نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: السابعة عشر ◄ عنوان المحاضرة: تكاملات أولر

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـخواص التكامل البتاوي.

٢ـتكاملات أولر من النوع الثاني (التكامل الغماوي).

٣ـ خواص التكامل الغماوي.

٤ـالعلاقة بين البتاوي و الغماوي .

التكامل البتاوي : $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

## خواص التكامل البتاوي:

### ١) خاصة التناظر:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

بتغيير المتحول:

$$t = 1 - x \Rightarrow x = 1 - t$$

$$dt = -dx$$

وبتغيير حدود التكامل:

$$x = 0 \Rightarrow t = 1 \quad , \quad x = 1 \Rightarrow t = 0$$

والآن نعوض

$$B(p,q) = -\int_1^0 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt = B(q,p)$$

$$\Rightarrow \boxed{B(p,q) = B(q,p)}$$

## ٢) خاصية تغيير الوسيط:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

لكن نلاحظ أن $x^{p-1}dx = d\left(\frac{x^p}{p}\right)$ فالتكامل البيتاوي يكتب بالشكل :

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{q-1}\,d\frac{x^p}{p}$$

نكامل بالتجزئة:

بفرض $u = (1-x)^{q-1} \Leftarrow du = -(q-1)(1-x)^{q-2}$

$$v = \frac{x^p}{p} \Leftarrow dv = d\frac{x^p}{p}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^{q-1}\,d\frac{x^p}{p} = \left[(1-x)^{q-1}.\frac{x^p}{p}\right]_0^1 + \frac{q-1}{p}\int_0^{1^-} x^p(1-x)^{q-2}\,dx$$

نلاحظ أن $\left[(1-x)^{q-1}.\frac{x^p}{p}\right]_0^1 = 0$

ومنه:

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{q-1}\,d\frac{x^p}{p} = \frac{q-1}{p}\int_0^{1^-} x^p(1-x)^{q-2}\,dx$$

في الحقيقية يمكن أن نكتب ما يلي:

$$x^p = x^{p-1} - x^{p-1} + x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$$

نعوض بالتكامل:

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\,dx - \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p}[B(p,q-1)-B(p,q)]$$

$$B(p,q)+\frac{q-1}{p}B(p,q)=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)$$

بإخراج $B(p,q)$ عامل مشترك من اليسار

$$B(p,q)\left(1+\frac{q-1}{p}\right)=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)$$

$$\frac{p+q-1}{p}B(p,q)=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{p}{p+q-1}$ فنجد :

$$\boxed{B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)}$$

نطبق نفس الدستور لحساب $B(p,q-1)$ فنجد:

$$B(q,p)=\frac{q-1}{p+q-1}\cdot\frac{q-2}{p+q-2}.B(p,q-2)$$

بالمتابعة و بوضع $p=m$ و $q=n$ (حيث $n,m$ أعداد طبيعية) نصل إلى أن :

$$B(m,n)=\frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{n-2}{m+n-2}\dots\frac{1}{m+1}B(m,1)\dots(*)$$

و لكن:

$$B(m,1)=\int_0^1 x^{m-1}\,dx=\left[\frac{x^m}{m}\right]_0^1=\frac{1}{m}$$

نعوض في $(*)$:

$$(m,n)=\frac{(n-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\dots(m+1)m}$$

لنضرب البسط و المقام بـ$(m-1)!$

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)+(m+n-2)\ldots m(m-1)!}$$

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

ومنه:

$$B(p,q)=\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

### ٣) خاصية تغيير المتحول:

نفرض $x=\frac{y}{1+y}$

$$dx=\frac{1+y-y}{(1+y)^2}=\frac{1}{(1+y)^2}$$

$$1-x=1-\frac{y}{1+y}=\frac{1+y-y}{1+y}=\frac{1}{1+y}$$

كما نقوم بتغيير حدود التكامل لأننا قمنا بتغيير المتحول:

$$x=0\Longrightarrow y=0$$

$$x=1\Longrightarrow y\longrightarrow\infty$$

$$B(p,q)=\int_0^\infty\left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1}.\left(\frac{1}{1+y}\right)^{q-1}.\frac{1}{(1+y)^2}\,dy$$

$$\boxed{B(p,q)=\int_0^\infty\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy}$$

