نظري

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄ المحاضرة: الثالثة عشر عنوان المحاضرة: الفضاءات المنظمة

الفصل الثاني : الفضاءات المنظمة

درسنا في الفصل الأول الفضاءات المترية ولقد رأينا أنها عبارة عن مجموعة غير خالية معرف عليها مترك فإذا أخذنا فضاء متجهي وعرفنا عليه متركاً فإننا سنحصل على الفضاء المنظم وهذا ما سنتعرف عليه ....

تذكرة :

١ ـ **الفضاء المتجهي :** هو مجموعة X غير خالية من العناصر x, y التي تدعى أحيانا متجهات ومزودة بعمليتين :

١ عملية داخلية : تسمى الجمع ويرمز لها (+) .
٢ – عملية خارجية : تسمى الضرب بعدد حقيقي (.) أو عقدي .

حيث أن عملية الجمع (+) (أو الجمع المتجهي) تحقق المساواة التالية :

١ $\forall x, y \in X \quad : x + y \in X$

٢ $\forall x, y, z \in X : x + (y + z) = (x + y) + z$ التجميعية

٣ $\forall x, y \in X \quad : \quad x + y = y + x$ التبديلية

٤ $\forall x \in X \quad : x + 0 = 0 + x = x$ الحيادي

٥ $\forall x \in X \,;\, \exists(-x) \in X \quad : \quad x + (-x) = 0$ النظير

أما لعملية الضرب ليكن الحقل K مجموعة مؤثرات هذا الفضاء فإن عملية الضرب هذه يجب أن تحقق المساواة التالية :

١- $\forall a \in K \;;\; \forall x \in X \;: a.x \in X$

٢- $\forall a, b \in K \;;\; \forall x \in X : (a.b).x = a(b.x)$

٣-الضرب توزيعي على الجمع من اليمين واليسار :

$$\forall a \in K \; ; \; \forall x, y \in X \; : a(x+y) = a.x + a.x$$

٤- $\forall a, b \in K \; ; \; \forall x \in X : (a+b).x = a.x + b.x$

٥-الحيادي $\forall 1_k \in K \; ; \; \forall x \in X : 1_k.x = x$

إذا كان $K = R$ تدعى X فضاء متجهي حقيقي .

إذا كان $K = \mathbb{C}$ تدعى X فضاء متجهي عقدي .

٢ - **تعريف التراكيب الخطية للمتجهات :** لتكن $x_1, x_2, \dots\dots, x_n$ من الفضاء المتجهي X.

هي عبارة من الشكل $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$

حيث $a_1, a_2.., a_n$ معاملات ((أعداد وأمثال)).

الاستقلال الخطي والارتباط الخطي :

يعرف الاستقلال الخطي والارتباط الخطي لمجموعة M من المتجهات $x_1, x_2, \dots\dots, x_n$ في فضاء متجهي X عن طريق المعادلة :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

حيث $a_1, a_2.., a_n$ معاملات ((أعداد وأمثال)).

عندئذ فإننا نميز حالتين :

١- إذا كانت جميع المعاملات أصفاراً حيث : $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n=0}$ عندها تكون المجموعة M مستقلة خطياً ((هندسياً : الأشعة المتعامدة مستقلة خطياً))

٢- إذا كانت أحد الأمثال على الأقل لا يساوي الصفر عندها تكون M مرتبطة خطياً أي أن الأعداد $a_1, a_2.., a_n$ ليست جميعها أصفاراً ((هندسيا : الأشعة المتوازية مرتبطة خطيا))

ملاحظة :

١- إذا وجد المتجهة الصفرية في المجموعة M فتكون المجموعة مرتبطة خطياً .
٢- إذا وجد متجهة واحدة على الأقل في المجموعة M يكتب على شكل تراكيب خطية للمتجهات الأخرى عندئذ تكون M مرتبطة خطياً .

أبعاد الفضاء المتجهي :

يوجد لدينا قسمين من الفضاءات المتجهة :

١ – فضاءات متجهة منتهية البعد :

مثال على ذلك $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}^2$ وبعد كل منها يساوي n وأيضاً p فضاء كثيرات الحدود منته الأبعاد من الدرجة n

٢ – فضاءات متجهية غير منتهية البعد :

مثال على ذلك الفضاء $c[a,b]$, ℓ^2 وفضاء كثيرات الحدود غير منتهية البعد .

