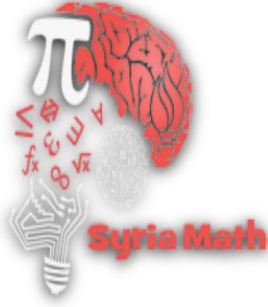


21-11-2017

نظري

دكتور المائدة: علي القبوي

المحاضرة الخامسة عشرة : عنوان المحاضرة : دراسة المتغيرات العشوائية



سوف نطرح في هذه المحاضرة مجموعة من التمارين :

تمرين (1) لتكن لدينا الدالة :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ x & ; 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & ; 1 \leq x < 2 \\ 0 & ; 2 \leq x \end{cases}$$

(1) برهن أن $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية فعلية لمتغير عشوائي X .(2) أوجد $F_X(x)$ ، ثم احسب $F(1.5)$ و $F(0.2)$.

الحل

• لدينا فرضاً أن $f_X(x) \geq 0$ ، فالشرط الأول محقق ، ولنبرهن الشرط الثاني :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^0 (0) \cdot dx + \int_0^1 x \cdot dx + \int_1^2 \frac{1}{2} \cdot dx + \int_2^{+\infty} (0) \cdot dx$$

$$= 0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x}{2} \right]_1^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

إذن $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X .• تعريفاً إن : $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) \cdot dt$ من أجل $t < 0$ فإن : $F_X(x) = \int_{-\infty}^x (0) \cdot dt = 0$ من أجل $0 \leq t < 1$ فإن : $F_X(x) = \int_{-\infty}^0 (0) \cdot dt + \int_0^x t \cdot dt = 0 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2}$ من أجل $1 \leq t < 2$ فإن :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^0 (0) \cdot dt + \int_0^1 t \cdot dt + \int_1^x \frac{1}{2} \cdot dt$$

$$= 0 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{t}{2} \right]_1^x = \frac{1}{2} + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{x}{2}$$

من أجل $t \leq 2$ فإن :

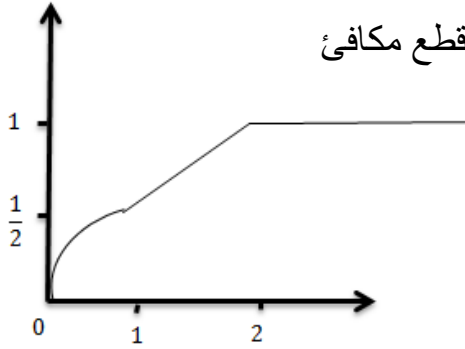
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^0 (0) \cdot dt + \int_0^1 t \cdot dt + \int_1^2 \frac{1}{2} \cdot dt + \int_2^x (0) \cdot dt$$

$$= 0 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{t}{2} \right]_1^2 + 0 = 1$$

فتصبح دالة التوزيع لـ X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & ; 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2} & ; 1 \leq x < 2 \\ 1 & ; 2 \leq x \end{cases}$$

توضيح للرسم (غير مطلوب) : الجزء الأول من الشكل يمثل جزء من قطع مكافئ



وهو دال على المجال $0 \leq x < 1$ ومعادلته : $F_X(x) = \frac{x^2}{2}$

" $y = \frac{x^2}{2}$ " معادلة قطع مكافئ .

ثم يلي الجزء الأول من الشكل القطعة المستقيمة وهي على المجال

$1 \leq x < 2$ ومعادلته : $F_X(x) = \frac{x}{2}$ " معادلة مستقيم .

