◄ دكتور المادة: علي القبوي

◄ المحاضرة العاشرة   عنوان المحاضرة : الاستقلال الاحتمالي

سوف نطرح في هذه المحاضرة مجموعة من التمارين :

تمرين (1) يخطط شخص لقضاء عطلة في إحدى المناطق السياحية a, b, c ، ويأخذ بالاختيار كما يلي : يقذف حجر النرد فإذا حصل على عدد زوجي يزور المنطقة a وإذا حصل على عدد فردي يقذف قطعة نقود ،ويزور المنطقة b إذا حصل على الصورة (H) ويزور المنطقة c إذا حصل على الكتابة (T) .

فإذا علمت أنَّ احتمال هطول المطر في كلِّ المناطق هو على الترتيب : 0.2 , 0.4 , 0.3 ، وعندما عاد هذا الشخص وجد الوحل على عجلات سيارته ، فما احتمال أنه زار المنطقة a

الحل

بفرض أنَّ : H_1: الحدث الدال على أنَّ الشخص زار المنطقة a .

H_2 : الحدث الدال على أنَّ الشخص زار المنطقة b .

H_3 : الحدث الدال على أنَّ الشخص زار المنطقة c .

نلاحظ أنَّ الأحداث H_1 و H_2 و H_3 تشكل تجزئة لِ Ω الممثل لزيارة الشخص إحدى المناطق a, b, c

((**يجب التأكد دائماً أنَّ مجموع الاحتمالات تساوي الواحد**))

فإذا كان A الحدث الدال على أنَّ نتيجة حجر النرد زوجي فيكون: $\underbrace{P(A)}_{\text{زوجي}} = \underbrace{P(A')}_{\text{فردي}} = \frac{1}{2}$

وبالتالي سيكون : $P(H_1) = P(A) = \frac{1}{2}$

وإذا كان B الحدث الدال على أنَّ نتيجة رمي قطعة النقود صورة فإنَّ : $\underbrace{P(B)}_{\text{صورة}} = \underbrace{P(B')}_{\text{كتابة}} = \frac{1}{2}$

وبالتالي سيكون : $P(H_2) = P(A' \cap B) = P(A').P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

واحتمال أن يزور المنطقة c (وقوع H_3) إذا كان رمي قطعة نقود كتابة أي وقوع B' .

$$P(H_3) = P(A' \cap B') = P(A').P(B') = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

للتأكد نلاحظ أنَّ : $\quad P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad$ فهي محققة .

إذا دلَّ D على هطول المطر فإنَّه حسب قاعدة الاحتمال المركب يكون :

$$P(D) = P(H_1).P_{H_1}(D) + P(H_2).P_{H_2}(D) + P(H_3).P_{H_3}(D)$$

حيث أنَّ : $\quad P_{H_1}(D) = 0.3 \ , \ P_{H_2}(D) = 0.4 \ , \ P_{H_3}(D) = 0.2$

وحسب دستور بايز فإنَّ : $\quad P_D(H_1) = \frac{P(H_1).P_{H_1}(D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{2}\times 0.3}{0.3} = \frac{1}{2}$

و هو احتمال زيارة المنطقة a كلما هطلت المطر .

تمرين (٢) يحوي كيس 4 كرات بيضاء و3 سوداء ، ويحوي كيس آخر 3 كرات بيضاء و5 كرات سوداء ، سحبت كرتان من الكيس الأول ووضعتا في الكيس الثاني ، سحبت بعد ذلك كرة من الكيس الثاني والمطلوب : ١) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء .

٢) استنتج من الطلب السابق احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء .

٣) إذا علمت أن الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء ، فما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من الكيس الأول من لونين مختلفين .