قاعدة الفضاء المتجهي :

هي عبارة عن جملة من الأشعة المستقلة خطياً التي تولد الفضاء وعدد عناصر هذه القاعدة يساوي بعد الفضاء .

مثلاً:

١- الفضاء $\mathbb{R}^2$ هو فضاء شعاعي مولد بالقاعدة : $w = \{(1,0),(0,1)\}$ حيث أن الشعاعين $(1,0),(0,1)$ مستقلين خطياً وبعد $\mathbb{R}^2$ يساوي عدد عناصر القاعدة : $\dim\mathbb{R}^2 = 2$.
٢- الفضاء $\mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي مولد بالقاعدة $w = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ حيث أن الأشعة مستقلة خطياً وبعد $\mathbb{R}^3$ يساوي عدد عناصر القاعدة $dim\mathbb{R}^3 = 3$.

إن أي حدود من أي درجة يكتب بدلالة القاعدة $\{1, x, x^2, x^3 \dots, x^n\}$

إذا كان لدينا $\dim X = n$ وكانت $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ قاعدة ل X فإنه يوجد لكل $x \epsilon X$ تمثيل وحيد على شكل تركيب خطي لمتجهات القاعدة :

$$x = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots \dots \dots . \dots + a_ne_n$$

ملاحظة :

يوجد لكل فضاء شعاعي عدد غير منته من القواعد ولكن جميع هذه القواعد تحقق بأن لها عدد العناصر نفسه .

الفضاء المتجهي الجزئي :

يعرف الفضاء المتجهي الجزئي في X هو مجموعة جزئية غير خالية Y من X حيث يحقق أنه أياً كان $\forall y_1, y_2 \in y$ وأيا كان العددان $(\alpha, \beta \in K)$ فإن : $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$

لذلك فإن Y هو نفسه الفضاء متجهي عملياته هما مقصور العمليتين المعرفتين على X .

إن كلاً من X و $\{0\}$ هي فضاء عناصرها من X

حيث يسمى X فضاء جزئي غير فعلي ويسمى كل فضاء جزئي من X ولا يساوي $X \neq 0$ بفضاء جزئي فعلي .

أمثلة عن الفضاء المتجهي :

١ – إن الفضاءات المتجهية في $\mathbb{R}^2$ هي كل المتجهات التي تمر من النقطة $(0,0)$.

٢ – نقول عن الفضاء $c[a,b]$ أنه فضاء متجهي إذا كان كل نقطة من هذا الفضاء هي دالة حقيقية مستمرة على $[a,b]$ وكانت كل هذه الدوال مزودة بعمليتين جزئيتين معرفتين بالشكل التالي :

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$$

$$(ax)(t) = ax(t) \qquad : a \in R$$

عندئذ يشكل فضاء متجهي حقيقي وإذا لم تتحقق الشروط فهو ليس فضاء متجهي .

مبرهنة بعد الفضاء الجزئي :

إذا كان X فضاء متجهي بعده n فإن لكل فضاء جزئي فعلي Y من X بعداً أصغر من n

الإثبات :

١ – إذا كان $n = 0$ أي $\dim X = 0$ ← $x = \{0\}$ الفضاء الصفري في هذه الحالة ليس لهذا الفضاء فضاء جزئي فعلي ((لكن له فضاء جزئي هو الفضاء نفسه)) ويتم المطلوب .

٢ – إذا كان $\dim Y = 0$ فإن $y = \{0\}$ وبالتالي $x \neq y$ وكون Y هو فضاء جزئي فعلي من X فإنه يوجد على الأقل عنصر من X لا ينتمي إلى Y أي أنه :

$$\dim X \geq 1$$

$$\dim y = 0 \Rightarrow \dim Y \leq \dim X = n$$

٣ – لنفرض أن $\dim Y = n$ في هذه الحالة يتطابق الفضاءان لأنه لدينا تعريفاً كون Y جزئي من X فإن $y \subseteq x$ وأيضاً لو أخذنا $x \in X$ فإن كون X فضاء شعاعي فإن X يكتب على شكل تركيب بدلالة n عنصر مستقل إذن $x \subseteq Y$ أي أن $X = Y$

وهذا مرفوض لأن Y فضاء جزئي فعلي من X أي يوجد على الأقل عنصر موجود في X ليس موجود في Y ومما سبق نستنتج أن :

$$\dim Y < n$$

يتم المطلوب .

