نظري

◄ دكتور المادة : يوسف الوادي

◄ المحاضرة : الحادي عشر ◄ عنوان المحاضرة: المخططات التبديلية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

١ـمبرهنة تخص المخططات التبديلية

٢ـأسئلة تخص التشاكل المودولي

٣ـالتشاكل المستخلص

مبرهنة : إذا كان مخطط التشاكلات الآتي تبادليا :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[d, "\delta"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D'
\end{tikzcd}$$

وكل سطر فيه متتالية تامة فإن :

١- إذا كان γ, α غامرين وكان δ متباينا فإن التشاكل β غامر

٢- إذا كان β, δ متباين وكان α غامرا فإن التشاكل γ متباين

الإثبات :

١- فكرة البرهان : لدينا $\beta: B \to B'$ ($\forall b' \in B'$ يجب إثبات أن $(b' \in Im(\beta)$

$\forall b' \in B'$ وكون التشاكل γ غامر فإنه يوجد $c \in C$ بحيث :

$g'(b') = \gamma(c)$ ...(*) ومنه $h'(g'(b')) = h'(\gamma(c))$

وكون المخطط تبادلي : $h' o \gamma = \delta o h$

$$h'(\gamma(c)) = \delta(h(c))$$

$$h'og' = 0$$

كون السطر السفلي متتالية تامة

$$\Rightarrow \delta(h(c)) = 0$$

أي $h(c) \in Ker(\delta)$

δ متباين $\Leftarrow Ker(\delta) = \{0\}$

$$\Rightarrow h(c) = 0$$

$$\Rightarrow c \in Ker(h)$$

كون السطر العلوي متتالية تامة فإن $Ker(h) = Im(g)$

ومنه $c \in Im(g)$ وبالتالي يوجد $b \in B$ بحيث $c = g(b)$ نعوض في $(*)$

نجد : $g'(b') = \gamma(g(b))$ وكونه مخطط تبادلي $\Leftarrow g'(b') = g'(\beta(b))$

ومنه $g'(b') - g'(\beta(b)) = 0$

$$g'(b' - \beta(b)) = 0$$

أي أن $b' - \beta(b) \in Kerg'$

وكون السطر السفلي متتالية تامة فإن

$$Kerg' = Imf'$$

عندئذ يوجد $a' \in A'$ بحيث $b' - \beta(b) = f'(a')$ وبما ان التشاكل α غامر فيوجد $a \in A$

حيث $\alpha(a) = a'$

$$\Leftarrow b' - \beta(b) = f'(\alpha(a)) = \beta(f(a))$$

ومنه $b' = \beta(f(a) + b)$ أي $b' \in Im(\beta)$ وهذا يعني أن التشاكل β غامر

٢- إذا كان δ, β متباينين (أي علينا إثبات أن $c = 0$)

$\forall c \in Ker(\gamma)$ فإن $\gamma(c) = 0$ ومنه $h'(\gamma(c)) = 0$ والمخطط تبادلي أي :

$$h'o\gamma = \delta oh$$

وبالتالي نعوض $\delta(h(c)) = 0$

$$h(c) \in Ker(\delta) \ldots\ldots (1)$$

لكن δ متباين فإن $Ker(\delta) = \{0\}$

نعوض في (١) $\Leftarrow h(c) = 0$

ومنه $c \in Ker(h)$

لكن $Ker(h) = Im(g)$ كون السطر العلوي متتالية تامة $\Rightarrow c \in Im(g)$

عندئذ يوجد $b \in B$ بحيث

$$g(b) = c \ldots\ldots (2)$$

$$\gamma\big(g(b)\big) = \gamma(c) \Rightarrow \gamma\big(g(b)\big) = 0$$

وكون المخطط تبادلي فإن $\gamma o g = g' o \beta$

$$\Rightarrow \gamma\big(g(b)\big) = g'\big(\beta(b)\big)$$

$$\Rightarrow g'\big(\beta(b)\big) = 0$$

$$\Rightarrow \beta(b) \in Ker(g') \ldots\ldots (3)$$

كون السطر السفلي متتالية تامة وبالتالي

$$\Rightarrow Ker(g') = Im(f')$$

أي نعوض في (٣) $\beta(b) \in Im(f')$

عندئذ يوجد $a' \in A'$ بحيث $\beta(b) = f'(a')$

وبما أن α غامر فإنه يوجد $a \in A$:

$$\alpha(a) = a' \quad \forall a' \in A'$$

حسب التشاكلات كل لدينا :

$$\beta(b) = f'\big(\alpha(a)\big)$$

لكن $f' o \alpha = \beta o f$

وبالتالي يكون $\beta(b) = \beta\big(f(a)\big)$ كون β متباين فإن $b = f(a)$

نعوض في (٢) فنحصل على $g\big(f(a)\big) = c$

وكون السطر العلوي متتالية تامة فإن

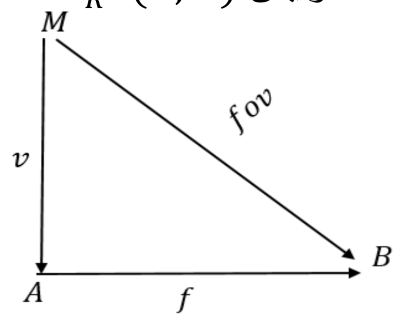
$$g o f = 0$$

$$\Rightarrow c = 0$$

وهو المطلوب..

التشاكل المستخلص

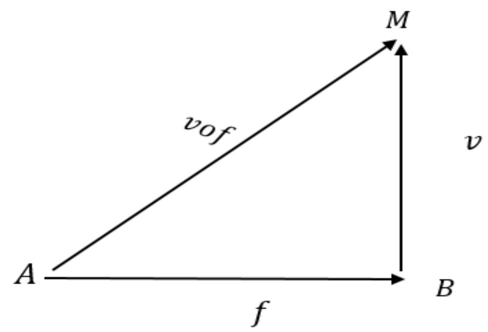
تعريف: ليكن A,B مودولين على حلقة R وليكن $f \in Hom_R\ (A,B)$ وليكن M مودولا على الحلقة Rولنأخذ المخطط



بموجب هذا المخطط نجد أن f يعرف تشاكلا :

$$f_*: Hom(M,A) \to Hom(M,B)$$
$$f_*(v) = fov$$

ولنأخذ المخطط :



أي أن f يعرف تشاكلا

$$f^*: Hom\ (B,M) \to Hom(A,M)$$
$$f^*(v) = vof$$

نسمي كلا من f_*, f^* تشاكلا مستخلصا من f

أثبت : أن كلا من f_*, f^* هو تشاكل مودولي على Z

سؤال (وظيفة):

ليكن N مودولا جزئيا من مودول M على حلقة R أثبت أنه يوجد تشاكل مودولي غامر نواته N

انتهت المحاضر: إعداد: هلا همج - رغد جوده - بكر مشرف