حفظ

و هو تكامل معتل من النوع الأول وللتكامل قيمة فقط عندما $q=1-p$ أي $p+q=1$

وقيمته هي:

حفظ $B(p\,,1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$ حيث $1>p>0$

**مثال:**

$$B\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi$$

### ٤) الشكل المثلثي للتكامل البتاوي:

نضع $x=\cos^2\varphi \Leftarrow dx=-2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$

نغير حدود التكامل:

$$x=0\Longrightarrow\varphi=0$$

$$x=1\Longrightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$1-\mathrm{x}=1-\cos^2\varphi=\sin^2\varphi$$

نعوض بالتكامل:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx$$

فيصبح:

$$B(p,q)=-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^{2p-1}\varphi\;\sin^{2q-1}\varphi\;d\varphi$$

حفظ

$$\Longrightarrow B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\,.\sin^{2q-1}\varphi\;d\varphi$$

## تكامل أولر من النوع الثاني: التكامل الغماوي

يعرف تكامل أولر من النوع الثاني والذي رمزه $\Gamma(p)$ بأنه التكامل المعتل:

$$\Gamma(p) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-x}.x^{p-1}\,dx$$

وهو يمثل تابعاً يتعلق بوسيط واحد (أي يتبع لمتغير واحد) هو $p$
ويسمى هذا التكامل بالتكامل الغماوي يكتب اختصاراً بالشكل:

$$\Gamma(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-x}.x^{p-1}\,dx$$

وتجدر الإشارة إلى أن هذا التكامل لا يكون موجوداً إلا إذا كان $p > 0$
وذلك بملاحظة الآتي:

$$\Gamma(p) = \underbrace{\int_{0^+}^{1} e^{-x}.x^{p-1}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} e^{-x}.x^{p-1}\,dx}_{I_2}$$

حيث التكامل $I_2$ موجود دوماً مهما يكن $p$ بينما $I_1$ يمثل تكاملاً معتلاً من النوع الأول عندما $p-1<0$ وهو موجود $p>0$.

**بعض خواص التكامل الغماوي:**

**1) تكامل بالتجزئة:** $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}.x^{p-1}\,dt$

بفرض: $u = e^{-x} \Leftarrow du = -e^{-x}\,dt$ , $dv = x^{p-1}\,dt \Leftarrow v = \frac{x^p}{p}$

$$\Gamma(p) = [u.v]_0^\infty - \int_0^\infty v\,du$$

$$\Gamma(p) = \left[e^{-x}.\frac{x^p}{p}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}.\frac{x^p}{p}\,dt$$

$$\Gamma(p) = \left[e^{-x}.\frac{x^p}{p}\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x}.x^p\,dt$$

إلا أن: $\left[e^{-x}.\frac{x^p}{p}\right]_0^\infty = \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-b}b^p}{p} = 0$

$$\Rightarrow \Gamma(p) = \underbrace{\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x}.x^p\,dt}_{\Gamma(p+1)}$$

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\Gamma(p+1)$$

$$\boxed{\Rightarrow \Gamma(p+1) = p\Gamma(p)}$$

و إننا لو كررنا العملية السابقة عدداً منتهياً من المرات سنحصل على :

$$\boxed{\Gamma(p+1) = p(p-1)(p-2)\dots(p-n)\ \ \Gamma(p-n)}$$

نأخذ $p$ قيمة بين عددين طبيعيين متتاليين:

$$n < p < n+1$$
$$\Rightarrow 0 < p - n < 1$$

و لنناقش حالة إذا كان $n = p$ عدد صحيح موجب ، فحسب ما سبق يكون :

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\dots 2.1.\Gamma(1)$$

إلا أن:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dt = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$$

$$\boxed{\Rightarrow \Gamma(n+1) = n!}$$

## العلاقة بين التكامل الغماوي و البتاوي:

**مبرهنة:**

إذا كان $p , q$ عددين موجبين فإن التكامل البتاوي :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

((إذا أردت أن تعيش حياة سعيدة ، اربطها بهدف وليس بأشخاص وأشياء و ... )) اينشتاين

**انتهت المحاضرة**

إعداد: وفاء شيخ سالم – باسل أبو عيسى – ناريمان جلو