والجزء الأخير مستقيم يوازي المحور ox وهو دال على المجال $2 \leq x$ ومعادلة $F_X(x) = 1$ أي من

الشكل " $y = 1$ " معادلة مستقيم يوازي المحور oy

تتمة الحل وبالتالي نجد : $F(0.2) = \frac{(0.2)^2}{2} = \frac{0.04}{2} = 0.02$ حيث $0 \leq 0.02 \leq 1$

وأن : $F(1.5) = \frac{1.5}{2} = 0.75$ حيث $0 \leq 0.75 \leq 1$

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = F(1.5) - F(0.5) = \frac{1.5}{2} - \frac{(0.5)^2}{2} = 0.625$$

تمرين (2) ليكن X متغيراً عشوائياً ، دالة توزيعه الاحتمالية :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

عين دالة الكثافة الاحتمالية لـ X وتحقق من ذلك ، ثم عين C من أجل : $P(X \leq C) = \frac{1}{2}$

الحل

$$f_X(x) = (F_X(x))' = \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{(1+x)-(x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} ; x > 0$$

ومنه تكون دالة الكثافة الاحتمالية لـ X هي : $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$ وللتحقق لدينا :

، فالشرط الأول محقق ولنبرهن الشرط الثاني :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^0 (0) \cdot dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} \cdot dx \\ &= 0 + \left[-\left(\frac{1}{1+x}\right)\right]_0^{+\infty} = (0 - (-1)) = 1 \end{aligned}$$

من أجل C إن :

$$P(X \leq C) = \frac{1}{2} \Rightarrow F_X(C) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{C}{1+C} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2C = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

أي أن احتمال : $\frac{1}{2} = x \leq 1$ ومنه : $P(X \leq 1) = \frac{1}{2}$

تمرين (3) ليكن X متغيراً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)^2}{9} & ; x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

هل $f_X(x)$ كثافة احتمالية فعلية لـ X ؟

الحل

لنتحقق من شروط دالة الاحتمال : 1) $f_X(x) \geq 0$ الشرط الأول محقق

$$2) \sum_x f_X(x) \stackrel{?}{=} 1$$

$$\sum_x f_X(x) = \sum_{x=0}^5 \frac{(x-2)^2}{9} = \frac{(-2)^2}{9} = \frac{(-1)^2}{9} + 0 + \frac{(1)^2}{9} + \frac{(2)^2}{9} + \frac{(3)^2}{9} = \frac{19}{9} \neq 1$$

إذاً $f_X(x)$ ليست دالة كثافة لـ X

ليكن X متغيراً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية : **تمرين (4)**

$$f_X(x) = \begin{cases} Kx^2 ; x \in [0,3] \\ 0 ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(1) عين الثابت K حتى تكون $f_X(x)$ دالة كثافة فعلية لـ X .

(2) عين دالة التوزيع الاحتمالية لـ X ثم احسب : $P(1 < X < 2)$

الحل

الشرط الأول : $f_X(x) \geq 0$ محقق من أجل $K > 0$

الشرط الثاني : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot dx = 1$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot dx &= \int_{-\infty}^0 (0) \cdot dx + \int_0^3 Kx^2 \cdot dx + \int_3^{+\infty} (0) \cdot dx \\ &= 0 + K \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 + 0 = 1 \Rightarrow K \left(\frac{27}{3} - 0 \right) = 1 \Rightarrow K(9) = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

فتصبح دالة الكثافة الاحتمالية الفعلية لـ X هي :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} ; x \in [0,3] \\ 0 ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(2) دالة التوزيع الاحتمالي تعطى بالعلاقة : $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) \cdot dt$

ومنه من أجل $t < 0$ فإن : $F_X(x) = \int_{-\infty}^0 (0) \cdot dt = 0$

من أجل $0 \leq t \leq 3$ فإن : $F_X(x) = \int_{-\infty}^0 (0) \cdot dt + \int_0^x \frac{t^2}{9} \cdot dt = \frac{x^3}{27}$

من أجل $t < 3$ فإن :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^0 (0) \cdot dt + \int_0^3 \frac{t^2}{9} \cdot dt + \int_3^x (0) \cdot dt = 0 + \left[\frac{t^3}{27} \right]_0^3 + 0 = (1 - 0) = 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \frac{x^3}{27} & ; 0 \leq x \\ 1 & ; 3 \leq x \end{cases}$$

