◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄ المحاضرة : العاشرة ◄ عنوان المحاضرة: المخططات التبديلية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١ـ المودول البسيط

٢ـ المخططات التبديلية

٣ـ المتتاليات التامة

تعريف : نقول عن مودول M إنه بسيط إذا كانت مودولاته الجزئية هي M نفسه والمودول $\{0\}$

س 1 : ليكن M, N مودولات على حلى حلقة R و N و $f: M \to N$ تشاكلا مودوليا غير صفري

أثبت أن كلا من القضيتين الآتيتين صحيحتين :

١- المودول M بسيط ⇐ f متباين

٢- المودول N بسيط ⇐ f غامر

الحل :

١- لكي يكون ال f متباين يجب تحقق :

$$Ker\ (f) = \{0\}$$

إن $Ker(f)$ مودول جزئي من M وبما أن M بسيط

⇐ إما $M = Ker(f)$ أو $Ker(f) = \{0\}$

إذا كان $M = Ker(f)$ ⇐ $\forall x \in M\ ; f(x) = 0$ وهذا غير صحيح لأن الفرض f غير صفري

إذا $Ker(f) = \{0\}$ ⇐ f متباين

٢- إن $Im(f)$ مودول جزئي من N وبما أن N بسيط فإن :

إما $Im(f) = N$

أو $Im(f) = \{0\}$

إن $Im(f) \neq 0$ لأن f غير صفري

أي أن $Im(f) = N \Leftarrow f$ غامر

المخططات التبديلية

تعريف : نقول إن مخطط التطبيقات

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "f"'] & & C \\ B \arrow[urr, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

تبادلي (commutative) إذ كان $hof = g$ ونقول أن مخطط التطبيقات

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ c \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

تبادلي إذا كان : $go\alpha = \beta of$ ونقول إن الخطط :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \end{tikzcd}$$

تبادلي إذا كان :

$$f'o\alpha = \beta of$$

و $g'o\beta = \gamma og$

المتتاليات التامة :

تعريف : لتكن $\{f_i: M_i \to M_{i+1}\}_{i\in I}$ أسرة تشاكلات مودولية

نقول إن متتالية التشاكلات المودولية

$$\to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to$$

انها تامة أذا كان :

$$Im(f_{i-1}) = Ker(f_i)$$

وذلك لكل $i \in I$

ملاحظة : إذا كانت هذه متتالية تامة يكون $f_i o f_{i-1} = 0$ (أثبت ذلك) لكل $i \in I$

مبرهنة : إذا كان $f: M \to N$ تشاكلا مودوليا على حلقة R و كان

$J: 0 \to M$ التباين القانوني

و $N \to 0$ التشاكل الصفري فان :

١- f متباين $\Leftrightarrow$ المتتالية $0 \xrightarrow{J} M \xrightarrow{f} N$ تامة

٢- f غامر $\Leftrightarrow$ المتتالية

$M \xrightarrow{f} N \to 0$ تامة

٣- f تقابل $\Leftrightarrow$ المتتالية

$0 \xrightarrow{J} M \xrightarrow{f} N \to 0$ تامة

مبرهنة : إذا كان المخطط :

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "j"] & & \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

مخططا تشاكلات مودولية سطره متتالية تامة وكان $goj = 0$ فإنيوجد تشاكل مودولي وحيد

$$h: A \to X$$

يجعل المخطط تبادليا

الإثبات :

بما أن السطر متتالية تامة فإن f متباين حسب مبرهنة سابقة وكذلك $Im(f) = Ker(g)$

وبما أن $goj = 0$ فرضا فإن $Im(j) \subseteq Ker(g) \Leftarrow Im(j) \subseteq Im(f)$

أي أصبح لدينا f تشاكل متباين و $Im(j) \subseteq Im(f)$

بالتالي حسب مبرهنة سابقة يوجد تشاكل مودولي وحيد :

$$h: A \to X$$

بحيث $foh = j$ أي أن h يجعل المخطط تبادليا

ملاحظة : (ينتج من هذه المبرهنة)

إذا كان $f: M \to N$ تشاكل مودوليا وكان $J: Ker(f) \to M$ تباين قانوني

عندئذ فإن القضايا الأتية صحيحة :

١- $foJ = 0$

٢- إذا كان $g: P \to M$ تشاكلا مودوليا بحيث $fog = 0 \Leftarrow$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: P \to Ker(f)$ بحيث يكون المخطط تبادليا

$$\begin{tikzcd}
 & p \arrow[dl, "h"'] \arrow[d] & \\
Ker(f) \arrow[r, "J"'] & M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

مبرهنة : إذا كان مخطط التشاكلات الآتي تبادليا :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[d, "\delta"] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D'
\end{tikzcd}$$

وكل سطر فيه متتالية تامة فإن :

١- إذا كان α, γ غامرين وكان δ متباينا فإن التشاكل β غامر
٢- إذا كان β, δ متباين وكان α غامرا فإن التشاكل γ متباين

س$_1$ (وظيفة): ليكن $f: M \to N$ تشاكلا مودوليا وليكن M' مودول جزئي من M, N' مودول جزئي من N أثبت أن : $\vec{f}\left(M' \cap \overleftarrow{f}(N')\right) = \vec{f}(M') \cap N'$

س$_2$(وظيفة): ليكن $f: A \to B$ و $f': A' \to B'$ تشاكلين مودوليين نعرف التطبيق

$$f \times f': A \times A' \to B \times B'$$

بالعلاقة $(f \times f')(a \times a') = \left(f(a), f(a')\right)$

وذلك $\forall (a, a') \in A \times A'$ أثبت أن $f \times f'$ تشاكل مودولي

انتهت المحاضرة

إعداد: هلا همج – رغد جودة – بكر مشرف