين مغلق. التمهيدية التالية ستعطينا 9شرطاً كافياً لخاصية الإغلاق:
Lemma 1.34. In a real locally convex space X the 1algebraic sum of a nonempty 2compact set and a nonempty closed set is closed. Next, we consider some other types of spaces which are important for the 3vector optimization theory	**تمهيدية 1.34:** في فضاء حقيقي محدب محلياً X 1المجموع الجبري لمجموعة غير خالية 2متراصة ومجموعة غير خالية مغلقة يكون مغلقاً. فيما يلي سندرس بعض الأنواع الأخرى من الفضاءات الهامة في 3نظرية الأمثليات المتجهية.
Definition 1.35. Let X and Y be real linear spaces, and let C_Y be a 1convex cone in Y . A map $\|\|\| \cdot \|\|\| : X \to C_Y$ is called a 2vectorial norm, if the following conditions are satisfied ($for\ all\ x, z \in X\ and\ all\ \lambda \in R$): $(a) \|\|\| x \|\|\| = 0_Y \Leftrightarrow x = 0_X;$ $(b) \|\|\| \lambda x \|\|\| = \|\lambda\| \|\|\| x \|\|\|;$ $(c) \|\|\| x + z \|\|\| \leq_{C_Y} \|\|\| x \|\|\| + \|\|\| x \|\|\|.$	**تعريف 1.35:** ليكن كل من X,Y فضاء خطي حقيقي، وليكن C_Y 1مخروطاً محدباً في Y. يسمى التطبيق $\|\|\|.\|\|\|: X \to C_Y$ 2نظيماً شعاعياً إذا كانت الشروط التالية محققة (من أجل كل $x,z \in X$ وكل $\lambda \in R$): $(a) \|\|\| x \|\|\| = 0_Y \Leftrightarrow x = 0_X;$ $(b) \|\|\| \lambda x \|\|\| = \|\lambda\| \|\|\| x \|\|\|;$ $(c) \|\|\| x + z \|\|\| \leq_{C_Y} \|\|\| x \|\|\| + \|\|\| x \|\|$

تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية
المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية

If, [3]in addition, $Y = \mathbb{R}$ and $C_Y = \mathbb{R}_+$ the map $\|\|\| \cdot \|\|\|$ is called a [4]norm and it is denoted $\|.\|$. If the condition (a) is not [5]fulfilled, the map $\|.\|$ is called a [6]seminorm.	[3]بالإضافة إلى ذلك إذا كان $Y = \mathbb{R}$ و $C_Y = \mathbb{R}_+$ فإن التطبيق $\|\|\|.\|\|\|$ يسمى [4]نظيم، ويرمز له $\|.\|$ إذا كان الشرط (a) [5]غير محقق يسمى التطبيق $\|.\|$ [6]شبه نظيم.
Definition 1.36. Let X be a real linear space [1]equipped with a norm $\|.\|$. (a) [2]The pair $(X, \|.\|)$ is called a [3]real normed space (a real normed space is a real topological linear space, if the topology is [4]generated by [5]the metric $(x, y) \mapsto \|x - y\|$). (b) A [6]complete real normed space is called a [7]real Banach space. A significant class of normed spaces are [8]Hilbert spaces.	**تعريف 1.36:** ليكن X فضاء خطي حقيقي [1]مزود بنظيم $\|.\|$: (a) تسمى [2]الثنائية $(X,\|.\|)$ [3]فضاء منظم حقيقي (الفضاء المنظم الحقيقي هو فضاء تبولوجي خطي حقيقي إذا كانت التبولوجيا [4]مولدة [5]بدالة المسافة $(x,y)\longrightarrow\|x-y\|$) (b) [6]الفضاء الحقيقي المنظم التام يسمى [7]فضاء باناخ حقيقي. [8]فضاءات هلبرت تمثل صفاً جوهرياً من الفضاءات المنظمة.
Definition 1.37. Let X be a real linear space. (a) A map $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ is called an [1]inner product, if the following conditions are satisfied $(for\ all\ x, y, z \in X\ and\ all\ \lambda \in R)$: $(i)\ \langle x, x \rangle > 0\ for\ x\ 6 = 0X;$ $(ii)\ \langle x, y \rangle = \langle xy\ x \rangle;$ $(iii) \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle;$ $(iv)\ \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$ (b) If the real linear space X equipped with an inner product $\langle .,. \rangle$ is [2]complete, the pair $(X, \langle .,. \rangle)$ is called a [3]Hilbert space (it is a real normed space with the norm $\|.\|$ defined by $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}\ for\ all\ x \in X$).	**تعريف 1.37:** ليكن X فضاء خطي حقيقي. (a) التطبيق $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ يسمى [1]جداء داخلي إذا كانت الشروط التالية محققة (من أجل كل x,y,z∈X وكل λ∈R): $(i)\ \langle x, x \rangle > 0\ for\ x\ 6 = 0X;$ $(ii)\ \langle x, y \rangle = \langle xy\ x \rangle;$ $(iii) \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle;$ $(iv)\ \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$ (b) إذا كان الفضاء الخطي الحقيقي X المزود بجداء داخلي $\langle .,. \rangle$ [2]تاماً فالثنائية $(X, \langle .,. \rangle)$ تدعى [3]فضاء هلبرت (هو فضاء منظم حقيقي مع النظيم $\|.\|$ المعرف بالشكل $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ من أجل كل $x \in X$).

إعداد سماح علواني **تالا شوباصي** أميرة غليون



المحاضرة التاسعة

◄ دكتور المادة: شغف زوريا

◄ عنوان المحاضرة: Maps on Linear Spaces

Chapter 2
Maps on Linear Spaces

In this chapter [1]various important [2]classes of [3]maps are considered for which one obtains interesting results in [4]vector optimization. We [5]especially consider convex maps and their [6]generalizations and also several types of [7]differentials. It is [8]the aim of this chapter to [9]present a [10]brief survey on these maps.

الفصل الثاني
التطبيقات على الفضاءات الخطية

في هذا الفصل ستتم دراسة [2]صفوف [1]متنوعة وهامة من [3]التطبيقات التي سنحصل من خلالها على نتائج مثيرة للاهتمام في [4]أمثلية المتجهة. نهتم [5]بشكل خاص بالتطبيقات المحدبة [6]وتعميماتها، وبعدة أنواع من [7]التفاضل أيضاً. [8]الهدف من هذا الفصل هو [9]تقديم [10]دراسة مختصرة لهذه التطبيقات.

2.1 Convex Maps

The importance of convex maps is based on the fact that[1] the image set of such a map has useful [2]properties. One of these properties is also valid for so-called [3]convex-like maps which are investigated in this section as well. First, recall the definition of a [4]linear map.

Definition 2.1. Let X and Y be real linear spaces. A map $T : X \to Y$ is called [5]linear, if

$$for\ all\ x, y \in X\ and\ all\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y).$$

The set of [6]continuous ([7]bounded) [8]linear maps between two [9]real normed spaces $(X, \|.\|_X)$ and $(Y, \|.\|_Y)$ is a linear space as well and it is denoted $B(X, Y)$. With the norm $\|.\| : B(X, Y) \to \mathbb{R}$ given by

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0_X} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \quad for\ all\ T \in B(X, Y)$$

$(B(X, Y), \|.\|)$ is even a normed space.
A linear map defines also a [10]corresponding map

التطبيقات المحدبة:

أهمية التطبيقات المحدبة ترتكز على حقيقة أن [1]المستقر الفعلي لمثل هذه التطبيقات تملك [2]خصائص مفيدة. إحدى هذه الخصائص صحيحة أيضاً من أجل ما يسمى [3]بالتطبيقات شبه المحدبة، والتي ستتم دراستها في هذا القسم كذلك.

أولاً لنتذكر تعريف [4]التطبيق الخطي.

تعريف 2.1: ليكن كل من X,Y فضاءً خطياً حقيقياً. يسمى التطبيق T: X⟶Y تطبيقاً [5]خطياً إذا تحقق من أجل كل $x, y \in X$ وكل $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y).$$

مجموعة كل التطبيقات [8]الخطية [6]المستمرة ([7]المحدودة) بين فضاءين [9]حقيقيين منظمين $(X,||.||_X)$ و $(Y,||.||_Y)$ هي فضاء خطي كذلك، ويرمز لها B(X,Y).
مع النظيم ||.||: B(X,Y)⟶R الذي يعطى بالشكل:

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0_X} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \quad for\ all\ T \in B(X, Y)$$

يكون $(B(X,Y),||.||)$ فضاءً منظماً حتى.
يعرف التطبيق الخطي كذلك [10]تطبيقاً مرافقاً.