فتصبح دالة التوزيع الاحتمالي لـ X هي :

$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = \frac{(2)^3}{27} - \frac{(1)^3}{27} = \frac{7}{27}$$

ويكون :

إذا لم يطلب إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي قبلاً فيمكن أن نحسب مباشرة :

ملاحظة

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 f_X(x) \cdot dx = \int_1^2 \frac{x^2}{9} \cdot dx = \left[\frac{x^3}{27} \right]_1^2 = \frac{7}{27}$$

إذا علمت أن الطلب اليومي لمادة معينة من مخزن يمثل متغيراً عشوائياً له جدول الكثافة :

تمرين (5)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$x_7 <$
X	0	1	2	3	4	5	6	$6 <$
$f_X(x)$	0.1	0.15	0.2	0.25	0.15	0.1	0.05	0

والمطلوب : (١) برهن أن $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية فعلية لـ X .

(٢) عين دالة التوزيع الاحتمالي $f_X(x)$.

(٣) احسب $P(X < 2)$ و $P(X \geq 4)$

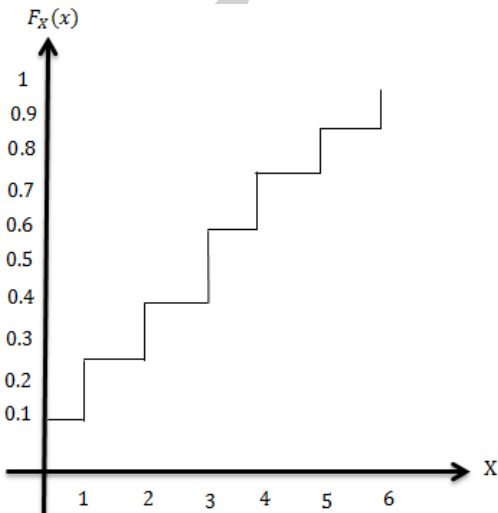
الحل

نلاحظ أن المتغير العشوائي منقطع للقيم ، لدينا $f_X(x) \geq 0$ ، ولنبرهن الشرط الثاني :

$$\sum_x f_X(x) = (0.1) + (0.15) + (0.2) + (0.25) + (0.15) + (0.1) + (0.05) = 1$$

إذاً $f_X(x)$ دالة احتمالية لـ X .

$$F_X(x) = \sum_{x_i < x} f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ f_X(x) & ; x_1 \leq x < x_2 \\ f_X(x_1) + f_X(x_2) & ; x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n-1} f_X(x_i) & ; x_{n-1} \leq x < x_n \\ \sum_{i=1}^n f_X(x_i) = 1 & ; x_n \leq x \end{cases}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 0.1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 0.1 + 0.15 = 0.25 & ; 1 \leq x < 2 \\ 0.45 = 0.25 + 0.2 & ; 2 \leq x < 3 \\ 0.70 = 0.45 + 0.25 & ; 3 \leq x < 4 \\ 0.85 = 0.70 + 0.15 & ; 4 \leq x < 5 \\ 0.95 & ; 5 \leq x < 6 \\ 1 & ; 6 \leq x \end{cases}$$

لدينا : $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - [P(X \leq 4) - P(X = 4)]$
 $= 1 - [F(4) - f(4)] = 1 - [0.85 - 0.15] = 1 - 0.70 = 0.30$
 $P(X < 2) = P(X \leq 2) - P(X = 2) = F(2) - f(2) = 0.45 - 0.2 = 0.25$

انتهت المحاضرة

إعداد: خديجة الفاعلي - ولاد المبخن هي حبيبة
 ٥١٢٥١ : ٠٩٩٧٣٧٨١٥٤ - ٠٩٩٧٣٧٨١٥٤

أيقن بأن الوصول إلى
 الأحلام هو مجرد "دعاء"