نظري

◄ دكتور المادة: علي قبوي

◄ المحاضرة: السادسة ◄ عنوان المحاضرة: خواص الاستمرار

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١- برهان إحدى خواص الاحتمال.
٢- مبرهنات هامة.
٣- خاصية الاستمرار من الأعلى و الأدنى.
٤- خاصية الاستمرار للقياس الاحتمالي.

خاصة:

إذا كانت $A_1, A_2, A_3 \in F$ أحداث من F فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3)$$
$$-P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

البرهان:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = P[A_1 \cup (A_2 \cup A_3)] \in F$$

و لنفرض أَنَّ $A_2 \cup A_3 = A_4$

$$= P(A_1) + P(A_4) - P(A_1 \cap A_4)$$

$$= P(A_1) + \underbrace{[P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3)]}_{P(A_4)} - P(A_1 \cap (A_2 \cup A_3))$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - [P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)$$
$$- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)]$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

و يمكن تعميمها من أجل n حدث و لكن سنكتفي بهذا المثال

$$(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3) = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

متباينات((متراجحات احتمالية))

وجدنا أنَّ

$$P(A_1 \cup A_2) = \underbrace{P(A_1)}_{\geq 0} + \underbrace{P(A_2)}_{\geq 0} - \underbrace{P(A_1 \cap A_2)}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

مبرهنة (هامة)

إذا كانت $A_1, A_2, \dots \dots$ متتالية معدودة من الأحداث F عندئذ فإن :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

◄ **البرهان :** نشكل الأحداث التالية : $B_1 = A_1$

$$B_2 = A_2 \backslash A_1 = A_2 \cap A`_1$$

$$B_3 = A_3 \backslash (A_1 \cup A_2) = A_3 \cap A`_1 \cap A`_2$$

$$\vdots$$

$$B_n = A_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = A_n \cap A`_1 \cap A`_2 \cap \dots \dots \cap A`_{n-1}$$

عندئذ نلاحظ أن الأحداث $(B_i)_{i\geq 1}$ متنافية مثنى مثنى وأن :

$$B_i \subseteq A_i \qquad i \geq 1$$

$$\bigcup_{i\ge 1} B_i = \bigcup_{i\ge 1} A_i$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i\ge 1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i\ge 1} B_i\right) = \sum_{i\ge 1} P(B_i)$$

وبما أن: $B_i \subseteq A_i \quad \Leftarrow$

حسب خواص الاحتمال الرئيسية :

$$\Rightarrow \sum_{i\ge 1} P(B_i) \le \sum_{i\ge 1} P(A_i)$$

فنجد أن :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

مبرهنة

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ge 1 - \sum_{n\ge 1}^{\infty} P(A`_n)$$

◀البرهان :

$$P\left(\bigcap_{i\ge 1} A_i\right) = 1 - \underbrace{P\left(\bigcap_{n\ge 1}^{\infty} A_n\right)' = 1}_{\text{حسب دومورغان}} - P\left(\bigcup_{n\ge 1}^{\infty} A`_n\right)$$

حسب مبرهنة سابقة :

$$P\left(\bigcup_{n\ge 1}^{\infty} A`_n\right) \le \sum_{n\ge 1}^{\infty} P(A`_n)$$

نضرب بإشارة (-) فتقلب إشارة المتراجحة ثم نجمع للطرفين (١) :

$$\Rightarrow -P\left(\bigcup_{n\ge 1}^{\infty} A`_n\right) \ge -\sum_{n\ge 1}^{\infty} A`_n \Rightarrow 1 - P\left(\bigcup_{n\ge 1}^{\infty} A`_n\right) \ge 1 - \sum_{n\ge 1}^{\infty} A`_n$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n\geq 1}^{\infty} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n\geq 1}^{\infty} P(A`_n)$$

تعريف:

نقول عن متتالية من الأحداث $(A_n)_{n\geq 1}$ من F أنها مطردة إذا كانت غير متناقصة أي

$$(A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_n \ldots .)$$

أو غير متزايدة $(A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \ldots \ldots)$

و نهايتها حدث من F أي أن:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n \ \in F$$

مبرهنة الاطراد المتزايد ((هامة ودورة سابقة))

لتكن $A_1, A_2, \ldots \ldots, A_n, \ldots.$ متتالية من الأحداث F غير متناقصة (متزايدة)من أحداث F أي أن:

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ وكان $A_i = \cup A_{n\geq 1}$ عندئذ يمكننا أن نكتب

$$\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \ldots . \cup A_n \cup \ldots.$$

$$= A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash A_2) \ldots \cup (A_n \backslash A_{n-1}) \ldots ..$$