Definition 2.4. Let X and Y be real linear spaces, C_Y be a convex cone in Y, and let S be a nonempty convex subset of X.

تعريف 2.4: ليكن X,Y فضاءين خطيين حقيقيين، وليكن C_Y مخروطاً محدباً في Y، ولتكن S مجموعة جزئية محدبة غير خالية من X.

المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

يسمى التطبيق f: S⟶Y [1]محدباً (أو [2]C_Y-محدب) إذا تحقق من أجل كل x,y∈S وكل λ∈[0,1]:

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \in C_Y$$

... (2.4) (انظر للشكل 2.1 و 2.2).

يسمى التطبيق f: S⟶Y [3]مقعراً (أو [4]C_Y-مقعر) إذا كان f- محدباً.

إذا كانت $\leq_{C_Y}$ علاقة [5]الترتيب الجزئي على Y المولدة بـ C_Y عندها فالشرط (2.4) يكتب أيضاً بالشكل:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq_{C_Y} \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

إذا كان f تطبيقاً خطياً عندها f و-f تطبيقان محدبان.

A map $f : S \to Y$ is called [1]convex (or [2]C_Y -convex), if for all $x, y \in S$ and all $\lambda \in [0,1]$

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \in C_Y$$

…. (2.4) (see Fig. 2.1 and 2.2).

A map $f : S \to Y$ is called [3]concave (or[4] C_Y -concave), if $-f$ is convex (see Fig. 2.3).

If $\leq_{C_Y}$ is [5]the partial ordering in Y induced by C_Y , then the condition (2.4) can also be written as

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq_{C_Y} \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

If f is a linear map, then f and $-f$ are convex maps.

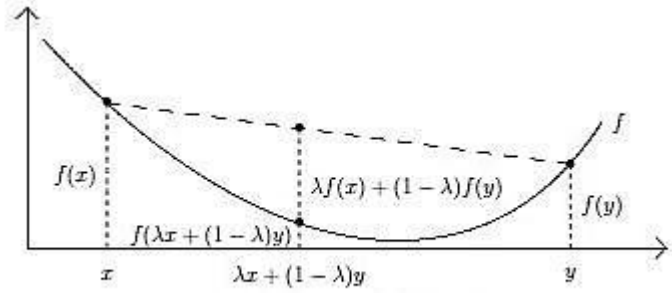


Figure 2.1: Convex functional.

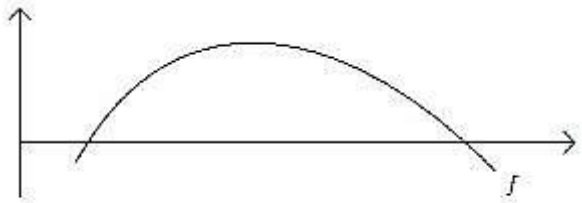


Figure 2.3: Concave functional.

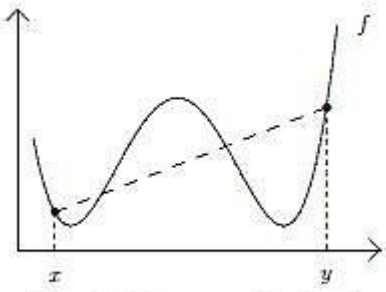


Figure 2.2: Non-convex functional.

تعريف 2.5: ليكن X,Y فضاءين خطيين حقيقيين، وليكن C_Y مخروطاً محدباً في Y، ولتكن S مجموعة جزئية غير خالية من X، وليكن f: S⟶Y تطبيقاً معطى. المجموعة:

$$epi(f) := \{(x,y) | x \in S, y \in \{(f(x)\} + C_Y\}$$

....(2.5)

تسمى [1]ما فوق البيان لـf.

لاحظ أن المنقط في (2.5) يمكن أيضاً كتابته بالشكل:

$$epi(f) = \{(x,y) | x \in S, f(x) \leq_{C_Y} y\}.$$

يظهر أنه يمكن وصف التطبيق المحدب بمجموعة مافوق البيان الخاص به.

Definition 2.5. Let X and Y be real linear spaces, let C_Y be a convex cone in Y , let S be a nonempty subset of X, and let $f : S \to Y$ be a given map. The set

$$epi(f) := \{(x,y) | x \in S, y \in \{(f(x)\} + C_Y\}$$

…….(2.5)

is called the [1]epigraph of f (see Fig. 2.4).

Notice that the epigraph in (2.5) can also be written as

$$epi(f) = \{(x,y) | x \in S, f(x) \leq_{C_Y} y\}.$$

It turns out that a convex map can be characterized by its epigraph.

المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Theorem 2.6. Let X and Y be real linear spaces, let C_Y be a convex cone in Y , let S be a nonempty subset of X and let $f : S \to Y$ be a given map. Then f is convex if and only if $epi(f)$ is a convexset.	**مبرهنة2.6:** ليكن X,Y فضاءين خطيين حقيقيين، وليكن C_Y مخروطاً محدباً في Y، ولتكن S مجموعة جزئية غير خالية من X، وليكن f: S⟶Y تطبيقاً معطى.عندئذ f محدب اذا وفقط اذا كان مافوق بيانf مجموعة محدبة

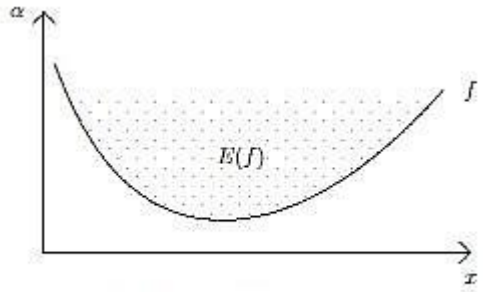
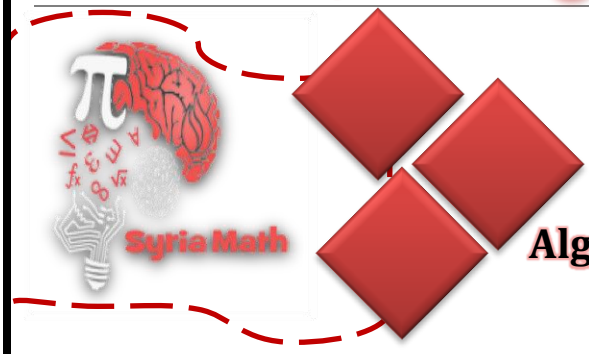


Figure 2.4: Epigraph of a functional.

إعداد سماح علوان **تالا شوباصي



المحاضرة 10

◄ دكتور المادة: شغف زهريا

◄ عنوان المحاضرة: Algebraic Geometry

في البداية تم عرض مقطع فيديو يشرح عن الهندسة الجبرية سندرج محتوى الفيديو في البداية ثم ما ورد في نوطة الجبر

الهندسة الجبرية

[1]الهندسة الجبرية هي [2]فرع من الرياضيات يدرس [3]بشكل كلاسيكي [4]أصفار (جذور) [5]الحدوديات بأكثر من متحول. الهندسة الجبرية الحديثة تعتمد على استخدام [6]التقنيات الجبرية المجردة، وعلى [7]الجبر التبديلي بشكل رئيسي، لحل مسائل هندسية متعلقة بمجموعات الأصفار هذه.

[8]الغرض الأساسي لدراسة الهندسة الجبرية هي [9]التنوعات الجبرية، والتي هي عروض هندسية لحلول [10]جمل المعادلات الحدودية.

أمثلة عن أكثر الصفوف من التنوعات الجبرية دراسةً:

التعامل مع [11]المنحنيات الجبرية التي تتضمن [12]الخطوط، [13]الدوائر، [14]القطوع المكافئة، [15]القطوع الناقصة، [16]القطوع الزائدة، [17]المنحنيات المكعبة (من الدرجة الثالثة) مثل [18]المنحنيات الاهليلجية،و[19]منحنيات من الدرجة الرابعة مثل [20]منحني العروة و [21]منحني كاسيني أوفال.

[22]تنتمي نقطة من المستوي إلى [23]منحني جبري إذا حققت [24]إحداثياتها معادلة حدودية معطاة.

تتضمن التساؤلات الأساسية دراسة النقاط ذات اهتمامات خاصة مثل [25]النقاط الشاذة، [26]نقاط الانعطاف [27]والنقاط بجوار اللانهاية. التساؤلات الأكثر تقدماً تتضمن تبولوجيا المنحنيات والعلاقات بين المنحنيات المعطاة بمعادلات مختلفة.

