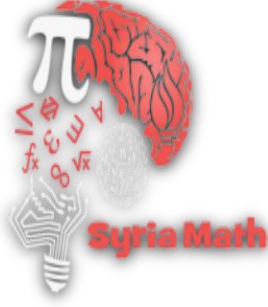


◀ دكتور المادة: يوسف الوادي

◀ المحاضرة: العاشرة ◀ عنوان المحاضرة: المخططات التبديلية



المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١- المودول البسيط

٢- المخططات التبديلية

٣- المتتاليات التامة

تعريف : نقول عن مودول M إنه بسيط إذا كانت مودولاته الجزئية هي M نفسه والمودول $\{0\}$

س١ : ليكن M, N مودولات على حلقه R و $f: M \rightarrow N$ تشاكلا مودوليا غير صفري

أثبت أن كلا من القضيتين الآتيتين صحيحتين :

١- المودول M بسيط $\Leftrightarrow f$ متباين٢- المودول N بسيط $\Leftrightarrow f$ غامر

الحل :

١- لكي يكون ال f متباين يجب تحقق :

$$\text{Ker}(f) = \{0\}$$

إن $\text{Ker}(f)$ مودول جزئي من M وبما أن M بسيط

$$\Leftrightarrow \text{إما } M = \text{Ker}(f) \text{ أو } \text{Ker}(f) = \{0\}$$

إذا كان $M = \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \forall x \in M$ وهذا غير صحيح لأن الفرض f غير صفري

إذا $\text{Ker}(f) = \{0\} \Leftrightarrow f$ متباين

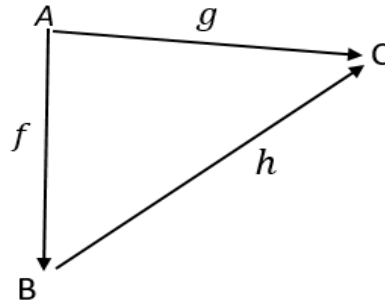
٢- إن $\text{Im}(f)$ مودول جزئي من N وبما أن N بسيط فإن :

$$\text{إما } \text{Im}(f) = N$$

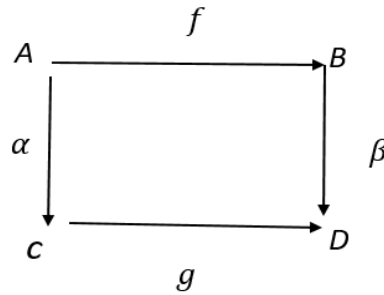
$Im(f) = \{0\}$ أو
 إن $Im(f) \neq 0$ لأن f غير صفري
 أي أن $f \leftarrow Im(f) = N$ غامر

المخططات التبادلية

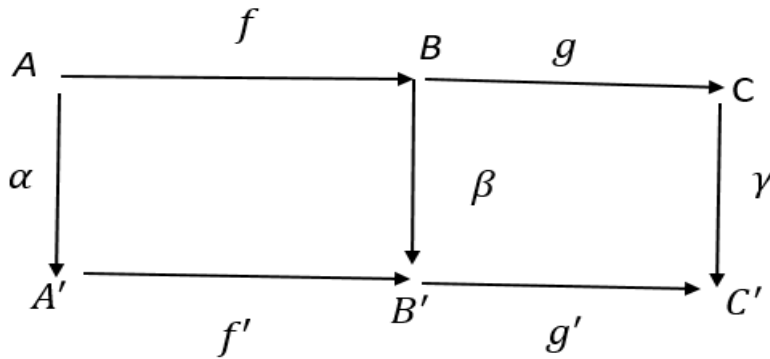
تعريف: نقول إن مخطط التطبيقات



تبادلي (commutative) إذ كان $hof = g$ ونقول أن مخطط التطبيقات



تبادلي إذا كان : $go\alpha = \beta of$ ونقول إن الخطط :



تبادلي إذا كان :

$$f' o \alpha = \beta of$$

$$g' o \beta = \gamma og$$

المتتاليات التامة :

تعريف : لتكن أسرة تشاكلات مودولية $\{f_i: M_i \rightarrow M_{i+1}\}_{i \in I}$

نقول إن متتالية التشاكلات المودولية

$$\rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \rightarrow$$

انها تامة إذا كان :

$$Im(f_{i-1}) = Ker(f_i)$$

وذلك لكل $i \in I$

ملاحظة : إذا كانت هذه متتالية تامة يكون $f_i \circ f_{i-1} = 0$ (أثبت ذلك) لكل $i \in I$

مبرهنة : إذا كان $f: M \rightarrow N$ تشاكلا مودوليا على حلقة R و كان

$$J: 0 \rightarrow M$$

و $N \rightarrow 0$ التشاكل الصفري فان :

$$1- f \text{ متباين} \Leftrightarrow \text{المتتالية } 0 \xrightarrow{J} M \xrightarrow{f} N \text{ تامة}$$