الحل : بفرض أنَّ :

كيس 2	كيس 1
3 بيضاء	4 بيضاء
5 سوداء	3 سوداء
8 كرات	7 كرات

H_1 الحدث الدال على أنَّ الكرتان المسحوبتان من الكيس 1 بيضاء

H_2 الحدث الدال على أنَّ الكرتان المسحوبتان من الكيس 1سوداء

H_3 الحدث الدال على أنَّ الكرتان المسحوبتان من الكيس الأول من لونين مختلفين ، فيكون :

$$P(H_1) = \frac{C_2^4}{C_2^7} = \frac{2}{7} \ , \qquad P(H_2) = \frac{C_2^3}{C_2^7} = \frac{1}{7} \ , \qquad P(H_3) = \frac{C_1^4 \times C_1^3}{C_2^7} = \frac{4}{7}$$

نلاحظ أنَّ : $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{4}{7} = 1$

أي أنَّ H_1, H_2, H_3 تشكّل تجزئة لِ Ω التي تمثل نتائج سحب كرتين من الكيس الأول .

١) بفرض A الحدث الدال على أنَّ الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء فيكون باستخدام قاعدة الاحتمال المركب : $P(A) = P(H_1).P_{H_1}(A) + P(H_2).P_{H_2}(A) + P(H_3).P_{H_3}(A)$ حيث أنَّ :

$$P_{H_1}(A) = \frac{C_1^5}{C_1^{10}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\,, P_{H_2}(A) = \frac{C_1^7}{C_1^{10}} = \frac{7}{10}\,, P_{H_3}(A) = \frac{C_1^6}{C_1^{10}} = \frac{6}{10}$$

فينتج أنَّ : $P(A) = \frac{2}{7} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{7} \times \frac{7}{10} + \frac{4}{7} \times \frac{6}{10} = \frac{10+7+24}{70} = \frac{41}{70}$

٢) B الحدث الدال على أنَّ الكرة المسحوبة بيضاء ، فإنَّ :

$$P(B) = 1 - P(A) = \frac{29}{70}$$

٣) حسب دستور بايز فإنَّ : $P_A(H_3) = \frac{P(H_3).P_{H_3}(A)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i).P_{H_i}(A)} = \frac{\frac{4}{7}\times\frac{6}{10}}{\frac{41}{70}} = \frac{24}{41}$

الاستقلال العشوائي

ليكن (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً ((بحيث : P قياس احتمالي ، F جبر تام ، Ω فضاء العينة)) :

١) ليكن A, B حدثين من F نقول إنّهما مستقلان عشوائياً ، إذا تحقق مايلي :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

٢) إذا كان A_1, A_2, A_3 أحداث من F نقول عن هذه الأحداث إنّها مستقلة عشوائياً إذا تحقق الشرطان:

أ- الأحداث A_1, A_2, A_3 مستقلة عشوائياً مثنى مثنى فيما بينها .

ب- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)$

٣) نقول عن متتالية من الأحداث $(A_i)_{i\geq 1}$ من F إنها مستقلة عشوائياً إذا تحقق الشرطان :

أ- كل متتالية جزئية منها من المرتبة $(n-1)$ مستقلة عشوائياً .

ب- $P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

◀ **نتائج :**

Syria Math Team

١) من تعريف الاستقلال الاحتمالي نجد أنَّ :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A).P(B)}{P(A)} = P(B) \ , \ P_B(A) = P(A)$$

٢) إذا كان $A \cap B = \emptyset$ (حدثان متنافيان) ، فليكونا مستقلان يجب أن يكون :

$$P(B) = 0 \quad \text{أو} \quad P(A) = 0$$

$$P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A).P(B) = 0 \Rightarrow P(A) = 0 \lor P(B) = 0$$

أي يجب على الأقل أن يكون أحدهما حدثاً **مستحيلاً**

٣) في حال تنافي الأحداث لدينا احتمال الاجتماع يساوي مجموع الاحتمالات .

وفي حال استقلال الأحداث لدينا احتمال التقاطع يساوي جداء الاحتمالات

انتهت المحاضرة

Syria Math Team