Algebraic Geometry

[1]Algebraic geometry is a [2]branch of mathematics [3]classically studying [4]zero's of [5]multivariate polynomial. Modern algebraic geometry is based on the use of [6]abstract algebraic techniques, mainly from [7]commutative algebra, for solving geometrical problems about these sets of zeros.

[8]The fundamental objects of studying algebraic geometry are [9]algebraic varieties, which are geometric manifestations of solutions of [10]systems of polynomial equations.

Examples of the most studied classes of algebraic varieties are:

Playing [11]algebraic curves which include [12]lines, [13]circles, [14]parabolas, [15]ellipses, [16]hyperbolas, [17]cubic curves like [18]elliptic curves, and [19]quartic curves like [20]lemniscates and [21]cassiniovals.

A point of the plane [22]belongs to an [23]algebraic curve if it's [24]coordinates satisfy a given polynomial equation.

Basic questions involve the study of the points of special interests like the [25]singular points, the [26]inflection points and the [27]points at infinity. More advanced questions involve the topology of curves and relations between the curves given by different equations.

المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Algebraic geometry [1]occupies a [2]central place in modern mathematics and has multiple conceptual connections with such diverse fields as complex analysis, topology and number theory. Initially a study of systems of polynomial equations is several variables the subject of algebraic geometry starts where [3]equation solving leaves off and it becomes even more important to understand the [4]intrinsic properties of [5]the totality of solutions of a system of equations than to find a specific solution, this leads into some of the deepest areas in all of the mathematics both conceptually and in terms of technique. In the 20th century algebraic geometry split into [6]several sub-areas. The mainstream of algebraic geometry is devoted to the study of the [7]complex points of the algebraic varieties and more generally to the points with coordinates in an algebraically closed field. The study of the points of an algebraic variety with coordinates in the field of the rational numbers or in a number field bacame [8]arithmetic geomerty or more classically the [9]offending geometry, a subfield of algebriac number theory. The study of the real points of an algebriac variety is the subject of real algebraic geomerty. A large part of singularity theory is devoted to the singularities of algebraic varieties. With the rise of the computers a computational algebraic geometry area has emerged which lies at the intersection of algebraic geometry and computer algebra. It consists essentially in developing algorithms and software for studying and finding the properties of explicitly given algebraic varieties.	[1]تشغل الهندسة الجبرية [2]حيزاً مركزياً في الرياضات الحديثة وتملك ارتباطات متعددة من ناحية المفهوم مع مجالات متنوعة مثل التحليل العقدي، التبولوجيا ونظرية الأعداد. مبدئياً في دراسة جمل المعادلات الحدودية بعدة متغيرات يبدأ موضوع الهندسة الجبرية عندما [3]ينتهي حل المعادلات، حتى أن فهم [4]الخصائص الجوهرية [5]لشمولية حلول جملة معادلات يصبح أكثر أهمية من إيجاد حل محدد، وهذا يقودنا إلى بعض أعمق المجالات في الرياضيات ككل من حيث المفهوم والتقنية معاً. في القرن العشرين انقسمت الهندسة الجبرية إلى [6]عدة اختصاصات جزئية. الاتجاه العام من الهندسة الجبرية مكرّس لدراسة [7]النقاط العقدية من التنوعات الجبرية، وبشكل أعم لدراسة النقاط التي إحداثياتها معرفة في حقل مغلق جبرياً. دراسة نقاط التنوع الجبري التي إحداثياتها معرفة في حقل الأعداد النسبية أو في حقل عددي أصبحت [8]هندسة حسابية، أو بشكل أكثر كلاسيكية [9]الهندسة المخالفة، وهي اختصاص جزئي من نظرية الأعداد الجبرية. دراسة النقاط الحقيقية في تنوع جبري هي موضوع الهندسة الجبرية الحقيقية. جزء كبير من نظرية الشذوذ مكرّس للحالات الشاذة للتنوعات الجبرية. مع ظهور الحواسيب برز مجال الهندسة الجبرية الحاسوبية، والذي يعتمد عل تقاطع الهندسة الجبرية مع جبر الحاسوب. تتضمن بشكل أساسي تطوير خوارزميات وبرمجيات لدراسة وإيجاد خصائص التنوعات الجبرية المعطاة بوضوح.
نهاية الفيديو...	

In a very [1]rough sketch we [2]explain what [3]algebraic geometry is about and what it can be used for. We stress the many [4]correlations with other fields of research, such as [5]complex analysis, [6]topology, [7]differential geometry, [8]singularity theory, [9]computer algebra, [10]commutative algebra, [11]number theory, [12]enumerative geometry, and even [13]theoretical physics. The goal of this section is just [14]motivational; you will not find [15]definitions or [16]proofs here (and probably not even a [17]mathematically precise statement).	[2]سنشرح في [1]مخطط بسيط جدا ماهي [3]الهندسة الجبرية وفي ماذا يمكن استخدامها. نجمع العديد من [4]الارتباطات مع باقي الفروع في الابحاث مثل [5]التحليل العقدي، [6]تبولوجيا ،[7]هندسة تفاضلية، [8]نظرية الشذوذ، [9]جبر الحاسوب، [10]جبر التبديل، [11]نظرية الاعداد، [12]الهندسة الحسابية، وحتى [13]الفيزياء النظرية. الهدف من هذا القسم هو [14]تحفيزي ،لن تجد [15]تعاريف او [16]براهين هنا (وغالباً لن تجد [17]تعبيراً رياضياً دقيقاً حتى).
0.1. What is algebraic geometry? To start from something that you probably know, we can say that algebraic geometry is the [1]combination of [2]linear algebra and [3]algebra: _ In linear algebra, we study [4]systems of [5]linear equations in [6]several variables. _ In algebra, we study (among other things) [7]polynomial equations in [8]one variable. Algebraic geometry [9]combines these [10]two fields of mathematics by studying systems of polynomial equations in several variables. Given such a system of polynomial equations, what sort of questions can we ask? Note that we cannot expect [11]in general to write down explicitly all the solutions: we know from algebra that even a [12]single complex polynomial equation of degree d > 4 in one variable can in general not be solved exactly. So we are more interested in [13]statements about [14]the geometric structure of [15]the set of solutions. For example, in the case of a complex polynomial equation of degree d, even if we cannot [15]compute the solutions we know that there are [16]exactly d of them (if we [17]count them with the [18]correct multiplicities). Let us now see what sort of "geometric structure" we can find in polynomial equations in several variables.	**0.1 ما هي الهندسة الجبرية؟** لنبدأ بشيء تعرفه غالباً، يمكننا القول أن الهندسة الجبرية هي [1]الدمج بين [2]الجبر الخطي [3]والجبر: - في الجبر الخطي ندرس [4]جملاً من [5]المعادلات الخطية [6]بعدة متحولات. - في الجبر ندرس (بالإضافة إلى أشياء أخرى) [7]المعادلات الحدودية [8]بمتحول واحد. [9]تجمع الهندسة الجبرية هذين [10]المجالين من الرياضيات بدراسة جمل من المعادلات الحدودية بعدة متغيرات. اذا اعطيت معادلات الحدودية، أي نوع من الأسئلة يمكننا طرحها؟ لاحظ أننا لا نستطيع [11]بشكل عام توقع كتابة جميع الحلول بشكل واضح، نعلم من الجبر أن [12]معادلة حدودية عقدية وحيدة حتى من الدرجة d>4 بمتغير واحد لا يمكن حلها تماماً بالضبط. لذلك فنحن مهتمون أكثر [13]بالعبارات التي تصف [14]البنية الهندسية ل [15]مجموعة الحلول. على سبيل المثال، في حالة معادلة حدودية عقدية من الدرجة d، حتى إن لم نستطع من [15]حساب الحلول فإننا نعلم أنه هناك عدد d [16]تماماً من الحلول (إذا [17]عددناها [18]بالمضاريب الصحيحة). لنرى الآن أي نوع من "البنية الهندسية" يمكننا إيجاده في المعادلات الحدودية بعدة متغيرات.
Example 0.1.1. [1]Probably the [2]easiest example that is covered [3]neither in linear algebra nor in algebra is that of a single polynomial	**مثال 0.1.1:** [1]من المحتمل أن [2]ابسط مثال لم يعطى [3]لا بالجبر الخطي ولا الجبر هو معادلة حدودية وحيدة

بمتحولين. لندرس المثال التالي:

$$C_n = \{(x, y) \in C^2 ;$$
$$y^2 = (x-1)(x-2) \dots (x-2n)\} \subset \mathbb{C}^2$$

حيث n≥1. لاحظ أنه [4]في هذه الحالة [5]من الممكن في الواقع كتابة جميع الحلول، لأن المعادلة (تقريباً) محلولة بالنسبة لـy أساساً: يمكننا [6]اختيار x لتكون أي عدد عقدي، ثم الحصول على قيمتين لـy، إلا إذا كانت x={1,...,2n}، ففي هذه الحالة نحصل علي قيمة واحدة فقط لـy. ([7]بالضبط 0).