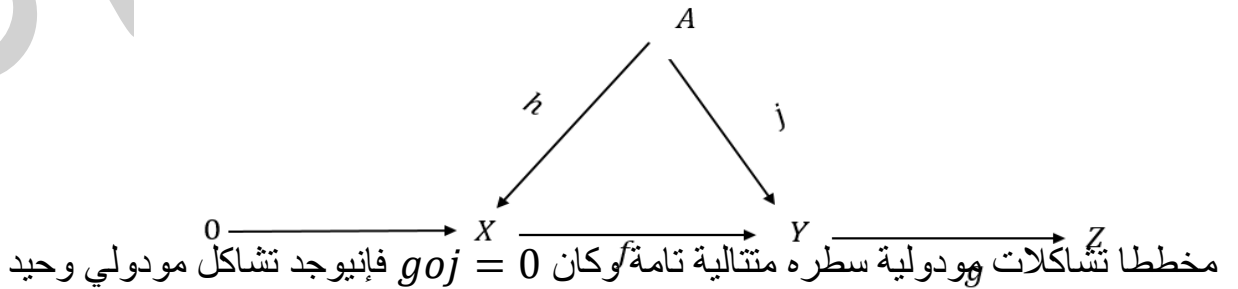
$$2- f \text{ غامر} \Leftrightarrow \text{المتتالية}$$

$$M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0 \text{ تامة}$$

$$3- f \text{ تقابل} \Leftrightarrow \text{المتتالية}$$

$$0 \xrightarrow{J} M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0 \text{ تامة}$$

مبرهنة : إذا كان المخطط :



$$h: A \rightarrow X$$

يجعل المخطط تبادليا

الإثبات :

بما أن السطر متتالية تامة فإن f متباين حسب مبرهنة سابقة وكذلك $Im(f) = Ker(g)$

وبما أن $goj = 0$ فرضا فإن $Im(j) \subseteq Ker(g)$

أي أصبح لدينا f تشاكل متباين و $Im(j) \subseteq Im(f)$

بالتالي حسب مبرهنة سابقة يوجد تشاكل مودولي وحيد :

$$h: A \rightarrow X$$

بحيث $foh = j$ أي أن h يجعل المخطط تبادليا

ملاحظة : (ينتج من هذه المبرهنة)

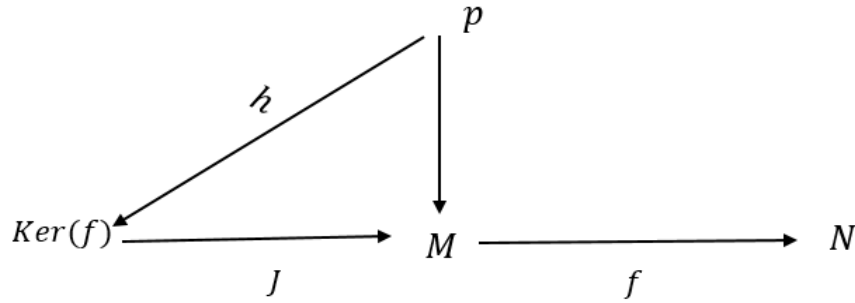
إذا كان $f: M \rightarrow N$ تشاكل مودوليا وكان $J: Ker(f) \rightarrow M$ تباين قانوني

عندئذ فإن القضايا الآتية صحيحة :

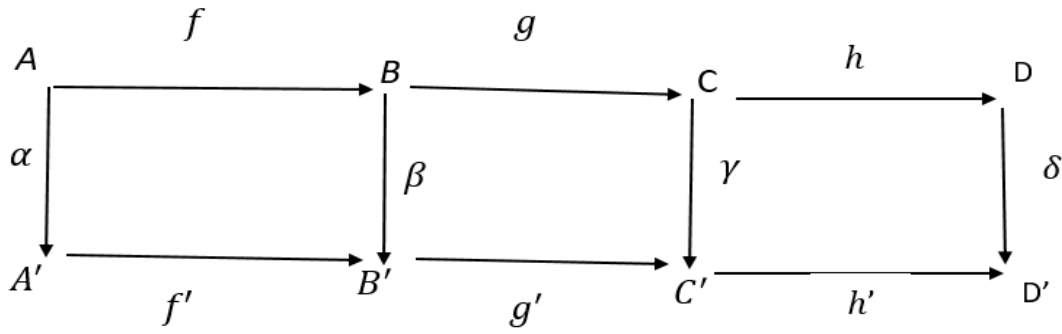
$$foJ = 0 - 1$$

٢- إذا كان $g: P \rightarrow M$ تشاكلا مودوليا بحيث $fog = 0$ يوجد تشاكل مودولي وحيد

$h: P \rightarrow Ker(f)$ بحيث يكون المخطط تبادليا



مبرهنة: إذا كان مخطط التشاكلات الآتي تبادليا :



وكل سطر فيه متتالية تامة فإن :

- ١- إذا كان α, γ غامرين وكان δ متبايناً فإن التشاكل β غامر
- ٢- إذا كان δ, β متباينين وكان α غامراً فإن التشاكل γ متباين

س_١ (وظيفة): ليكن $f: M \rightarrow N$ تشاكلاً مودولياً وليكن M' مودول جزئي من M, N' مودول جزئي

$$\text{من } N \text{ أثبت أن: } \vec{f}(M' \cap \vec{f}(N')) = \vec{f}(M') \cap N'$$

س_٢ (وظيفة): ليكن $f: A \rightarrow B$ و $f': A' \rightarrow B'$ تشاكليين مودوليين نعرف التطبيق

$$f \times f': A \times A' \rightarrow B \times B'$$

$$\text{بالعلاقة } (f \times f')(a \times a') = (f(a), f(a'))$$

وذلك $\forall (a, a') \in A \times A'$ أثبت أن $f \times f'$ تشاكل مودولي

انتهت الحاضرة

إعداد: هلا هج - مرغد جودة - بكر مشرف