و سبب تنافي هذه الأحداث $A_1, \{A_n \backslash A_{n-1}\}_{n\geq 2}$ فإن

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

((تدعى خاصية الاستمرار من الأدنى))

البرهان

بما ان المتتالية A_n غير متناقصة فإن:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_n$$

فيمكن كتابة $\bigcup_{n\geq1} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$

$$= A_1 \cup (A_2\backslash A_1) \cup (A_3\backslash A_2) \cup \ldots\ldots \cup (A_n\backslash A_{n-1}) \cup \ldots$$

بما أن الأحداث : $\{A_n\backslash A_{n-1}\}_{n\geq1}$ متنافية مثنى مثنى ومنه :

$$P\left(\bigcup_{n\geq1}^{\infty} A_n\right) = P(A_1) + P(A_2\backslash A_1) + \cdots + P(A_n\backslash A_{n-1}) + \cdots$$

بما أن : $= \lim_{n\to\infty}[P(A) + P(A_2\backslash A_1) + \cdots + P(A_n\backslash A_{n-1}) + \cdots]$

$$= \lim_{n\to\infty}[P(A_1 \cup (A_2\backslash A_1) \cup (A_3\backslash A_2) \ldots\ldots \cup (A_n\backslash A_{n-1}) \ldots)]$$

ولكن لدينا : $A_n = A_1 \cup (A_2\backslash A_1) \cup \ldots\ldots \cup (A_n\backslash A_{n-1})$

وبالتالي نجد أن : $\Rightarrow P(\bigcup_{n\geq1} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

ملاحظة:

في حال المتتالية المطردة غير المتناقصة يكون

$$\Rightarrow \bigcup_{n\geq1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$$

حسب المبرهنة $\Rightarrow P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

تدعى خاصية الاستمرار للقياس الاحتمالي الجمعي التام.

مبرهنة الاطراد المتناقص ((هامة ودورة سابقة))

لتكن $\{A_n\}_{n\geq1}$ متتالية غير متزايدة باطراد (متناقصة) من احداث F اي ان :

$(A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \ldots\ldots)$ وكان $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ فإن :

$$P(\bigcap_{n\geq1} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

((تدعى خاصية الاستمرار من الاعلى))

البرهان

بما ان المتتالية A_n غير متزايدة فإن متممات (A'_n) ستكون غير متناقصة اي

$$(A'_1 \subseteq A'_2 \subseteq \cdots A'_n \dots)$$

وبالتالي حسب المبرهنة السابقة ((الاطراد المتزايد)) فإن :

$$\lim_{n\to\infty} P(A'_n) = P(\cup_{n\geq 1} A'_n) \dots\dots\dots (*)$$

ولكن حسب قانون دومورغان : $(\cup_{n=1}^{\infty} A'_n) = (\cap_{n=1}^{\infty} A_n)'$

$$P(\cup_{n\geq 1}^{\infty} A'_n) = P(\cap_{n\geq 1}^{\infty} A_n)' = 1 - P(\cap_{n\geq 1}^{\infty} A_n) \dots\dots (1)$$

$$P(A'_n) = 1 - P(A_n) \dots\dots (2)$$

نعوض كل من (1) و (2) في $((*))$ فنجد ...

$$1 - P(\cap_{n\geq 1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}[1 - P(A_n)] = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

$$\Rightarrow P(\cap_{n\geq 1} A_2) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

ملاحظة:

في حالة متتالية غير متزايدة $(A_n)_{n\geq 1}$ من الأحداث F يكون

$$\bigcap_{n\geq 1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$$

و يكون حسب مبرهنة الاطراد المتناقص

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

خاصية الاستمرار للقياس الاحتمالي

إذا كانت $(A_n)_{n\geq 1}$ متتالية مطردة ((متزايدة او متناقصة باطراد)) من احداث F فإن :

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

تتحقق هذه المساواة فقط في حالة الاستمرار.

مبرهنة التكافؤ في النهايات في الاحتمالات ((البرهان غير مطلوب ولله الحمد))

ليكن لدينا (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً عندئذٍ الشروط الأربعة التالية متكافئة:

١) قياس احتمالي جمعي تام اي اذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الاحداث متنافية مثنى مثنى من F فإن :

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

٢) إذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية غير متناقصة من F فإن :

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

٣) إذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية غير متزايدة من احداث F فإن :

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

٤) إذا كانت $\{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية غير متزايدة ((متناقصة)) من احداث F وكان $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ فإن :

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

انتهت المحاضرة

إعداد: خديجة الرفاعي – ولاء المبخر – لهى حبشية

Be Happy