إذاً يبدو أن مجموعة المعادلات [8]تبدو [9]كنسختين من [10]المستوي العقدي مع نسختين من كل من النقاط 1,...,2n بالتحديد: [11]يحدد المستوي العقدي [12]قيم x، ونسختاه [13]تطابقان القيمتين الممكنتين لـy، أي [14]جذرا العدد (x-1)...(x-2n).

equation in two variables. Let us consider the following example:

$$C_n = \{(x, y) \in C^2 ;$$
$$y^2 = (x-1)(x-2) \dots (x-2n)\} \subset \mathbb{C}^2$$

where $n \geq 1$. Note that [4]in this case it is actually [5]possible to write down all the solutions, because the equation is (almost) solved for y already: we can [6]pick x to be any complex number, and then get two values for y—unless $x \in \{1, \dots, 2n\}$, in which case we only get one value for y ([7]namely 0).

So it seems that the set of equations [8]looks like [9]two copies of the [10]complex plane with the two copies of each point 1,…,2n identified: the complex plane [11]parametrizes [12]the values for x, and the two copies of it [13]correspond to the two possible values for y, i. e. [14]the two roots of the number $(x-1) \dots (x-2n)$.

إعداد سماح علوان **تالا شوياصي

المحاضرة 11 , 12

◄ دكتور المادة: شغف زهريا

◄ عنوان المحاضرة: Algebraic Geometry

Remark 0.1.4. One of [1]the trivial but [2]common [3]sources for [4]misunderstandings is whether we count [4]dimensions over $\mathbb{C}$ or over $\mathbb{R}$. The examples considered above are [5]real surfaces (the dimension over $\mathbb{R}$ is 2), but complex curves (the dimension over $\mathbb{C}$ is 1). We have used the word "[6]surface" as this fitted best to the pictures that we have drawn. When looking at the theory however, it is usually best to call these objects [7]curves. In what follows, we always mean the dimension over $\mathbb{C}$ unless stated otherwise.	**ملاحظة0.1.4:** أحد [3]المصادر [1]التافهة لكن [2]الشائعة [4]للأخطاء في الفهم هو فيما إذا كنا نعد [5]الأبعاد فوق $\mathbb{C}$ أم فوق $\mathbb{R}$. الأمثلة التي درست سابقاً هي سطوح حقيقية (البعد على $\mathbb{R}$ هو 2)، لكنها منحنيات عقدية (البعد على $\mathbb{C}$ هو 1). لقد استخدمنا الكلمة "[6]سطح" لأنها الأكثر ملاءمة للصور التي تم رسمها. على أية حال، عند النظر إلى النظرية من الأفضل عادةً أن ندعو هذه الأجسام [7]بمنحنيات. فيما يلي نعني دائماً البعد على C إلا إذا ذكر خلاف ذلك.
Remark 0.1.5. What we should learn from the examples above: _Algebraic geometry can make statements about the topological structure of objects defined by polynomial equations. It is therefore [1]related to topology and differential geometry (where similar statements are deduced using [2]analytic methods). _The geometric objects considered in algebraic geometry need not be [3]smooth (i. e. they need not be [4]manifolds). Even if our [5]primary interest is in [6]smooth objects, [7]degenerations to [8]singular objects can greatly [9]simplify a problem. This is a main point that [10]distinguishes algebraic geometry from other "geometric" theories (e. g. differential or symplectic geometry). Of course, this comes at a price: our theory must be strong enough to include such singular objects and make statements how things vary when we degenerate from smooth to singular objects. In this regard, algebraic geometry is related to [11]singularity theory which studies precisely these questions.	**ملاحظة0.1.5:** ما يجب تعلمه من الأمثلة السابقة: _يمكن أن تعبر الهندسة الجبرية عن البنية التبولوجية للأجسام المعرفة بمعادلات حدودية، لذلك فهي [1]متعلقة بالتبولوجيا والهندسة التفاضلية (حيث تستنتج عبارات مشابهة باستخدام [2]طرق تحليلية). _الأجسام الهندسية المدروسة في الهندسة الجبرية لا تحتاج لأن تكون [3]ملساء (أي لا تحتاج أن تكون [4]متنوعة). على الرغم من أن [5]اهتمامنا الأساسي هو [6]بالأجسام الملساء، فإن [7]التقسيم [8]لأجسام منفردة يمكنه [9]تبسيط المسألة بدرجة كبيرة. تلك نقطة أساسية [10]تميز الهندسة الجبرية عن نظريات "هندسية" أخرى (مثل الهندسة التفاضلية و هندسة الربط). بالطبع فإن هذا له ثمنه: يجب أن تكون نظريتنا قوية بما فيه الكفاية لتتضمن أجساماً شاذه كهذه وتعبر عن مدى تنوع الأشياء عندما نفرّق من أغراض ملساء إلى شاذة. في هذا الشأن تتعلق الهندسة الجبرية [11]بنظرية الشذوذ التي تدرس هذه التساؤلات بشكل دقيق.

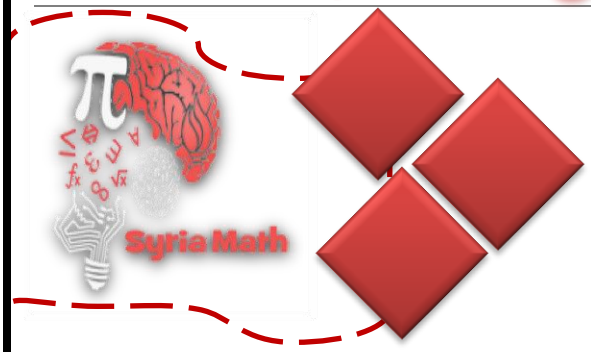
المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

Remark 0.1.6. Maybe it looks a bit restrictive to allow only algebraic (polynomial) equations to describe our geometric objects. But in fact it is a deep theorem that for [1]compact objects, we would not get anything different if we allowed holomorphic equations too. In this respect, algebraic geometry is very much related (and in certain cases identical) to [2]complex (analytic) geometry. The easiest example of this correspondence is that a holomorphic map from the Riemann sphere C_∞ to itself must in fact be a [3]rational map (i. e. the quotient of two polynomials).	**ملاحظة0.1.6:** ربما يبدو تقييد قليل عندما نسمح بالمعادلات الجبرية (الحدودية) فقط لوصف أجسامنا الهندسية مقيّداً قليلاً، لكن في الحقيقة توجد نظرية عميقة تنص أنه من أجل [1]أجسام متراصة لن نحصل على أي اخلاف إذا سمحنا بالمعادلات الهولومورفية كذلك. في هذا الصدد، ترتبط الهندسة الجبرية بشدة (وتطابق في حالات معينة) [2]بالهندسة(التحليلية) العقدية .أسهل مثال على هذه العلاقة هو أن التطبيق الهولومورفي من الكرة الريمانية C_∞ إلى نفسها يجب أن يكون [3]تطبيقاً كسرياً (أي تقسيم حدوديتين).
Example 0.1.7. Let us now turn our attention to the next [1]more complicated objects, namely [2]complex surfaces in [3]3-space. We just want to give one example here. Let S be the [4]cubic surface $S = \{(x,y,z); 1 + x^3 + y^3 + z^3 - (1 + x + y + z)^3 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ As this object has real dimension 4, it is impossible to draw pictures of it that reflect its topological properties correctly. Usually, we overcome this problem by just drawing the real part, i. e. we look for solutions of the equation over the real numbers. This then gives a real surface in $\mathbb{R}^3$ that we can draw. We should just be careful about which statements we can claim to "see" from this incomplete geometric picture.	**مثال0.1.7:** لنلفت انتباهنا هنا إلى الأجسام التالية [1]الأكثر تعقيداً، بالتحديد إلى [2]السطوح العقدية في [3]فضاء ثلاثي. نريد أن نطرح مثالاً واحداً هنا، ليكن S [4]السطح التكعيبي: $S = \{(x,y,z); 1 + x^3 + y^3 + z^3 - (1 + x + y + z)^3 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ بما أن هذا الجسم له البعد الحقيقي 4 فمن المستحيل رسم صور تعكس خصائصه التبولوجية بشكل صحيح. عادةً نتغلب على هذه المشكلة برسم الجزء الحقيقي فقط، أي نبحث عن حلول المعادلة على فضاء الأعداد الحقيقية، وهذا يعطي سطحاً حقيقياً في R^3 يمكننا رسمه. علينا فقط أن نكون حذرين حول أي من العبارات يمكننا ادعاء قدرتنا على "رؤيتها" من هذه الصورة الهندسية غير المكتملة.
In contrast to our previous examples, we have now used a[1]linear projection to map the real 3-dimensional space onto the drawing plane. We see that there are some lines contained in S. In fact, one can show that every smooth cubic surface has exactly 27 lines on it. This is another sort of question that one can ask about the solutions of polynomial equations, and that is not of topological nature: do they contain curves with special properties (in this case lines), and if so, how many? This branch of algebraic geometry is usually called [2]enumerative geometry.	بعكس أمثلتنا السابقة قمنا الآن باستخدام [1]إسقاط خطي لتصوير الفضاء ثلاثي الأبعاد على مستوي الرسم. نرى وجود بعض الخطوط المحتواة في S. في الواقع يمكننا إثبات أن كل سطح أملس مكعب يملك 27 خط تماماً عليه. هذا نوع آخر من الأسئلة التى يمكن للشخص أن يطرحها حول حلول المعادلات الحدودية، وليست من طبيعة تبولوجية: هل تملك (الحلول) منحنيات ذات خصائص محددة؟ (في هذه الحالة خطوط)، وإذا كان ذلك صحيحاً فكم عددها؟ هذا الفرع من الهندسة الجبرية يسمى عادةً [2]الهندسة الحسابية.