تعريف دالة النظيم والفضاء المنظم :

ليكن لدينا X فضاء متجهي ولنعرف عليه الدالة التالية $||.||$ بالشكل :

$$||.|| \to X \to R$$

$$x \to ||x||$$

فإنه $\forall x, y \in X$ إذا حققت هذه الدالة الشروط التالة :

$$1 - ||x|| \geq 0$$

$$2 - ||x|| = 0_R \Leftrightarrow x = 0_R$$

$$3 - ||\alpha . x|| = |\alpha| . ||x|| \ ; \alpha \in K$$

$$4 - ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

عندها نقول أن هي دالة$||.||$ نظيم ويدعى الفضاء المتجهي المزود بهذه الدالة بالفضاء المنظم $x = (x, ||.||)$.

ملاحظة هامة :

١ – لابد من التأكد على أنه لا يمكننا تعريف دالة النظيم إلا على فضاء متجهي (شعاعي)وأن الفضاءات التي درسناها سابقاً هي فضاءات شعاعية يمكن تعريف النظيم عليها .

٢ – كل فضاء منظم هو فضاء متري لكن العكس غير صحيح بالضرورة بمعنى أخر ☹)) كل نظيم يولد مترك ولكن ليس كل مترك يولد نظيم)) أي أن $d(x, y) = ||x - y||$

ويسمى هذا المترك : المترك المولد بالنظيم .

))وإن d حتماً موجود كون $||x - y||$ موجود حيث إنه معرف على فضاء شعاعي ((

ولنثبت أن d هو تابع مسافة أي تحقق الشروط التالية :

$$1 - ||x - y|| \geq 0 \text{((تحقق حسب تعريف النظيم))}$$

$$2 - d(x, y) = 0 \Leftrightarrow ||x - y|| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$3 - d(x, y) = ||x - y|| = ||(-1)(y - x)|| = |-1| ||y - x|| = ||y - x||$$

$$4 - d(x,y) = ||x-y|| = ||x-z+z-y|| \leq ||x-z|| + ||z-y|| = d(x,z) + d(z,y) \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

مما سبق نجد ان الشروط الأربعة محققة ومنه d مترك .

وبالتالي أثبتنا أن كل نظيم يولد مترك وفق المساواة السابقة .

تمرين :

ليكن لدينا الفضاء المتجهي $c[a,b]$ ولنعرف عليه الدالة التالة : $||.||: c[a,b] \to \mathrm{R}$

$$x \to ||X|| = \max|x(t)| \quad ; a \leq t \leq b$$

وإن الفضاء $c[a,b]$ مزود بعمليتين التاليتين :

$$\forall x, y \in c[a,b] :$$

$$1 - (x+y)(t) = x(t) + y(t)$$

$$2 - (\alpha . x)(t) = \alpha(x)(t) \quad ; \ \alpha \in R$$

أثبت أن $(c[a,b], +, .)$ فضاء منظم .

الحل :

لكي نثبت أن $(c[a,b], +, .)$ أنه فضاء منظم يجب علينا أن نثبت أن الدالة $||.||$ المعرفة عليه هي دالة نظيم وتحقق الشروط الأربعةعلماً أن $c[a,b]$ فضاء متجهي (شعاعي) .

$$1 - ||x|| = \max|x(t)| \geq 0$$

((وضوحاً كون القيمة المطلقة موجبة دوماً))

$$2 - ||x|| = 0_R \Leftrightarrow \max|x(t)| = 0 \Leftrightarrow |x(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0$$

أياً كان $t \in [a,b]$ فإن الدالة x ستصور النقطة t بالصفر إذاً x هي الدالة $x = 0_x$

$$3 - ||\alpha.x|| = \max|(\alpha.x)(t)| = \max|\alpha.(x)(t)| = \max|\alpha|\,|x(t)|$$

كون $|\alpha|$ عدد حقيقي ثابت نستطيع إخراجه

$$= |\alpha| \max|x(t)| = |\alpha|||x(t)||$$ وبالتالي محقق

$$4 - ||x + y|| = \max|(x + y)(t)| = \max|x(t) + y(t)|$$

$$|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)|$$

وحسب خواص القيمة المطلقة :

$$x(t) \leq \max|x(t)|$$

$$y(t) \leq \max|y(t)|$$

$$\Longrightarrow |x(t) + y(t)| \leq \max|x(t)| + \max|y(t)|$$

أي أن الطرف الأيمن يمثل حد أعلى للطرف الأيسر ولكن $\sup|x(t) + y(t)|$ هو أصغر الحدود العليا وبما أن المجال مغلق وال sup ينطبق على max يكون لدينا :

$$\max|(x + y)(t)| \leq \max|x(t)| + \max|y(t)|$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

وبالتالي محقق.