Remark 0.1.8. It is probably surprising that algebraic geometry, in particular enumerative geometry, is very much [1]related to theoretical physics. In fact, many results in enumerative geometry [2]have been found by physicists first. Why are physicists interested e. g. in the number of lines on the cubic surface? We try to give a short answer to this (that is necessarily vague and incomplete): There is a branch of [3]theoretical physics called [4]string theory whose underlying idea is that the [5]elementary particles (electrons, quarks,. . .) might not be point-like, but rather one-dimensional objects (the so-called strings), that are just so small that their one-dimensional structure cannot be observed directly by any [6]sort of [7]physical measurement. When these particles move in time, they [8]sweep out a surface in space-time. For some reason this surface has a natural complex structure coming from the underlying physical theory.	**ملاحظة0.1.8:** قد تتفاجأ أن الهندسة الجبرية، وبالأخص الهندسة الحسابية، [1]مرتبطة بشدة مع الفيزياء النظرية. في الواقع، العديد من النتائج في الهندسة الحسابية [2]تم إيجادها من قبل فيزيائيين أولاً. لماذا يهتم الفيزيائيون بأشياء مثل عدد الخطوط في السطح المكعب؟ سنحاول إعطاء إجابة قصيرة لذلك التساؤل (وهي بالضرورة سطحية وغير مكتملة): هناك فرع من [3]الفيزياء النظرية يسمى [4]نظرية الأوتار/النظرية الخيطية، فكرته الأساسية هي أن [5]الجسيمات الأولية (الالكترونات، الكواركات...) قد لا تكون أجساماً نقطية، بل أجساماً أحادية البعد (ما يسمى بالأوتار/الخيوط)، وهي صغيرة لدرجة أن بنيتها أحادية البعد لا يمكن مراقبتها مباشرةً بأي [6]نوع من [7]المقاييس الفيزيائية. عندما تتحرك هذه الجسيمات عبر الزمن [8]ترسم سطحاً في الفضاء الزمني. لسبب ما يملك هذا السطح بنية عقدية بطبيعته تأتي من النظرية الفيزيائية الهامة.
Now the same idea applies to space-time in general: string theorists believe that space time is not 4-dimensional as we observe it, but rather has some extra dimensions that are again so small in size that we cannot observe them directly. (Think e. g. of a long tube with a very small diameter—of course this is a two-dimensional object, but if you look at this tube from very far away you cannot see the small diameter any more, and the object looks like a one-dimensional line.) These extra dimensions are [1]parametrized by a space that sometimes has a complex structure too; it might for example be the complex cubic surface that we looked at above. So in this case we're in fact looking at complex curves in a complex surface. A priori, these curves can sit in the surface in any way. But there are [2]equations of motion that tell you how these curves will sit in [3]the ambient space, just as in classical mechanics it follows from the equations of motion that a particle will move on a [4]straight line if no [5]forces apply to it.	تطبق نفس الفكرة على الفضاء الزمني في الحالة العامة: يصدق فيزيائيو الأوتار أن الفضاء الزمني ليس رباعي الأبعاد كما نجده، بل على الأصح له أبعاد إضافية وهي أيضاً صغيرة بالحجة لدرجة أننا لا نستطيع مراقبتها مباشرةً. (فكر مثلاً بأنبوب طويل له قطر صغير جداً، بالطبع هذا جسم ثنائي البعد، لكن إذا نظرت إلى هذا الأنبوب من بعيد لا يعود بإمكانك رؤية القطر الصغير، ويبدو الجسم كخط أحادي البعد.) هذه الأبعاد الإضافية [1]تحدد بمساحة تملك أحياناً بنية عقدية كذلك، من الممكن أن تكون،على سبيل المثال، السطح التكعيبي العقدي الذي لاحظناه سابقاً. إذاً في الحقيقة نحن ننظر في هذه الحالة إلى المنحنيات العقدية في سطح عقدي. بالاستنتاج، هذه المنحنيات يمكن أن توجد على السطح بأي شكل، لكن توجد [2]معادلات للحركة تحدد كيف ستكون هذه المنحنيات في [3]الفضاء المحيط، كما في الميكانيك الكلاسيكي يُستنتَج من معادلات الحركة أن جسيماً ما سيتحرك [4]بخط مستقيم إذا لم [5]تطبق عليه أي قوة.

In our case, the equations of motion say that the curve [6]must map holomorphically to the ambient space. As we said in remark 0.1.6 above, this is equivalent to saying that we must have algebraic equations that describe the curve. So we are looking at exactly the same type of questions as we did in example 0.1.7 above.	في حالتنا تقول معادلات الحركة أن المنحني [6]يجب أن يصور بشكل هولومورفي إلى الفضاء المحيط. كما قلنا في الملاحظة السابقة، هذا يكافئ قول أنه يجب أن يكون لدينا معادلات جبرية تصف المنحني، لذلك نحن ننظر إلى نفس النوع من الأسئلة في المثال السابق.

إعداد سماح علوان **تالا شوباصي



المحاضرة 13,14

◄ دكتور المادة: شغف زوربا

◄ عنوان المحاضرة: graph theory

Chapter 1

Definitions and Fundamental Concepts

1.1 Definitions

Conceptually, a [1]*graph* is [2]formed by [3]*vertices* and [4]*edges* connecting the vertices.

Example.

الفصل الأول

تعاريف ومفاهيم أساسية:

تعريف 1.1: بالنسبة للمفهوم، [1]البيان [2]مشكل من [3]عقد و[4]أضلاع تربط هذه العقد.

مثال

Formally, a graph is a pair of sets (V, E), where V is the [1]*set of vertices* and E is the [2]*set of edges*, formed by [3]pairs of vertices. E is a [4]*multiset*, in other words, its elements can occur morethan once so that every element has a [5]*multiplicity*. Often, we [6]label the vertices with letters (for example: $a, b, c, \ldots$ or $v_1, v_2, \ldots$) or numbers $1, 2, \ldots$ Throughout this lecture material, we will label the elements of V in this way.

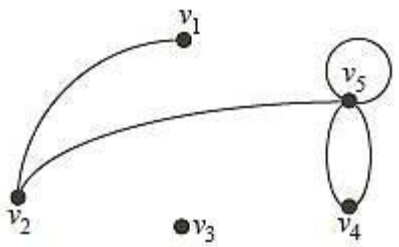
Example. *(Continuing from the [7]previous example)*

We label the vertices as follows:

بشكل رسمي، البيان هو زوج من المجموعات (V,E) حيث V [1]مجموعة العقد و E [2]مجموعة الأضلاع، تشكل من [3]زوج من العقد. E هي مجموعة [4]تعددية، بتعبير آخر، عناصرها يمكن أن تظهر أكثر من مرة حيث كل عنصر له [5]تكرار (تعدد).

غالباً ما [6]نشير للعقد بأحرف (مثل a,b,c,,, أو v_1, v_2,,,) أو أرقام 1,2,,,. خلال مضمون هذه المحاضرات سنشير لعناصر V بهذه الطريقة.

مثال: (بالاستمرار [7]بالمثال السابق) سنشير للعقد كما يلي:



We have $V = \{v_1, \ldots, v_5\}$ for the vertices and $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_5), (v_5, v_5), (v_5, v_4), (v_5, v_4)\}$ for the edges.

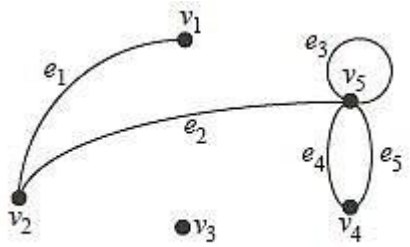
لدينا $V=\{v_1,\ldots,v_5\}$ للعقد و$E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_5),(v_5,v_5),(v_5,v_4),(v_5,v_4)\}$ للأضلاع.

WhatsApp : 0997378154 Facebook_Page : IOM

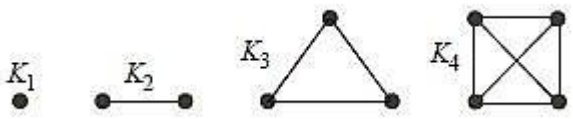
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية

Similarly, we often label the edges with letters (for example: $a, b, c, \ldots$ *or* $e_1, e_2, \ldots$)or numbers $1, 2, ..$ for simplicity.	بشكل مشابه سنشير غالباً للأضلاع بحروف (على سبيل المثال a,b,c,... أو $e_1,e_2,..$) أو أرقام 1,2,... للتبسيط.
Remark. *The two edges* (u, v) *and* (v, u) *are the same. In other words, the pair is not ordered.* **Example.** *(Continuing from the previous example) We label the edges as follows:*	**ملاحظة:** الضلعان (u,v) و(v,u) متماثلان. بكلمات أخرى الثنائية غير مرتبة. **مثال:** (بالاستمر من المثال السابق) نشير للأضلاع كما يلي:

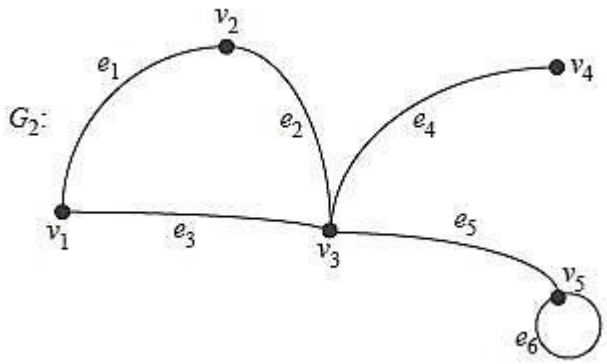


So $E = \{e_1, \ldots, e_5\}$. We have the following [1]terminologies: 1. The two vertices u *and* v are [2]*end vertices* of the edge (u, v). 2. Edges that have the same end vertices are [3]*parallel*. 3. An edge of the form (v, v) is a [4]*loop*. 4. A graph is [5]*simple* if it has no parallel edges or loops. 5. A graph with no edges (i.e. E is empty) is [6]*empty*. 6. A graph with no vertices (i.e. V and E are empty) is a [7]*null graph*. 7. A graph with only one vertex is [8]*trivial*. 8. Edges are [9]*adjacent* if they share a common end vertex. 9. Two vertices u *and* v are *adjacent* if they are connected by an edge, in other words, (u, v) is an edge. 10. [10]The *degree* of the vertex v, written as $d(v)$, is the [11]number of edges with v as an end vertex. By convention, we [12]count a loop twice and [13]parallel edges contribute separately. 11. A [14]*pendant vertex* is a vertex whose [15]degree is 1. 12. An edge that [16]has a pendant vertex as an end vertex is a [17]*pendant edge*. 13.An [18]*isolated vertex* is a vertex whose [19]*degree is 0*. **Example.** *(Continuing from the previous example)* • v_4 *and* v_5 *are end vertices of* e_5. • e_4 *and* e_5 *are parallel.* • e_3 *is a loop.* • *The graph is not simple.*	وبذلك $E=\{e_1,...,e_5\}$. لدينا [1]المصطلحات التالية: 1. العقدتان u,v هي [2]عقد نهائية للضلع (u,v) (رأسا الضلع/طرفا الضلع). 2. الأضلاع التي تملك نفس العقد النهائية تكون [3]متوازية. 3. الضلع من الشكل (v,v) هو [4]حلقة. 4. يكون البيان [5]بسيطاً إذا لم يكن يحتوي على أضلاع متوازية أو حلقات. 5. البيان الذي لا يحتوي على أضلاع (أي E خالية) هو [6]بيان خالٍ (فارغ). 6. البيان الذي لا يحتوي على عقد (أي V وE خاليتان) هو [7]بيان صفري. 7. البيان الذي يحوي عقدة واحدة هو [8]بيان تافه. 8. يكون ضلعان [9]متجاورين إذا كانا يشتركان بعقدة نهائية. 9. تكون عقدتان u,v متجاورتين إذا كانتا مرتبطتين بضلع، بتعبير آخر إذا كان (u,v) ضلعاً. 10. [10]درجة عقدة v، تكتب d(v)، هي [11]عدد الأضلاع التي تكون v طرفاً لها. للملاءمة [12]نعد الحلقة مرتين و[13]الأضلاع الموازية تحسب بشكل منفصل. 11. [14]العقدة المعلّقة هي عقدة [15]درجتها 1. 12. الضلع الذي [16]يملك طرف معلق كعقدة نهائية يكون [17]ضلعاً معلقاً. 13. [18]العقدة المعزولة هي عقدة [19]درجتها 0. **مثال:** (بالاستمرار من المثال السابق) • v_4 وv_5 عقد نهائية لـe_5. • e_4 وe_5 متوازيان. • e_3 هو حلقة. • البيان غير بسيط.

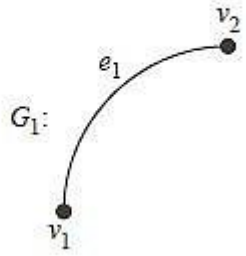
• e_1 and e_2 are adjacent. • v_1 and v_2 are adjacent. • The degree of v_1 is 1 so it is a pendant vertex. • e_1 is a pendant edge. • The degree of v_5 is 5. • The degree of v_4 is 2. • The degree of v_3 is 0 so it is an isolated vertex.	• e_1 و e_2 متجاوران. • v_1 و v_2 متجاورتان. • درجة v_1 هي 1 لذلك فهي عقدة معلقة. • e_1 ضلع معلق. • درجة v_5 هي 5. • درجة v_4 هي 2. • درجة v_3 هي 0 لذلك فهي عقدة معزولة.
In the future, we will label graphs with letters, for example: $G = (V, E)$. The [1]*minimum degree* of the vertices in a graph G is denoted $\delta(G)$ (= 0 if there is an isolated vertex in G). Similarly, we write $\Delta(G)$ as the [2]*maximum degree* of vertices in G. **Example.** *(Continuing from the previous example)* $\delta(G) = 0$ *and* $\Delta(G) = 5$. **Remark.** *In this course, we only consider* [3]finite *graph, i.e.* V *and* E *are* [4]*finite sets*. Since every edge has two end vertices, we get **Theorem 1.1.** *The graph* $G = (V, E)$ *where* $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ *and* $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, *satisfies* $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$. **Corollary.** *Every graph has* [5]*an even number of vertices of odd degree*. *Proof.* If the vertices $v_1, \dots, v_k$ have [6]*odd degrees* and the vertices $v_{k+1}, \dots, v_n$ have [7]even degrees, then (Theorem 1.1) $d(v_1) + \cdots + d(v_k) = 2m - d(v_{k+1}) - \cdots - d(v_n)$ is even. Therefore, k is even.	في المستقبل سنشير للبيانات بأحرف، على سبيل المثال: G=(V,E) [1]الدرجة الأقل للعقد في بيان G يرمز لها $\delta(G)$ (تساوي 0 إذا وجدت عقدة معزولة في G). بشكل مشابه نرمز $\Delta(G)$ [2]للدرجة الأعلى بين عقد G. **مثال:** (مستمر من المثال السابق) $\Delta(G) = 0$ و $\Delta(G) = 5$ **ملاحظة:** في هذا الفصل سندرس [3]البيانات المنتهية فقط، وهذا يعني أن V و E [4]مجموعات منتهية. بما أن كل ضلع يملك عقدتين نهائيتين، نجد: **نظرية 1.1:** البيان G=(V,E) حيث $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ و $E=\{e_1,\dots,e_m\}$ تحقق: $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$. **نتيجة:** كل بيان يملك [5]عدداً زوجياً من العقد ذات الدرجات الفردية. **الإثبات:** إذا كانت العقد $v_1,\dots,v_k$ تملك [6]درجات فردية و العقد $v_{k+1},\dots,v_n$ تملك [7]درجات زوجية عندها: حسب نظرية1.1 $\boldsymbol{d(v_1) + \cdots + d(v_k) = 2m - d(v_{k+1}) - \cdots - d(v_n)}$ زوجي، لذلك k زوجي.
Example. *(Continuing from the previous example) Now the sum of the degrees is* $1 + 2 + 0 + 2 + 5 = 10 = 2 \cdot 5$. *There are two vertices of odd degree, namely* v_1 *and* v_5. A simple graph that contains [1]every possible edge between all the vertices is called a [2]*complete graph*. A complete graph with n vertices is denoted as K_n. The first four complete graphs are given as examples:	**مثال:** (مستمر من المثال السابق) مجموع الدرجات هو 1+2+0+2+5=10=2*5 يوجد عقدتان لهما درجات فردية هما v_1 و v_5. بيان بسيط يحوي [1]كل الأضلاع الممكنة بين جميع العقد يسمى بيان تام. يرمز [2]لبيان تام فيه n عقدة بـ K_n. البيانات التامة الأربعة الأولى تعطى كأمثلة:
	