وبذلك نلاحظ أن الشروط محققة إذاً $||.||$ هي دالة نظيم وإن $(c[a,b], +, .)$ هو فضاء منظم .

ملاحظة :

إن الفضاءات المنظمة هي حالة خاصة من الفضاءات المترية

سؤال:

استنتج الخاصة التالية : $\big|\,\|x+y\|\,\big| \le \|x-y\|$ استناداً على متباينة المثلث في خواص النظيم
$((\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|))$

الحل :

$$x = x - y \Rightarrow \|x\| = \|x+y-y\| \Rightarrow \|x\| \le \|y\| + \|x-y\|$$
$$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \le \|x-y\| \qquad \dots\dots 1$$

ومن جهة أخرى :

$$y = y + x - x \Rightarrow \|y\| = \|y+x-x\| \Rightarrow \|y\| \le \|x\| + \|y-x\|$$
$$\Rightarrow \|y\| - \|x\| \le \|y-x\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \le \|x-y\| \dots\dots 2$$

من ١ و٢ نجد أن :

$$\big|\,\|x+y\|\,\big| \le \|x-y\|$$

مبرهنة :

إن النظيم هو تطبيق مستمر أي أن : $\|x\| \mapsto x$ هو تطبيق مستمر للفضاء $(X, \|.\|)$ في R .

إن دالة النظيم هي دالة مستمرة على ساحة التعريف دوماً .

تذكرة :

نقول عن المجموعة أنها مستمرة إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من تقاطعها .

تمرين :

أثبت أن دالة المعرفة كالتالي :

$$||.||: X \longrightarrow R^*$$

$$x \longmapsto ||x||$$

هي دالة مستمرة (بلغة ε , δ)

الحل :

لتكن الدالة $||.||$ مستمرة عند النقطة $x_0 \in x$ من ساحة التعريف في R يجب أن يتحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0 \, ; \exists \delta = \varepsilon : ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow \Big| ||x|| - ||x_0|| \Big| \leq ||x - x_0|| < \delta = \varepsilon$$

ويتم المطلوب بالاعتماد على الخاصة: $\Big| ||x|| - ||x_0|| \Big| \leq ||x - y||$

الفضاء المنظم يقسم إلى قسمين :

١ – الفضاء المنظم التام .

٢ – الفضاء المنظم غير التام .

الفضاء المنظم التام :

(هو فضاءباناخ) ونقول عن فضاء منظم أنه تام إذا كان تاماً بخصوص المترك المولد من هذا النظيم ((لأن كل نظيم يولد مترك))

الأمثلة :

$\ell^{p}, \ell^{\infty}, R^n$ تام بخصوص المترك الإقليدي المعرف عليها .

وكذلك $c[a, b]$ تام بخصوص المترك :

$$d(a,b) = max|x(t) - y(t)| \qquad a \le t \le b$$

الفضاء المنظم غير التام :

نقول عن فضاء منظم أنه غير تام إذا كان غير تام بخصوص المترك المولد من هذا النظيم عندهانقول عن الفضاء أنه غير تام .

الأمثلة :الفضاء $c[a,b]$ غير تام بخصوص المترك :

$$d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, d(t)$$

ملاحظة :

لابد من الإشارة إلى أن كل فضاء منظم غير تام يمكن إتمامه كما في الفضاءات المترية غير تامة .

تعريف المجموعة المحدبة :

نقول عن مجموعة A جزئية من فضاء متجهي X إنها محدبة إذا اقتضى وقوع أي نقطتين من x, y من A تحقق العلاقة :

$$M = \{z \in X\,; z = ax + (1-a)y \quad : 0 \le a \le 1\} \subset A$$

تدعى M قطعة مستقيمة مغلقة حداها النقطتان x, y وتدعى كل نقطة أخرى من نقطة Z داخلية في M .

انتهت المحاضرة

إعداد : بسمة نصر الله ، تقى إسماعيل ، رشا القرصة