The graph $G_1 = (V_1, E_1)$ is a *subgraph* of $G_2 = (V_2, E_2)$ if	البيان $G_1=(V_1,E_1)$ هو بيان جزئي من $G_2=(V_2,E_2)$ إذا حقق: 1. $V_1 \subseteq V_2$

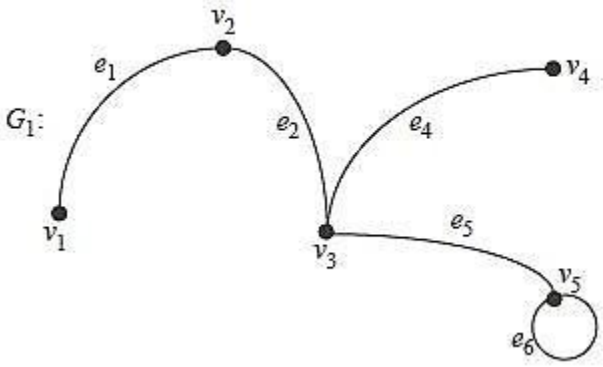
1. $V_1 \subseteq V_2$ and 2. Every edge of G_1 is also an edge of G_2.	2. كل ضلع من G_1 هو ضلع من G_2 أيضاً.

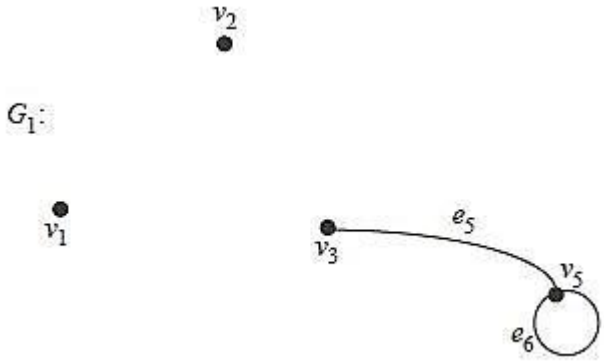
Example. *We have the graph*

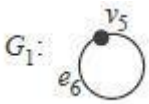


and some of its subgraphs are

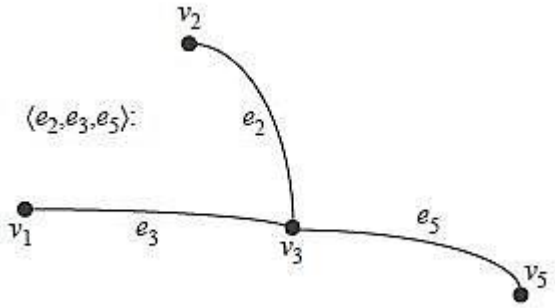




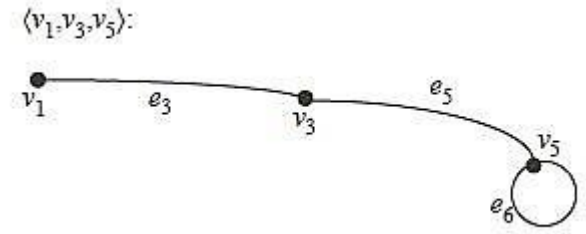




The *subgraph of* $G = (V, E)$ *induced by the edge set* $E_1 \subseteq E$ is: $G_1 = (V_1, E_1) =_{def.} \langle E_1 \rangle$, where V_1 consists of every end vertex of the edges in E_1. **Example.** *(Continuing from above) From the original graph* G*, the edges* e_2, e_3 *and* e_5 *induce the subgraph*	البيان الجزئي من $G=(V,E)$ المولد بمجموعة الأضلاع $E_1 \subseteq E$ هو: $G_1 = (V_1, E_1) =_{def.} \langle E_1 \rangle$ حيث V_1 تتألف من كل عقدة نهائية من الأضلاع في E_1. **مثال:** (متابعة ماورد اعلاه) من البيان الأصلي G الأضلاع e_2, e_3, e_5 تولد البيان الجزئي



The *subgraph of* $G = (V,E)$ *induced by the vertex set* $V_1 \subseteq V$ is: $G_1 = (V_1,E_1) =_{def.} \langle V_1\rangle$, where E_1 consists of every edge between the vertices in V_1. **Example.** *(Continuing from the previous example) From the original graph* G*, the vertices* v_1, v_3 *and* v_5 *induce the subgraph*	البيان الجزئي لـ(G=(V,E المولد بمجموعة العقد $V_1 \subseteq V$ هو: $G_1 = (V_1,E_1) =_{def.} \langle V_1\rangle$, حيث E_1 تتألف من كل الأضلاع بين العقد في V_1. **مثال:** (مستمر من المثال السابق) من البيان الأصلي G الأضلاع v_1,v_3,v_5 تولد البيان الجزئي.



A complete subgraph of G is called a *clique* of G.	البيان الجزئي التام لـG يسمى جماعة لـG.

1.2 Walks, Trails, Paths, Circuits, Connectivity, Components

Remark. *There are many different variations of the following terminologies. We will adhere to the definitions given here.*

A [1]*walk* in the graph $G = (V,E)$ is a [2]finite sequence of the form

$$v_{i0}, e_{j1}, v_{i1}, e_{j2}, \dots, e_{jk}, v_{ik},$$

which consists of [3]alternating vertices and edges of G. The walk [4]starts at a vertex. Vertices v_{it-1} *and* v_{it} are end vertices of e_{jt} $(t = 1,\dots,k)$.

v_{i0} is the [5]*initial vertex* and v_{ik} is the [6]*terminal vertex*. k is the [7]*length* of the walk. A [8]zero length walk is just a single vertex v_{i0}. It is allowed to visit a vertex or go through an edge more than once. A walk is [9]*open* if $v_{i0} \neq v_{ik}$. Otherwise it is *closed*.

Example. *In the graph*

1.2المسارات، الممرات، الطرق، الدوائر، الربط، المركبات:

ملاحظة: هناك الكثير من التعددات المختلفة للمصطلحات التالية، سنتقيد بالتعريفات المعطاة هنا.

[1]المسار في البيان G=(V,E) هو [2]متتالية منتهية من الشكل:

$$v_{i0}, e_{j1}, v_{i1}, e_{j2}, \dots, e_{jk}, v_{ik},$$

تتألف من العقد والأضلاع [3]المتناوبة من G. [4]يبدأ المسار بعقدة.

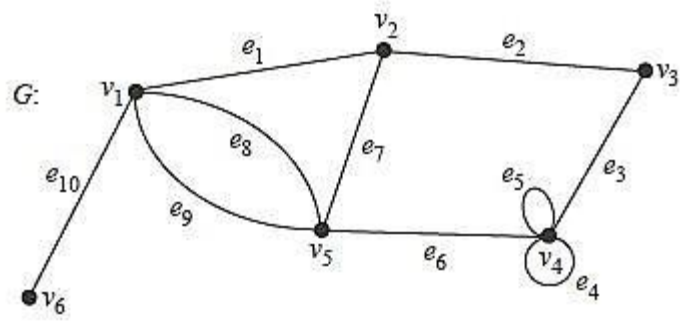
العقد v_{it-1} وv_{it} هي رؤوس الأضلاع e_{jt} (t=1,…,k)،

v_{i0} هي [5]عقدة المنبع، وv_{ik} هي [6]العقدة النهائية. K هو [7]طول المسار. [8]المسار الذي طوله 0 هو عقدة وحيدة فقط.

من المسموح المرور بعقدة أو المرور من خلال ضلع أكثر من مرة.

يكون الطريق [9]مفتوحاً إذا كان $v_{i0} \neq v_{ik}$. وخلاف ذلك يكون مغلقاً.

مثال: في البيان:



المسار:

$v_2, e_7, v_5, e_8, v_1, e_8, v_5, e_6, v_4, e_5, v_4, e_5, v_4$

مفتوح. ومن ناحية أخرى المسار:

$v_4, e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_7, v_5, e_6, v_4$

مغلق.

يكون المسار [1]ممراً إذا تم السير على أي ضلع [2]مرة واحدة على الأكثر. عندها عدد مرات ظهور زوج العقد u,v [3]كعقد متعاقبة في الممر هو على الأكثر عدد الأضلاع المتوازية التي تربط u,v.

مثال: (مستمر من المثال السابق) المسار في البيان:

$v_1, e_8, v_5, e_9, v_1, e_1, v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_5, v_4, e_4, v_4$

هو ممر.

يكون المسار [4]طريقاً إذا مررنا على أي عقدة مرة واحدة على الأكثر، عدا إمكانية المرور على عقدة [5]المنبع و[6]النهاية إذا كانتا نفس العقدة.

الطريق المغلق هو [7]دائرة. للتبسيط سنفرض في المستقبل أن الدائرة ليست خالية، أي طولها ≥ 1.

نعرف الطرق والدوائر ببيانات جزئية ناتجة عن أضلاعهما (مولدة من الأضلاع).

مثال: (مستمر من المثال السابق) المسار:

$v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_3$

هو طريق، والمسار:

$v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2$

هو دائرة.

المسار الذي يبدأ بـu وينتهي بـv يسمى u-v مسار.

تكون u,v [1]مرتبطتين إذا وجد u-v مسار في البيان (وعندها يوجد u-v طريق أيضاً). إذا كانت u,v مرتبطتين و v,w مرتبطتين فإن u,w مرتبطتان أيضاً، أي أنه إذا وجد u-v مسار و v-w مسار فيوجد u-w مسار أيضاً.

يكون البيان مترابطاً إذا كانت جميع عقده مرتبطة ببعضها. (البيان التافه يعتبر مترابطاً بالاتفاق).

مثال: البيان:

the walk

$v_2, e_7, v_5, e_8, v_1, e_8, v_5, e_6, v_4, e_5, v_4, e_5, v_4$

is open. On the other hand, the walk

$v_4, e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_7, v_5, e_6, v_4$

is closed.

A walk is a [1]*trail* if any edge is traversed [2]at most once. Then, the number of times that the vertex pair u, v can appear as [3]consecutive vertices in a trail is at most the number of parallel edges connecting u *and* v.

Example. *(Continuing from the previous example) The walk in the graph*

$v_1, e_8, v_5, e_9, v_1, e_1, v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_5, v_4, e_4, v_4$

is a trail.

A trail is a [4]*path* if any vertex is visited at most once except possibly [5]the initial and [6]terminal vertices when they are the same. A closed path is a [7]*circuit*. For simplicity, we will assume in the future that a circuit is not empty, i.e. its length ≥ 1.

We identify the paths and circuits with the subgraphs induced by their edges.

Example. *(Continuing from the previous example) The walk*

$v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_3$

is a path and the walk

$v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2$

is a circuit.

The walk starting at u and ending at v is called an $u-v$ *walk*. u *and* v are [1]*connected* if there is a $u-v$ walk in the graph (then there is also a $u-v$ path!). If u *and* v are connected and v *and* w are connected, then u *and* w are also connected, i.e. if there is a $u-v$ walk and a $v-w$ walk, then there is also a $u-w$ walk. A graph is *connected* if all the vertices are connected to each other.

(A trivial graph is connected by convention.)

Example. *The graph*

المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية

ليس مترابطاً.
البيان الجزئي G_1 (ليس بياناً صفرياً) للبيان G يكون مكوّناً[1] لـG إذا تحقق:
1. G_1 مترابط.
2. إما G_1 تافه (عقدة واحدة منعزلة من G) أو G_1 غير تافه وG_1 هو البيان الجزئي المولد بتلك الأضلاع من G التي تحوي عقدة طرف واحدة في G_1.
المكونات المختلفة للبيان نفسه لا تملك أي عقد مشتركة بسبب النظرية التالية:
نظرية 1.2: إذا كان البيان G يحوي عقدة v مرتبطة مع عقدة في المكون G_1 لـG فإن v عقدة في G_1 أيضاً.
الإثبات: إذا كانت v مرتبطة بالعقدة `v من G_1 عندها يوجد مسار في G:

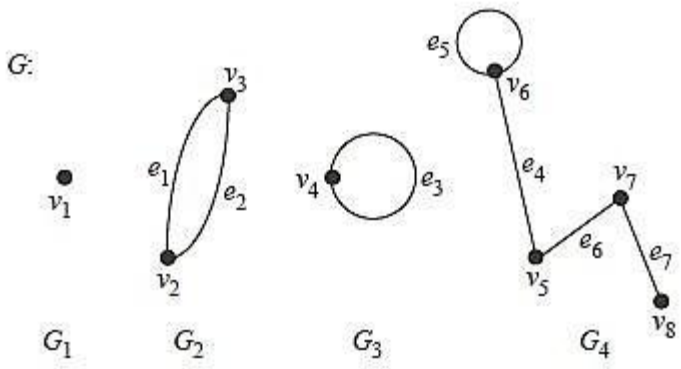
$$v = v_{i0}, e_{j1}, v_{i1}, \ldots, v_{ik-1}, e_{jk}, \quad v_{ik} = v'.$$

بما أن `v عقدة من G_1 فإن (حسب الشرط 2 أعلاه) e_{jk} ضلع في G_1 وv_{ik-1} عقدة في G_1. نكرر هذه العملية ونجد أن v عقدة في G_1.
مثال مكونات G هي G_1, G_2, G_3 و G_4

is not connected.
The subgraph G_1 (not a null graph) of the graph G is a [1]*component* of G if
1. G_1 is connected and
2. Either G_1 is trivial (one single isolated vertex of G) or G_1 is not trivial and G_1 is the subgraph induced by those edges of G that have one end vertex in G_1.
Different components of the same graph do not have any common vertices because of the following theorem.
Theorem 1.2. *If the graph G has a vertex v that is connected to a vertex of the component G_1 of G, then v is also a vertex of G_1.*
Proof. If v is connected to vertex v' of G_1, then there is a walk in G

$$v = v_{i0}, e_{j1}, v_{i1}, \ldots, v_{ik-1}, e_{jk}, \quad v_{ik} = v'.$$

Since v' is a vertex of G_1, then (condition #2 above) e_{jk} is an edge of G_1 *and* v_{ik-1} is a vertex of G_1. We continue this process and see that v is a vertex of G_1.
Example.
The components of G are G_1, G_2, G_3 and G_4.



Theorem 1.3. *Every vertex of G belongs to exactly one component of G. Similarly, every edge of G belongs to exactly one component of G.* -This divides a graph into distinct components -Every isolated vertex forms its own component. -A connected graph has only one component, namely, itself. - the *rank* of a graph G $\rho(G) = n - k$ with n vertices, n edges and k components.	**نظرية1.3** كل عقدة من G تنتمي تحديدا لمركبة واحدة فقط من G بشكل مشابه كل ضلع من G ينتمي تحديدا لمركبة واحدة فقط من G *-يقسم البيان الي مركبات متمايزة.* *-كل عقدة منعزلة تكون مركب خاص* *-بيان مترابط يملك مركب واحد فقط تحديدا نفسه* *-رتبة بيان G هي $\rho(G) = n - k$ حيث n العقد و m الاضلاع و k المركبات*

إعداد سماح علوان **تالا شوباصي

نصل لنهاية المقرر من اللغة الانكليزية العلمية ...يجب دراسة المقرر بشكل علمي والانتباه للترجمة واحرف الجر والمفرادت

المكتبة الجامعية للخدمات الطلابية
تطلب ورقياً من المكتبة الجامعية